Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1914.

Berlin,
Weidmannsche Buchhandlung.
1914.

Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner) in Göttingen.

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1914.

Über die dreijährige Luftdruckschwankung und ihren Zusammenhang mit Polschwankungen.

Vorläufige Mitteilung.

Von

G. Angenheister.

Vorgelegt in der Sitzung vom 22. November 1913 von E. Wiechert[1]).

1. Einleitung.

Seit einer Reihe von Jahren bemüht sich das britische „Solar physics Committee" etwaige Beziehungen zwischen solaren und terristrischen Veränderungen aufzudecken.

Im Auftrage dieses Committees hat Sir Norman Lockyer die langjährigen Luftdruckbeobachtungen von 73 ausgewählten über der ganzen Erde verteilten Stationen auf ihren säkularen Gang untersucht, und eine mittlere, nahezu dreijährigen Periode aufgedeckt[2]); diese Periode tritt auf allen Stationen der Erde, — hier mehr, dort weniger — deutlich zutage. Nach der oben zitierten Untersuchung treten die Phasen nicht an allen Orten gleichzeitig auf, sondern es lassen sich zwei Hauptgebiete unterscheiden, Indien und Südamerika, in denen die Phasen gerade um eine halbe Periodenlänge von einander verschieden sind. Einem Maximum in Indien entspricht ein Minimum in Südamerika.

Die Untersuchung der Luftdruckänderungen an den 73 Stationen zeigt nun, daß die Erdoberfläche sich in zwei Teile teilen läßt, von denen der eine Teil im großen ganzen den Druckände-

1) Der Verfasser sandte mir die vorliegende Arbeit mit dem wesentlichen Teil ihres Inhaltes im Februar 1912 von Samoa zu, wo er damals dem geophysikalischen Observatorium vorstand. Nach seiner Rückkunft von Samoa 1913 hat er dann die Form der Arbeit noch umgewandelt. E. Wiechert.

2) Solar physics Committe, Monthly mean values of Barometric pressure for 73 selected stations over the earth surface; Sir Norman Lockyer, London 1908.

rungen in Indien folgt, der andere denen in Südamerika. Beide Teile sind geteilt durch eine Grenzlinie um die als feste Stütze der Luftdruck von einer Region zur anderen, hin und her schaukeln soll.

Diese Grenzlinie läuft von der Nordpolgegend an Südalaska vorbei nach NE Canada, dann nördlich von den Azoren an Portugal vorbei zum Äquator, schneidet NW Afrika ab, verläßt Afrika an der Goldküste und verliert sich im Südatlantik bei 60° WL zur Südpolgegend hin. Die andere Hälfte der Grenzlinie läuft von NE Grönland quer durch Südnorwegen und Schweden und dem südlich europäischen Rußland, durch das kaspische Meer, durch Turkestan zwischen Tibet und Mongolei, und verläßt China südlich vom gelben Meer; von hier, vom Eintritt in den Pacific wird ihr Verlauf besonders unsicher, (wegen Mangel an Stationen) wahrscheinlich verläuft sie östlich von den Philippinen und den Salomoninseln, biegt nach Süden, um zwischen Neuseeland und Australien zum Südpolgebiet zu laufen. Hiernach läge Samoa dicht an der Grenzlinie und gehörte zum südamerikanischen Druckgebiet.

2. Methode.

Die langjährige meteorologische Beobachtungsreihe, die Herr Dr. Funk in Samoa seit 1890 gesammelt hat, gab mir die Möglichkeit, dies genauer zu prüfen. Das Material ist in extenso veröffentlicht in den „deutschen überseeischen meteorologischen Beobachtungen“, herausgegeben von der Seewarte zu Hamburg.

Die Ableitung der nahezu dreijährigen Periode, der Grenzlinien und der Schaukelbewegung um diese stützt sich auf die Form der Kurven der jährlichen Mittelwerte des Luftdrucks von 73 Stationen. Die Kurven besitzen als Abszisse die Zeit und als Ordinaten das Jahresmittel des Drucks. Da die Kurvenformen durch nur einen Punkt pro Jahr bestimmt sind, so tritt die etwa dreijährige Periode nicht sehr regelmäßig zu Tage, und es zeigen sich schon bei benachbarten Orten Unregelmäßigkeiten, die wegen des Detailmangels der Kurven ein eingehenderes Studium erschweren.

Ich habe deshalb eine detailreichere Darstellung versucht, die eine genauere Bestimmung der Periodenlänge und ein eingehenderes Studium der Änderung der Kurvenform von Ort zu Ort ermöglicht[1]).

1) Eine Methode die von Ad. Schmidt zuerst bei der Bearbeitung des Erdmagnetismus angewendet wurde.

Die fortlaufende Reihe der Monatsmittel, die sich über mehrere Jahre erstreckt, wurde von Monat zu Monat fortschreitend zu je zwölfmonatlichen Mitteln zusammengefaßt. Man erhält so eine Reihe von Jahresmitteln, wie aus folgendem Beispiel ersichtlich ist:

Der Zeitraum vom 1. I. 1900—1. I. 1901 gibt das Jahresmittel für den 1. VII. 1900

" " " 1. II. " —1. II. " gibt das Jahresmittel für den 1. VIII. 1900.

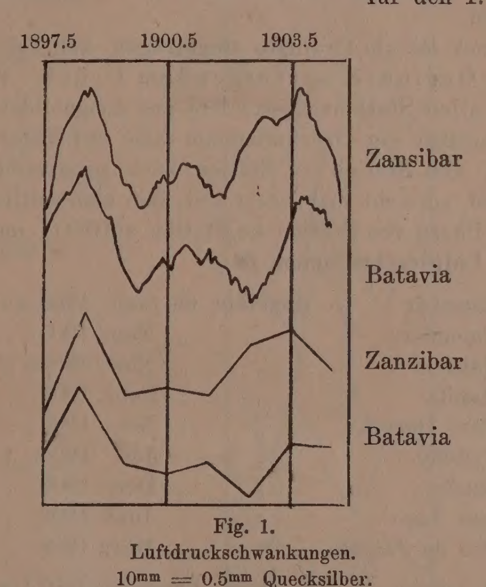


Fig. 1.
Luftdruckschwankungen.
10mm = 0.5mm Quecksilber.

Figur 1 zeigt die nach der obigen Methode gewonnenen Kurven von Zansibar und Batavia, ferner sind die Kurven für Zansibar und Batavia beigefügt, die dem oben besprochenem Werk entnommen sind, und pro Jahr nur einen Kurvenpunkt (das Jahresmittel für 1. Juli) enthalten. Der Vergleich der beiden Kurvenarten in Fig. 1 zeigt den Vorteil der hier angewendeten Methode. Zwischen Batavia und Zansibar zeigt sich in der von Monat zu Monat fortschreitenden Reihe von Jahresmitteln eine recht gut zu erkennende Ähnlichkeit, die in der dürftigen Darstellung (1 Punkt pro Jahr) zuweilen ganz verloren geht. Die überraschende Ähnlichkeit von zwei so weit von einander entferntliegenden Orten ermutigte zu eingehenderen Vergleichen.

3. Phasenverschiebung der Luftdruckwelle mit fortschreitender geographischer Länge.

Auf der Tafel I sind 9 Stationen der geographischen Länge nach geordnet, von Westen nach Osten gehend. Nach Möglichkeit sind äquatornahe Stationen gewählt, wegen des regelmäßigeren Verlaufes der Druckänderungen in den Tropen. Sydney zeigt schon einen sehr unregelmäßigen Verlauf; es liegt der Tropenzone schon zu fern.

Der Druck ist als Ordinate eingetragen, auf Tafel I ist abnehmende Ordinate = steigendem Druck. Verfolgt man nun die auf allen Stationen besonders gut ausgebildete Phase, die 1903.5 in Zansibar ein Druckminimum (also auf Tafel I ein Maximum) zeigt, von Station zu Station nach geographischer Länge fortschreitend, so sieht man recht gut, daß eine zeitliche Verschiebung dieser Phase von Station zu Station auftritt; und zwar trat danach dies Luftdruckminimum in

Zansibar	ungefähr	im	Sept. 1903	ein
Colombo	„	„	Nov. 1903	„
Batavia	„	„	Nov. 1903	„
Manila	„	„	Febr. 1904	„
Port Darvin	„	„	Nov. 1903	„
Sydney	„	„	Juli 1903	„
Samoa	„	„	Dez. 1902	„
San Jago	„	„	Juni 1902	„
Rio de Janeiro	„	„	März 1902	„

Hiernach scheint die betrachtete Phase des Luftdruckminimums sich sowohl von Osten, wie von Westen kommend, dem indo-malaischen Archipel genähert zu haben, den sie ungefähr 1904.0 erreichte, während sie in Südamerika bereits etwa 1902.5 auftrat. Um dies recht anschaulich zu machen, ist in Fig. 2 dieser Teil der Kurven der Tafel I graphisch ausgeglichen und näher zusammengedrängt.

Es ist natürlich äußerst wichtig zu wissen, ob es tatsächlich dieselbe Phase ist, die hier von Station zu Station verglichen wird. Der Vergleich des Gesamtverlaufs der Kurven von Station zu Station scheint mir dies jedoch sehr wahrscheinlich zu machen. Auch andere Phasen erleiden von Ort zu Ort zeitliche Verschiebungen in gleichem Sinne und von ähnlicher Größe.

Südamerika und der indo-malaische Archipel scheinen zwei Aktionszentren zu sein, zu denen hin und von denen fort sich die

Luftdruckminima und Maxima periodisch verlagern. Da wir hier ein Luftdruckminimum auf seinem Wege von Südamerika nach

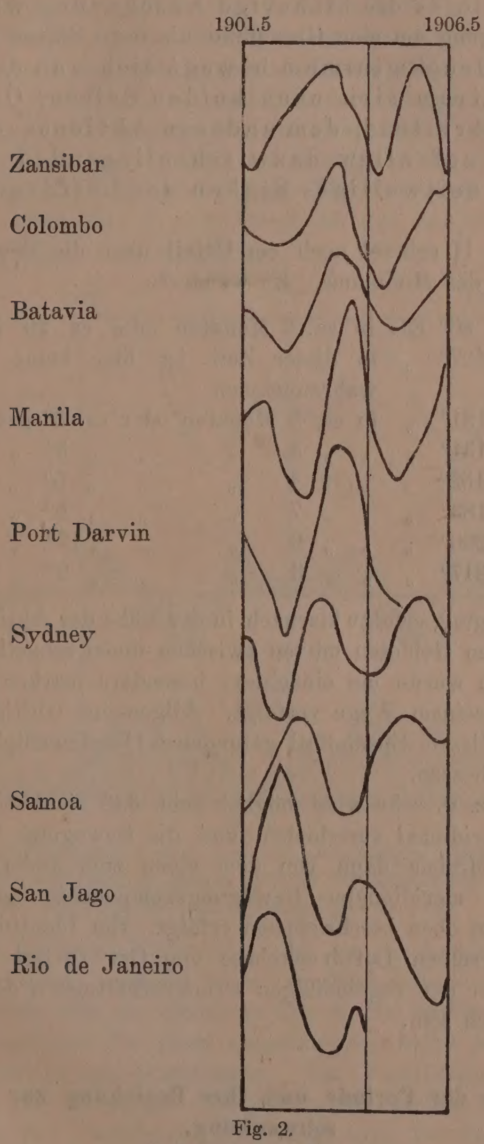


Fig. 2.
Luftdruckschwankungen.
10mm = 0.5mm Quecksilber.

Indonesien, in seiner zeitlichen Verschiebung von Ort zu Ort verfolgen konnten, so können wir in dem betrachteten Falle wohl nicht, — wie es die bisherige Anschauung war — eine Schaukelbewegung um eine Grenzlinie als feste Stütze annehmen; sondern ein Druckminimum bewegt sich von dem einen Aktionszentrum sich nach beiden Seiten, Osten und Westen ausbreitend, dem anderen Aktionszentrum zu und führt auf allen dazwischenliegenden Längengraden ein zeitweiliges Sinken des Luftdruckes herbei.

Die Tafel II erlaubt noch ein Urteil über die Bewegungsgeschwindigkeit des Minimums. Es wanderte

von 39°	EL—	80°	EL	in	ca.	2	Monaten	oder ca.	20°	pro Monat,
„ 80°	„	—107°	„	in dieser Zeit ist hier keine Bewegung wahrzunehmen						
„ 107°	„	—121°	„	in	ca.	3	Monaten	oder ca.	5°	pro Monat
„ 121°	„	—131°	„	„	„	3	„	„ „	3°	„ „
„ 131°	„	—152°	„	„	„	4	„	„ „	5°	„ „
„ 152°	„	—188°	„	„	„	7	„	„ „	5°	„ „
„ 188°	„	—290°	„	„	„	6	„	„ „	17°	„ „
„ 290°	„	—317°	„	„	„	3	„	„ „	9°	„ „

Die Bewegung erfolgt hiernach in der Nähe der Aktionszentren langsam, in den Gebieten mitten zwischen ihnen schneller.

Im obigen wurde ein einzelnes, besonders markantes Druckminimum auf seinem Wege verfolgt. Allgemeine Gültigkeit kann man der bei diesem Spezialfall gefundenen Gesetzmäßigkeit natürlich nicht beimessen.

Es kann z. B. sehr wohl möglich sein, daß die Aktionszentren selbst sich meridional verschieben und die Bewegung der Druckmaxima und Minima dann von dem einen zum andern Zentrum mit erheblich meridionaler Bewegungskomponente auf anderen Wegen als den oben beschriebenen erfolgt. Ein Identifizieren und Verfolgen derselben Luftdruckphase von Ort zu Ort wird aber wohl nur unter den regelmäßigen Druckverhältnissen der niederen Breiten möglich sein.

4. Die Länge der Periode und ihre Beziehung zur Polhöhenschwankung.

Die langjährige Luftdruckreihe von Batavia deutet darauf hin, daß der ungefähr dreijährigen Periode eine andere von ungefähr

doppelter Dauer überlagert ist. Fig. 3 zeigt die Kombinationswelle einer reinen Sinuswelle von drei- und sechsjähriger Periode und willkürlicher Amplitude. Die darunter befindliche, beobachtete Luftdruckschwankung von Batavia sieht ihr schon sehr ähnlich. Die Resonanzwirkung zwischen einer solchen dreijährigen und einer sechsjährigen Periode in der Luftdruckschwankung würde bewirken, daß die ungefähr dreijährige Periode abwechselnd mit großer und kleiner Amplitude zur Ausbildung gelangt. Dies ist tatsächlich in der Kurve von Batavia der Fall. Die Amplitude ist stark in den Jahren 1890—93; 96—99; 1902—05 und von 08 an, schwach in den dazwischen liegenden Zeiten.

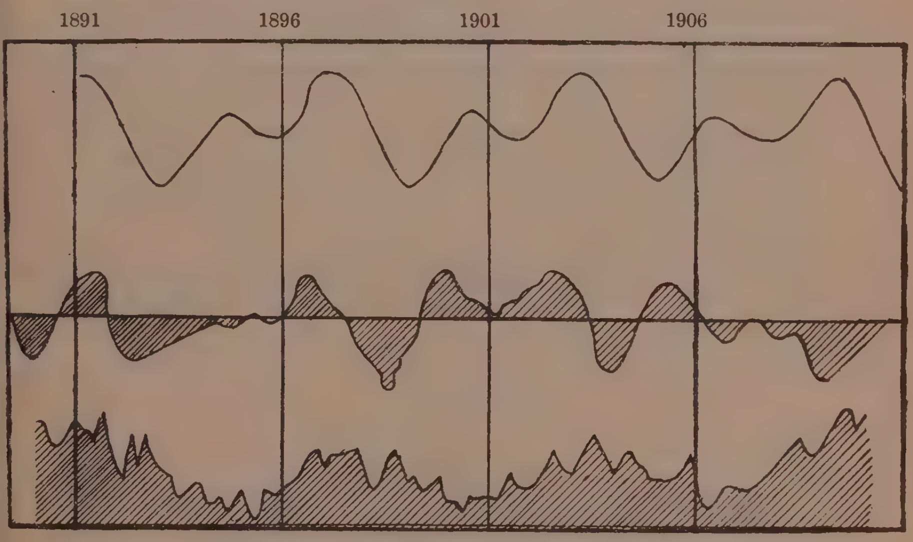


Fig. 3.
Oben: Kombination einer drei- und sechsjährigen Sinuswelle.
Mitte: Luftdruck in Batavia 10mm = 1mm Quecksilber.
Unten: Amplitude der Polschwankung 1mm = 0″.02.

In sehr ähnlicher Weise schwankt nun die Amplitude der Polhöhenschwankung, auch in einer ungefähr sechsjährigen Periode. Zum Vergleich sind in derselben Fig. 3 die Abstände des Poles von dem mittleren Pol (also ungefähr die halbe Amplitude der Polhöhenschwankung) eingetragen. Ein Parallelismus läßt sich wohl nicht gut verkennen. Zu den Zeiten großer bezw. kleiner Amplituden der Luftdruckschwankung sind die Amplituden der Polschwankung groß bezw. klein.

Die Chandlersche Periode der Polhöhenschwankung beträgt

nach den letzten Untersuchungen ungefähr $14^1/_3$ Monat (436.6 Tage). Sie muß daher sowohl mit der drei- wie auch mit der sechsjährigen Luftdruckschwankung alle 6 Jahre resonieren. ($5 \times 14^1/_3 = 71^2/_3$ Monate, $6 \times 12 = 72$ Monate). Ein ursächlicher Zusammenhang zwischen dem mit den dreijährigen Luftdruckschwankungen verbundenen Massentransport und den Polschwankungen gewinnt dadurch an Wahrscheinlichkeit.

Durch Rechnung läßt sich nun die Größenordnung der Polschwankung feststellen, die durch einen Massentransport von der Art der oben beschriebenen Luftdruckschwankung entsteht.

Bei homogener starrer Erde kann man sich die durch die Luftdruckschwankung veranlaßte Veränderung der Massenverteilung von Erde und Atmosphäre, bezogen auf die Rotationsaxe, entstanden denken, durch Verlagerung einer Schicht, die ähnliche Form und gleiches Gewicht wie die Luftdruckwelle besitzt. Diese Schicht (störende Schicht) habe die mittlere Dichte der Erde; ihre maximale Dicke ist dann $\pm 2^{mm}$ (= ungefähr $\pm 1^{mm}$ Quecksilber).

Im flüssigen Zustand würde die Gestalt der Erde die Gleichgewichtsfigur sein, die sie unter Einwirkung von Gravitation und Zentrifugalkraft annehmen muß. Die Größenordnung der Abplattung $\alpha = \frac{R_a - R_p}{R_a}$ wird schon durch den Quotienten der Zentrifugal- und Schwerkraft (beide am Äquator gemessen)

$$\frac{\omega^2 \varrho}{\Gamma} = \frac{1}{3} 10^{-2}$$

gegeben.

Nehmen wir nun an, daß durch irgend einen Zwang die Rotation nicht wie in der Normalanordnung um die Figurenaxe erfolgt, sondern, daß die Rotationsaxe aus ihrer normalen Lage gebracht und gegen die Figurenaxe geneigt würde. Durch diese Verlagerung entsteht eine Änderung in der Anordnung und Größe der Zentrifugalkräfte. Die flüssigen Teilchen folgen diesen Antrieben und streben einer neuen Lage zu, die das Gleichgewicht wieder herstellt.

Die hierdurch in einem Punkte entstandene Änderung des Erdradius, die Deformation, wird man der Änderung der Zentrifugalkraft dort proportional setzen können und eine Schätzung der Größenordnung dieses ΔR wird schon die Proportion $\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta(\omega^2 \varrho)}{\Gamma}$ ermöglichen.

Umgekehrt wird bei einer starren Erde, die durch einen Massen-

transport eine geometrische, nicht elastische, Veränderung ihrer Figur erfahren hat, durch die damit verbundene Änderung der Zentrifugalkräfte, die Rotationsaxe in eine neue Lage gebracht, die das Gleichgewicht wieder herzustellen strebt. Man wird daher auch hier die Größenordnung aus der obigen Gleichung erhalten. Die Deformation ist hier gleich der Dicke der oben erwähnten Störungsschicht; $\Delta R = 2^{mm}$.

Die Elastizität der Erde, Verteilung von Wasser und Land bedingen Veränderungen, die jedoch die Größenordnung wohl nicht berühren.

Die Änderung der Zentrifugalkraft durch eine Axenverlagerung ergibt sich folgendermaßen: der Anfang eines Koordinatensystems liege im Erdmittelpunkt, es sei die Z-Axe die alte Erdaxe, die XZ-Ebene die Ebene der Polverschiebung und die YZ-Ebene senkrecht dazu; die Größe der Axenverlagerung sei $\Delta\varphi$, die hierdurch entstandenen Änderungen der Komponenten der Zentrifugalkraft sind dann

$$\Delta X = \omega^2 R \sin\varphi \, \Delta d\varphi,$$
$$\Delta Y = 0,$$
$$\Delta Z = -\omega^2 R \cos\varphi \, \Delta\varphi.$$

Die Vertikalkomponente der Zentrifugalkraft, (Komponente senkrecht zur Erdoberfläche) sei V, es ist dann

$$\Delta V = \omega^2 R \sin 2\varphi \, \Delta\varphi.$$

Das Maximum der Änderung von V liegt bei 45° Breite; dort ist

$$\Delta V = \frac{\omega^2 \varrho}{\sqrt{2}} \Delta\varphi.$$

Die gesuchte Größenordnung der Axenverlagerung, die der bekannten obigen Deformation $\Delta R = 2^{mm}$ in 45° Breite entspricht, ergibt sich also aus der Gleichung:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\omega^2 \varrho}{\sqrt{2}\,\Gamma} \Delta\varphi,$$
$$3 \times 10^{-10} = \tfrac{1}{4} 10^{-2} \Delta\varphi,$$
$$\Delta\varphi = 10^{-7} = 0''.02.$$

Auch auf einem anderen Wege kann man eine Schätzung der Größenordnung der Polhöhenschwankung infolge der etwa dreijährigen Luftdruckschwankung erhalten[1]).

---

1) Vgl. Klein und Sommerfeld, Theorie des Kreisels 1903; und Spitaler, Ursache der Breitenschwankungen, Denkshcrift der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Wien 1897.

Wir wollen annehmen, daß etwa ein Achtel der Erdoberfläche zur Zeit des Maximums für diese Gegend einen Druckunterschied von $+1.0^{mm}$ Quecksilber gegenüber dem Luftdruck zur Zeit des vorangegangenen Minimums aufweist, während zur selben Zeit ein anderes Achtel der Erdoberfläche einen entsprechenden Druckunterschied von -1.0^{mm} Quecksilber besitzt; die Druckunterschiede auf den übrigen Teilen der Erdoberfläche sollen vernachlässigt werden. Die Luftmassen, durch deren Transport diese Luftdruckschwankung von 1.0^{mm} Quecksilber erzeugt wird, sind an Gewicht gleich 8.5×10^{14} kg.

Wird nun eine Masse m auf der Erdoberfläche vom Punkt λ_0 (Länge), φ_0 (Breite) zum Punkte $\varphi_1 \lambda_1$ verlagert, so wird dadurch eine Verschiebung der polaren Hauptträgheitsaxe der Erde eintreten. Wird diese mit Θ bezeichnet, und die Masse der Erde mit M so ist:

$$\Theta = 456 \frac{m}{M} \sqrt{\sin^2 2\varphi_0 + \sin^2 2\varphi_1 - 2 \sin 2\varphi_0 \sin 2\varphi_1 \cos(\lambda_0 - \lambda_1)},$$

das Maximum der Verschiebung tritt ein für:

$$\varphi_0 = +45^\circ,$$
$$\varphi_1 = -45^\circ,$$
$$\lambda_0 = \lambda_1,$$

ferner für:

$$\varphi_0 = \varphi_1 = 45^\circ,$$
$$\lambda_0 = \lambda_1 - 180^\circ.$$

Für diese Fälle ist:

$$\Theta = 912 \frac{m}{M} = 912 \frac{8.5 \times 10^{14}}{6 \times 10^{24}} = 1.3 \times 10^{-7}.$$

Die maximale Wirkung die durch die Verlagerung von 8.5×10^{14} kg Luft eintreten könnte, wäre danach eine Ablenkung der Hauptträgheitsaxe der Erde um $0''.03$ aus ihrer normalen Lage. Also von gleicher Größenordnung, wie die vorherige Berechnung ergab.

Ein Massentransport auf der Erdoberfläche veranlaßt nun nicht nur eine Verlagerung der polaren Hauptträgheitsaxe, sondern auch eine Verlagerung der Rotationsaxe. Bei einem unendlich langsamen Massentransport würde der Rotationspol genau dem Hauptträgheitspol folgen, die Amplituden beider Bewegungen also gleich sein. Bei einer periodischen Massenverlagerung aber — und mit einer solchen haben wir es hier zu tun — vollführt die Rotationsaxe sowohl eine erzwungene Schwingung von der Periode des Massentransportes (hier etwa 36 Monate) wie auch eine freie

Schwingung, deren Periode nur von der Massenverteilung und der Elastizität der Erde abhängt (Chandlersche Periode = 14.3 Monate). Durch Resonanzwirkung erfolgt bei Koinzidenz der Perioden eine Verstärkung der Amplituden. In unserem Falle wächst sie ungefähr auf das $\frac{1}{1-\frac{14.3}{36}} = 1.7$ fache. Die oben berechnete Schwankung der polaren Hauptträgheitsaxe von 0″.03 würde also eine Schwankung der Rotationsaxe im Maximum von 0″.05 veranlassen. Die Bewegung des Rotationspols infolge von solchen Lufttransporten erreicht also sehr wohl eine Größenordnung, die sich im Gang der Breitenschwankung merklich machen könnte. Die jährliche Amplitude der Polbewegung schwankte z. B. während der Jahre 1903.5 bis 1906.5 von 0″.4 bis 0″.2.

Der Einfluß der Luftdruckschwankung auf die Polhöhenschwankung kann einmal in der Weise erfolgen, daß die Schwankung des Rotationspoles um einen mittleren Pol erfolgt, der sich im Laufe der dreijährigen Luftdruckperiode der Druckverteilung entsprechend verlagert, und zweitens dadurch, daß die vorhandene Chandlersche Schwankung zu Zeiten gleicher Phase mit der Luftdruckschwankung durch diese zu größerer Intensität angeregt wird.

Zwei Umstände, die den oben errechneten Betrag von 0″.05 zu verkleinern streben, sind allerdings bisher nicht berücksichtigt worden.

Erstens sind $^2/_3$ der Erdoberfläche mit Wasser bedeckt; dies sucht dem Luftdrucküberschuß auszuweichen und in Gebiete des Druckminimums abzufließen. Dadurch kann ein Teil der auf der Erdoberfläche lastenden Druckunterschiede ausgeglichen werden. Die Kontinente dagegen können nicht ausweichen.

Zweitens ist die tatsächliche Luftmassenverlagerung keineswegs so günstig für eine Axenverlagerung angeordnet, wie bei der obigen Rechnung (Maximalfall $\lambda_0 = \lambda_1 - 180°$; $\varphi = 45°$ etc.) angenommen wurde. Auch muß berücksichtigt werden, daß bei Verlagerung von Massen auf der Erde zu diametral gelegenen Orten sich die Wirkungen auf die Trägheitsaxe aufheben. Andererseits mögen die tatsächlichen Druckunterschiede und die betreffenden Areale vielleicht größer sein als angenommen wurde. An einigen Orten, besonders in mittleren Breiten, wo der Effekt gerade am größten ist, sind die Druckunterschiede zuweilen bis zum zehnfachen größer. Für die Polkappen, die wahrscheinlich auch große Schwankungen aufweisen, fehlen die Beobachtungen.

Um ein genaueres Bild der Verlagerung der Konzentrations-

punkte der Luftmassen zu gewinnen, wird es nötig sein die Druckveränderung von Monat zu Monat zu verfolgen, am besten wohl an der Hand von Karten, in denen die Linien gleicher Änderung der Jahresmittel des Druckes von Monat zu Monat fortschreitend eingetragen werden. Für die Meere werden genauere Daten fehlen, dort aber gleichen sich die Zusatzdrucke durch die Nachgiebigkeit des Wassers aus, während die Daten für die Kontinente, die nicht nachgeben, vorhanden sind. Man wird also wohl mit einiger Genauigkeit die Lage und Größe der Zusatzdrucke berechnen, und mit der Verschiebung vergleichen können, die der mittlere Rotationspol erleidet, den der wirkliche Rotationspol in $14^1/_3$ Monaten umwandert.

Dies soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

5. Beziehung der dreijährigen Luftdruckschwankung zu Schwankungen in der Windrichtung und Regenmenge in Samoa.

Es ist von vornherein zu erwarten, daß der ungefähr dreijährige Gang des Luftdrucks Beziehungen zum Gang der anderen meteorologischen Elemente aufweisen wird.

In Tafel II ist der Verlauf der jährlichen Regenmenge in Samoa von Monat zu Monat fortschreitend dargestellt. Die nahezu dreijährige Periode tritt hier besonders deutlich hervor.

Um die Änderungen in der Luftbewegung über Samoa während der betrachteten Zeit mit den Druckänderungen und den jährlichen Regenmengen vergleichen zu können, wurden die Anzahl der Tage mit westlichen Winden (NNW—SSW) pro Jahr, wiederum zur Elimination der jährlichen Periode von Monat zu Monat fortschreitend in die Tafel II eingetragen. Benutzt wurden hierbei nur die Beobachtungen um Mittag, da die regelmäßigen Luftströmungen morgens früh und abends stark durch den Landwind beeinflußt werden. Die so gewonnenen Daten geben natürlich nur ein schlechtes Bild von der Änderung der Luftströmung über Samoa; die obere Luftströmung kommt dabei gar nicht zur Geltung. Immerhin zeigen sich schon hier einige Beziehungen zwischen Druck-, Wind- und Regenmenge.[1]

Der Vergleich dieser Regen- und Windkurven mit den Druckkurven benachbarter Gebiete deutet auf sehr merkwürdige Beziehungen. Um dies zu illustrieren ist in Tafel II die Druck-

1) Vergleichungen dieser Art sind für Indien und Australien bereits von C. Braak, Meteorol. Zeitschrift 1910 No. 3, und 1912 No. 1, und von William J. S. Lockyer „A Discusion of Australian Meteorology“ angestellt.

kurve von Batavia vom Jahre 1897—1906 eingezeichnet, die eine ganz überraschende Ähnlichkeit mit dem Verlauf der Regenmenge in Samoa zeigt. Der ursächliche Zusammenhang dieser meteorologischen Vorgänge in zwei doch 9000 km von einander entfernten Gebieten soll durch eine eingehendere Vergleichung mehrerer indonesischer und pazifischer Stationen genauer untersucht werden.

Zusammenfassung.

1) Die Methode der von Monat zu Monat fortschreitenden Jahresmittel gibt detailreichere Kurven, die eine genauere Bestimmung der Periodenlänge und Verschiebung der Phasen des Luftdrucks von Ort zu Ort ermöglichen.

2) Der Vergleich derselben Phase der Druckwelle (Minimum) an neun möglichst äquatorial gelegenen Stationen scheint darzutun, daß von dem einen Aktionszentrum, Südamerika, die Druckwelle sich nach beiden Richtungen, Osten und Westen, hin verschiebt und auf beiden Wegen dem andern Aktionszentrum, Indonesien, zueilt.

3) Der etwa dreijährigen Hauptwelle scheint eine zweite Welle überlagert, die mit der Hauptwelle ungefähr in der doppelten Periodendauer der Hauptwelle, also in etwa sechs Jahren zu resonieren scheint. Eine Periode von sechs Jahren findet sich auch in der Polhöhenschwankung. Ein Zusammenhang scheint, wie auch eine Überschlagsrechnung zeigt, möglich zu sein.

4) Die Kurven der Druckschwankung, der jährlichen Regensummen und Winde für Samoa zeigen unverkennbare Zusammenhänge.

Über die analytische Natur der Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen kritischen Punkten.

Von

Richard Fuchs in Berlin-Halensee.

Vorgelegt von Herrn D. Hilbert in der Sitzung am 20. Dezember 1913.

Im Folgenden beehre ich mich, zunächst in kurzem Auszuge, die Resultate von Untersuchungen mitzuteilen, die ich über Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen kritischen Punkten angestellt habe. Die ausführliche Behandlung wird in den Mathematischen Annalen erscheinen.

Die allgemeinste Differentialgleichung zweiter Ordnung mit festen kritischen Punkten lautet[1]):

$$\text{(A)} \quad \frac{d^2y}{dx^2}+\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-x}\right]\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-x}\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{y(y-1)}{x(x-1)(y-x)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[a-b\frac{x}{y^2}+c\frac{x-1}{(y-1)^2}-d\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right],$$

wo a, b, c, d Konstanten bedeuten. Die Lösungen dieser Gleichung können sich nur an den Stellen $0, 1, \infty$ verzweigen oder unbestimmt werden; außerdem hat aber jede Lösung noch unzählig viele mit den Integrationskonstanten verschiebbare Pole, in denen sie also wie eine rationale Funktion unendlich wird. Denkt man

---

1) Herr Painlevé hat (Comptes Rendus Paris, 1906, t. 143, p. 1111) gezeigt, daß man alle anderen Typen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen kritischen Punkten aus (A) durch einen eigentümlichen Grenzübergang ableiten kann.

sich von $x = 0$ und $x = 1$ je einen Verzweigungsschnitt in's Unendliche gelegt, so muß in der so zerschnittenen Ebene T jede Lösung von (A) eine eindeutige Funktion von x sein.

Wir suchen nun zuerst die Entwickelung des allgemeinen Integrals von (A) in der Umgebung von $x = 0$. Zu dem Zwecke bestimmen wir eine Lösung, die den Bedingungen

$$(1) \qquad \lim_{x=0} y = 0 \text{ und } \lim_{x=0} x\frac{dy}{dx} = 0$$

genügt. Wir machen dazu den Ansatz:

$$(2) \qquad y = y_0 x + y_1 x^2 + y_2 x^3 + \cdots,$$

wo $y_0, y_1, y_2, \ldots$ geeignet zu wählende Funktionen von x sind. Diese Entwickelung führen wir in (A) ein, nachdem wir mit $x^2 y(y-1)(y-x)$ multipliziert und $\frac{1}{x-1}$ und $\frac{1}{(x-1)^2}$ nach Potenzen von x entwickelt haben. Die Übersicht wird erhöht, wenn wir zuvor

$$(3) \qquad y = u . x$$

setzen, wodurch wir für u eine Gleichung (A′) erhalten, die ähnlich wie (A) gebildet ist. Beim Einführen von (2) fassen wir dann alle Glieder, die mit $x^\varkappa$ multipliziert sind, zusammen, indem wir festsetzen, daß $x\frac{d}{dx}(y_\varkappa x^\varkappa)$ und $x^2\frac{d^2}{dx^2}(y_\varkappa x^\varkappa)$ zu den Gliedern mit x hinzugezählt werden soll. Man erhält dann aus (A′)

$$(4) \qquad W_0 + W_1 x + W_2 x^2 + \cdots = 0.$$

Dieser Gleichung werden wir offenbar genügen, wenn wir die Koeffizienten $W_\varkappa$ einzeln gleich Null setzen. Es zeigt sich, daß $W_\varkappa = 0$ eine Differentialgleichung zur Bestimmung von $y_\varkappa$ liefert. Zunächst erhalten wir aus $W_0 = 0$:

$$(5) \; y_0(y_0-1)x^2 y_0'' + y_0(y_0-1)xy_0' - \frac{1}{2}(2y_0-1)x^2 y_0'^2 = \frac{1}{2}b(y_0-1)^2 - \frac{1}{2}dy_0^2.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$(6) \qquad y_0 = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{\gamma^2} - \frac{d}{\gamma^2}\right) + \frac{D}{16}\xi, \quad \xi = \alpha x^\gamma,$$

wenn α und γ zwei willkürliche Konstanten bedeuten, und

$$(7) \; D = \left(1 + \frac{\sqrt{b}}{\gamma} + \frac{\sqrt{d}}{\gamma}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{b}}{\gamma} - \frac{\sqrt{d}}{\gamma}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{b}}{\gamma} + \frac{\sqrt{d}}{\gamma}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{b}}{\gamma} - \frac{\sqrt{d}}{\gamma}\right)$$

gesetzt ist. Im Hinblick auf das Folgende wollen wir annehmen,

daß der reelle Teil von γ der Bedingung

(8) $$-1 \leq \Re(\gamma) \leq +1$$

unterliegt und wollen die Werte $\gamma = -1, 0, +1$ zunächst noch ausschließen. Übrigens kann man auch annehmen, daß der reelle Teil von γ positiv ist, da eine Vertauschung von ξ mit $\frac{1}{\xi}$ die Form von y_0 bei anderer Bezeichnung von α nicht verändert.

Zur Bestimmung von $y_1, y_2, y_3, \ldots$, sowie für den Konvergenzbeweis ist es zweckmäßig, die Gleichung (A′) noch einer Transformation zu unterziehen. Setzt man

(9) $$\frac{x^2 u'^2}{u(u-1)} + \frac{b}{u(x-1)^2} - \frac{d}{u-1} = Y,$$

so kann (A′) auch so geschrieben werden:

(B) $$\frac{dY}{dx} = PY + Q,$$

wo

(10) $$\begin{aligned} P &= \frac{1}{x-1}\left[xu'(1-x+ux) + 2(u-1)\right], \\ Q &= \frac{xu'}{(x-1)^2}\left[-a(1-ux) - \frac{c(x-1)}{1-ux} + \frac{(x-1)(1+x^2u')^2}{1-ux}\right] \\ &\qquad + \frac{2+x^2u'}{x-1}\left[d - \frac{b}{(x-1)^2}\right]. \end{aligned}$$

Aus (B) folgt:

(11) $$\begin{aligned} Y = \gamma^2 &+ \int_0^x (\gamma^2 P + Q) + \int_0^x P dx \int_0^x (\gamma^2 P + Q)\, dx \\ &+ \int_0^x P dx \int_0^x P dx \int_0^x (\gamma^2 P + Q)\, dx + \cdots, \end{aligned}$$

wobei alle Integrationen in der Ebene T auszuführen sind. Setzt man nun die Entwickelung $u = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \cdots$ in P und Q ein und erhöht bei jeder Integration den Exponenten eines Gliedes um 1, so erhält man für Y eine Entwickelung

(12) $$Y = Y_0 + Y_1 x + Y_2 x^2 + \cdots$$

und man sieht, daß bei der Berechnung von $Y_\varkappa$ in (11) nur die Glieder bis zum $\varkappa$-fachen Integral in Betracht kommen, da schon das $(\varkappa+1)$-fache nur Glieder enthält, die mindestens zum Exponenten $\varkappa+1$ gehören; $Y_\varkappa$ berechnet sich allein durch $y_0, y_1, \ldots, y_{\varkappa-1}$; $xy'_0, xy'_1, \ldots, xy'_{\varkappa-1}$ durch die Operationen: Addition, Multiplikation

und Integration. Multipliziert man (9) mit $u(u-1)$ und differenziert nach x, so hebt sich der Faktor u' einmal heraus und man erhält

$$(13) \qquad x^2u''+xu'-\gamma^2u = \frac{1}{2}(d-b-\gamma^2)+\frac{1}{2}xM,$$

wo mit M eine Entwickelung bezeichnet ist:

$$(14) \qquad M = M_0+M_1x+\cdots,$$

in der sich $M_\varkappa$ aus $y_0, y_1, \ldots, y_\varkappa;\; xy'_0, \ldots, xy'_\varkappa$ durch die Operationen: Addition, Multiplikation und Integration berechnen. Kehrt man mittels (3) von u wieder zu y zurück, so ergibt sich aus (13):

$$(C) \qquad y = y_0x+\frac{1}{2}x\xi\int_0^x\frac{dx}{x\xi^2}\int_0^x M\xi\,dx+c_1\xi+c_2\xi^{-1},$$

wenn wiederum die Integrationen in T ausgeführt werden. Wenn aber y auch (A) erfüllen soll, müssen die Konstanten c_1 und c_2 gleich Null sein.

Die Gleichung (C) gibt nun die successive Berechnung von $y_1, y_2, \ldots$. Bei der Berechnung von $y_\varkappa$ ist nämlich in M nur $M_{\varkappa-1}$ zu berücksichtigen. Es zeigt sich, daß sich $y_\varkappa$ aus $y_0, y_1, \ldots, y_{\varkappa-1}$ allein durch die Operationen der Addition und Multiplikation berechnen, wobei numerische Faktoren der Form $\frac{\varkappa+\gamma\lambda}{\iota+\gamma\mu}$, wenn $\varkappa, \lambda, \iota, \mu$ positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, hinzutreten, und zwar so, daß diese Faktoren, wenn (8) aufrecht erhalten wird und $\gamma = 0, \pm 1$ ausgeschlossen werden, auch für reelle rationale Zahlen γ nicht unendlich werden. So findet man, daß alle $y_\varkappa$ rationale Funktionen von $\xi = \alpha x^\gamma$ werden:

$$(15) \qquad y_\varkappa = \frac{\alpha_{\varkappa,\varkappa+1}}{\xi^{\varkappa+1}}+\frac{\alpha_{\varkappa\varkappa}}{\xi^\varkappa}+\cdots+\alpha_{\varkappa 0}+\beta_{\varkappa 1}\xi+\cdots+\beta_{\varkappa,\varkappa+1}\xi^{\varkappa+1}.$$

Da die Bedingung (8), wie sich später zeigt, den Charakter von y als allgemeiner Lösung von (A) nicht beeinträchtigt, so sehen wir also:

Das allgemeine Integral von (A) hat in der Umgebung von $x = 0$ die Entwickelung

$$(16) \quad y = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} x^{\varkappa+1}\left(\frac{\alpha_{\varkappa,\varkappa+1}}{\xi^{\varkappa+1}}+\frac{\alpha_{\varkappa,\varkappa}}{\xi^\varkappa}+\cdots+\alpha_{\varkappa,0}+\beta_{\varkappa,1}\xi+\cdots+\beta_{\varkappa,\varkappa+1}\xi^{\varkappa+1}\right);$$

dabei ist $\xi = \alpha x^\gamma$, wenn α und γ zwei willkürliche Konstanten bedeuten; der reelle Teil von γ unterliegt der

Bedingung $-1 \leqq \Re(\gamma) \leqq +1$ und $\gamma = 0, \pm 1$ sind zunächst auszuschließen. Man sieht übrigens, daß dieses allgemeine Integral die Gleichungen (1) erfüllt.

Um den Nachweis der Konvergenz dieser Reihe zu erbringen und die Möglichkeit der gliedweisen Differentiation und Integration, wovon im Vorhergehenden Gebrauch gemacht wurde, klarzustellen, muß zuerst nachgewiesen werden, daß bei den zur Ausführung von (11) und (C) notwendigen Integrationen immer nur Faktoren auftreten, die dem absoluten Betrage nach unter einer Grenze ε liegen. Daraus folgt dann aber, daß bei der Berechnung von $y_\varkappa x^{\varkappa+1}$ und $x\frac{d}{dx}(y_\varkappa x^{\varkappa+1})$ die Moduln dieser Größen erhöht werden, wenn man zu einem zu integrierenden Gliede an Stelle des Integralzeichens den Faktor $|x|\varepsilon$ treten läßt. Dann folgt aber aus (C), daß die Werte von $|y_\varkappa x^{\varkappa+1}|$ und $\left|x\frac{d}{dx}(y_\varkappa x^{\varkappa+1})\right|$ unterhalb von Werten $u_\varkappa x^{\varkappa+1}$, $v_\varkappa x^{\varkappa+1}$ liegen, die sich aus zwei Gleichungen

$$(17)\qquad \begin{aligned} u &= \varrho_1\left|\frac{x}{\xi}\right| + \mathfrak{P}_1(|x|, u, v),\\ v &= \varrho_2\left|\frac{x}{\xi}\right| + \mathfrak{P}_2(|x|, u, v), \end{aligned}$$

berechnen, wo $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ für hinlänglich kleine Werte von $|x|$, u, v konvergierende Reihen sind, die nach positiven ganzen Potenzen der Argumente fortschreiten und mit den Gliedern zweiter Dimension beginnen, wenn man darin den Ansatz macht:

$$(18)\qquad \begin{aligned} u &= \varrho_1\left|\frac{x}{\xi}\right| + u_1 x^2 + u_2 x^3 + \cdots,\\ v &= \varrho_2\left|\frac{x}{\xi}\right| + v_1 x^2 + v_2 x^3 + \cdots. \end{aligned}$$

Daraus folgern wir dann in einfacher Weise, daß die Moduln von $y_\varkappa x^{\varkappa+1}$ und $x\frac{d}{dx}(y_\varkappa x^{\varkappa+1})$ unterhalb von Werten

$$p\,\alpha_\varkappa \nu^{\varkappa+1}\left|\frac{x}{\xi}\right|^{\varkappa+1} \text{ bzw. } q\,\alpha_\varkappa \nu^{\varkappa+1}\left|\frac{x}{\xi}\right|^{\varkappa+1}$$

liegen, wobei p, q, ν, $\alpha_\varkappa$ Konstanten bedeuten und die Reihe

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} \alpha_\varkappa \nu^{\varkappa+1}\left|\frac{x}{\xi}\right|^{\varkappa+1}$$

für hinlänglich kleine $|x|$ konvergiert. Hieraus ergibt sich weiter,

daß die Reihen für y und $x\frac{dy}{dx}$ für hinlänglich kleine Werte von x unbedingt konvergieren, und daraus dann auch leicht die Möglichkeit der gliedweisen Differentiation und Integration der Reihe für y.

Wenn man für γ die bisher ausgeschlossenen Werte $\gamma = 0, \pm 1$ wählt, so hat die Reihe (16) keinen Sinn mehr. In diesem Falle aber zeigen wir, daß an Stelle von (16) eine Reihe tritt, deren Koeffizienten einfache rationale Funktionen von $\xi = \log(\alpha x)$ sind, wo α eine willkürliche Konstante bedeutet, und zwar wird für $\gamma = 0$ $y_\varkappa$ eine ganze rationale Funktion $(2\varkappa+2)^{\text{ten}}$ Grades von ξ.

Neben die Entwickelung (16) in der Umgebung von $x = 0$ treten ganz analoge Entwickelungen in der Umgebung von $x = 1$ und $x = \infty$; man hat nur entsprechend ξ (6) zu setzen

$$(19) \qquad \xi_1 = \alpha_1(1-x)^\delta, \quad \xi_2 = \alpha_2\left(\frac{1}{x}\right)^\varepsilon,$$

wo der reelle Teil von δ und ε wieder zwischen -1 und $+1$ zu liegen hat. Es zeigt sich, daß das allgemeine Integral von (A) für $x = 0$ den Wert 0, für $x = 1$ den Wert 1 annimmt und für $x = \infty$ wie x^ε unendlich wird.

Daraus folgt aber, daß das allgemeine Integral von (A) an keiner Stelle von unendlich hoher Ordnung unendlich werden kann, also überhaupt keine Unbestimmtheitsstellen besitzt.

Das allgemeine Integral zeigt danach große Ähnlichkeit mit der allgemeinen Lösung einer linearen Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse, mit dem wesentlichen Unterschiede freilich, daß die Exponenten bei den Integralen linearer Differentialgleichungen bestimmte aus den Koeffizienten folgende Werte haben, während sie hier mit den Integrationskonstanten „verschiebbar" sind.

Um dann den Übergang von einer der Stellen 0, 1, ∞ zu einer anderen zu vermitteln, geben wir weiter eine Darstellung des allgemeinen Integrals von (A), die für die ganze Ebene T giltig bleibt[1]). Bei der Berechnung der $y_\varkappa$ (15) zeigt es sich, daß alle

1) In seiner Arbeit, Journal für Mathematik, Bd. 141 behandelt Herr Schlesinger ein System von Differentialgleichungen, das alle bisher bekannten Typen von Differentialgleichungen mit festen kritischen Punkten enthält. Dabei gibt er (S. 141, 2) für die Lösungen durch einen Grenzübergang aus den Poincaréschen séries zetafuchsiennes eine andere allgemein giltige Darstellung, die aber für unsere Gleichung nur für reelle a, b, c, d in Betracht kommen würde.

diese Funktionen ganze rationale Funktionen von a, b, c, d sind. Da nun y für beliebige endliche Werte von a, b, c, d eine unbedingt konvergente Reihe ist, so sieht man, daß zunächst für hinlänglich kleine Werte von x das allgemeine Integral von (A) eine ganze transzendente Funktion von a, b, c, d wird. Mit Hilfe des Prinzips der analytischen Fortsetzung zeigt man aber leicht, daß diese Entwickelung für jeden beliebigen Wert x von T bestehen bleibt, wenn man nur die Pole von y vermeidet.

Zur Berechnung der Koeffizienten der Potenzen von a, b, c, d verfahren wir in folgender Weise: Setzt man (vgl. meine Arbeit, Math. Ann. Bd. 63, S. 310)

$$\text{(D)} \qquad u = \int_{\infty}^{y} \frac{dy}{\sqrt{\psi(y)}}, \quad \psi(y) = y(y-1)(y-x),$$

so erhält man für u die Gleichung

$$\text{(20)} \qquad x(x-1)u'' + (2x-1)u' + \frac{1}{4}u = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\psi(y)}}{x(x-1)}\left[a - \frac{bx}{y^2} + \frac{c(x-1)}{(y-1)^2} - d\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right].$$

Bezeichnet also $f(u)$ die durch Umkehrung von (D) entstehende elliptische Funktion, sind ω_1, ω_2 die beiden primitiven halben Perioden

$$\text{(21)} \qquad \omega_1 = \int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}, \quad \omega_2 = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}, \quad \psi(z) = z(z-1)(z-x)$$

und setzt man endlich

$$\text{(22)} \qquad y_1 = f(u+\omega_1) = \frac{y-x}{y-1}; \quad y_2 = f(u+\omega_2) = \frac{x}{y};$$
$$f(u+\omega_1+\omega_2) = \frac{x(y-1)}{y-x},$$

so wird

$$\text{(23)} \qquad u = -\frac{\omega_1}{2\pi i}\int_1^x P\omega_2\,dx + \frac{\omega_2}{2\pi i}\int_0^x P\omega_1\,dx + c_1\omega_1 + c_2\omega_2,$$

$$\text{(24)} \qquad P = \frac{1}{x(x-1)}\left[a\sqrt{\psi(y)} + b\sqrt{\psi(y_2)} + c\sqrt{\psi(y_1)} + d\sqrt{\psi(y_3)}\right].$$

Für $a = b = c = d = 0$ erhalten wir zunächst:

$$\text{(25)} \qquad y = \eta = f(c^1\omega^1 + c_2\omega_2).$$

Führt man entsprechend (22) noch

$$(26)\qquad \eta_1 = f[(c_1+1)\omega_1 + c_2\omega_2], \quad \eta_2 = f[c_1\omega_1 + (c_2+1)\omega_2],$$
$$\eta_3 = f[(c_1+1)\omega_1 + (c_2+1)\omega_2]$$

ein, so lassen sich die Koeffizienten aller höheren Potenzen von a, b, c, d berechnen; es ergeben sich Ausdrücke, in denen $f^{(i)}(c_1\omega_1 + c_2\omega_2)$ vorkommen, d. h. ganze rationale Funktionen von η und $\sqrt{\psi(\eta)}$, sowie vielfache Integrale zwischen den Grenzen 0 und x bzw. 1 und x, deren Integranden sich aus η_i, $\sqrt{\psi(\eta_i)}$, ω_1, ω_2 durch Addition und Multiplikation zusammensetzen. D. h. also, da η_1, η_2, η_3 einfache rationale Funktionen von η sind: die Koeffizienten berechnen sich als rationale Ausdrücke von $\eta = f(c_1\omega_1 + c_2\omega_2)$, $\sqrt{\psi(\eta)}$, ω_1, ω_2 und von Integralen, deren Integranden diese Größen wiederum rational enthalten. Diese allgemein giltige Darstellung des allgemeinen Integrals von (A) baut sich also auf die allgemeine Lösung derjenigen Gleichung auf, die man aus (A) für $a = b = c = d = 0$ erhält.

Da $f(u)$ die Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_2$ hat, wird man es stets so einrichten können, daß der reelle Teil von c_1 und c_2 zwischen -1 und $+1$ liegt. Vergleicht man nun die allgemein giltige Darstellung mit den Entwickelungen in der Umgebung von $x = 0$, $x = 1$ und $x = \infty$, so lassen sich die Konstanten dieser Entwickelungen durch c_1 und c_2 ausdrücken; man findet

$$(27)\qquad \gamma = 1 - c_2, \quad \alpha = \frac{2^{4c_2}}{4\,.\,e^{\pi i c_1 + \frac{1}{2}\int_0^1 P\omega_2\,dx}},$$

$$(28)\qquad \delta = 1 - c_1, \quad \alpha_1 = \frac{2^{4c_1}}{4\,.\,e^{\pi i c_2 + \frac{1}{2}\int_0^1 P\omega_1\,dx}},$$

$$(29)\qquad \varepsilon = 1 - c_2 + c_1 - \frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^\infty P\omega_1\,dx + \int_1^\infty P\omega_2\,dx\right],$$

$$\alpha_2 = \frac{e^{4(1-\varepsilon)}}{4\,e^{\pi i c_1 - \frac{1}{2}\int_1^\infty P\omega_2\,dx}}.$$

Es empfiehlt sich also z. B. die Exponenten γ und δ der Entwickelungen von y in der Umgebung von $x = 0$ und $x = 1$ als willkürliche Konstanten einzuführen, dann baut sich die allgemein giltige Darstellung auf $f[(1-\delta)\omega_1 + (1-\gamma)\omega_2]$ auf. Die in den Gleichungen (27) bis (29) auftretenden Integrale lassen sich nach

positiven ganzen Potenzen von a, b, c, d entwickeln, wobei sich die Koeffizienten wiederum durch $\eta = f[(1-\delta)\omega_1 + (1-\gamma)\omega_2]$ und ω_1, ω_2 berechnen lassen. Hieraus folgt nun auch, daß die Bedingung, der der reelle Teil von γ zu unterwerfen war, keine Beschränkung des Charakters als allgemeines Integral für y ergibt.

Von besonderer Wichtigkeit ist es noch, die Lage der Pole eines Integrals von (A) zu ermitteln. Hierzu kann die allgemein giltige Darstellung verwendet werden. Es erweist sich als zweckmäßig, neben y gleichzeitig y_1, y_2, y_3 (22) zu betrachten, welche Funktionen Differentialgleichungen befriedigen, die aus (A) durch gewisse Vertauschungen von a, b, c, d hervorgehen. Es zeigt sich, daß alle die Stellen, an denen eine der Funktionen die Werte $0, 1, x, \infty$ annimmt, in ganz gleichmäßiger Weise erhalten werden.

Die genaue Betrachtung von u (D) ergibt, daß an einer Stelle, an der y, y_1, y_2, y_3 einen der Werte $0, 1, x, \infty$ annehmen, u nicht nach positiven ganzen Potenzen entwickelbar sein kann. Dies würde aber eintreten, wenn nicht daselbst eine der Größen $\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ (26) gleichfalls den Wert $0, 1, x, \infty$ annehmen würde. Auf diese Weise finden wir, daß y, y_1, y_2, y_3 da und nur da die Werte $0, 1, x, \infty$ annehmen, wo bzw. $\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ dieselben Werte erhalten, daß also diese Stellen von a, b, c, d unabhängig sind.

Bezeichnet man die Modulfunktion, die x als Funktion von $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ (21) darstellt, durch

$$x = M\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right), \tag{30}$$

so berechnen sich die gewünschten Stellen durch sie in einfacher Weise. Man findet z. B. die Stellen, an denen $y = \infty$, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = x$ wird, durch

$$x = M\left(\frac{-\delta + 1 - 2g_1}{\gamma + 2g_2 - 1}\right), \tag{31}$$

wenn g_1 und g_2 beliebige positive oder negative ganze Zahlen sind, da ja $\eta = f[(1-\delta)\omega_1 + (1-\gamma)\omega_2]$ da und nur da unendlich wird, wo

$$(1-\delta)\omega_1 + (1-\gamma)\omega_2 = 2g_1\omega_1 + 2g_2\omega_2$$

wird.

Der Impuls-Energie-Satz in der Elektrodynamik von Gustav Mie.

Von

M. Born.

Vorgelegt von Herrn Hilbert in der Sitzung vom 20. Dezember 1913.

Einleitung. Die mathematische Form von Mie's elektrodynamischen Weltbilde.

Während die von H. A. Lorentz begründete Elektronentheorie bestimmte Hypothesen über die Konstitution des Elektrons nötig hat (z. B. die Hypothese der Starrheit im gewöhnlichen Sinne oder im Sinne der Relativitätstheorie), hat sich Gustav Mie[1]) die Aufgabe gestellt, Abänderungen der Maxwellschen Gleichungen derart zu versuchen, daß aus den neuen Gleichungen die Existenz von Elektronen („Knotenstellen" des Feldes), ja sogar allgemeiner die Existenz der materiellen Atome und Moleküle notwendig folgt. Daß mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen des magnetischen Feldes ohne Hinzunahme fremder Kräfte stabile Anhäufungen von Ladungen, wie sie die Elektronen darstellen, unverträglich sind, hängt eng mit dem linearen Charakter dieser Gleichungen zusammen; daher war es zunächst nötig, die Linearität aufzugeben. Mie hat diesen Gedanken wohl in der allgemeinsten und elegantesten Weise durchgeführt, die sich auf dem Boden der heutigen, aus Lagrange's analytischer Mechanik geborenen Physik denken läßt. Um die Art der Verallgemeinerung der Grundgleichungen zu veranschaulichen, knüpft man vielleicht

---

1) G. Mie, Grundlagen einer Theorie der Materie. 3 Mitteilungen in den Ann. d. Phys. (4), Bd. 37, S. 511; Bd. 39. S. 1; Bd. 40, S. 1.

am besten an die mechanischen Bewegungsgleichungen eines Massensystems von einem Freiheitsgrade q an. Bedeutet

$$\Phi(\dot{q}, q) = T - U$$

die Lagrangesche Funktion (Differenz von kinetischer und potentieller Energie), so erhält man die Bewegungsgleichung bekanntlich als Variationsableitung des Hamiltonschen Integrales

$$\int_{t_1}^{t_2} \Phi(\dot{q}, q)\, dt \tag{1}$$

in der Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0. \tag{2}$$

Den Übergang von den gewöhnlichen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes zu den Mieschen Grundgleichungen kann man dann in Parallele setzen zu dem Übergange von einem quasielastischen Systeme, wo Φ die Form $\Phi = \frac{a}{2}\dot{q}^2 + \frac{b}{2} q^2$ hat, zu einem Systeme, bei welchem Φ eine ganz beliebige Funktion von $\dot{q}$ und q ist: dabei bleibt die Form (2) der Differentialgleichung vollkommen erhalten. In der Tat läuft Mies Theorie darauf hinaus, zu zeigen, daß die Feldgleichungen der Elektronentheorie die Variationsableitungen eines mit (1) ganz analogen Variationsprinzipes, nur mit 4 Funktionen von 4 unabhängigen Variabeln, sind, wobei Φ eine bestimmte quadratische Form der Feldgrößen ist, und daß dann, genau wie oben bei dem mechanischen Beispiel, die Form der Grundgleichungen völlig erhalten bleibt, wenn Φ eine ganz beliebige Funktion der Feldgrößen wird. Man kann daher sagen, daß die Mieschen Gleichungen für die Elektrodynamik dasselbe leisten, wie die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art für die Mechanik der Punktsysteme: Sie geben ein formales Schema, das sich noch durch geeignete Wahl der Funktion Φ den speziellen Eigenschaften der Systeme anpassen läßt. Wie man früher als Ziel der mechanischen Naturerklärung hinstellte, durch Annahme einer Lagrangeschen Funktion Φ für die Wechselwirkung der Atome alle physikalischen und chemischen Eigenschaften der Materie abzuleiten, so stellt jetzt Mie die Aufgabe, seine „Weltfunktion“ Φ so zu wählen, daß daraus auf Grund seiner Differentialgleichungen sowohl die Existenz des Elektrons und der Atome, als auch die Gesamtheit ihrer Wechselwirkungen hervorgehen. Diese Forderung Mies möchte ich als den mathematischen Inhalt jenes Programmes ansehen, das

die Aufstellung eines „elektromagnetischen Weltbildes“ als Ziel der Physik hinstellt.

Im folgenden möchte ich einen Beitrag zur Aufhellung der mathematischen Struktur der Mieschen Grundgleichungen geben. Das Miesche Variationsproblem ist noch nicht das allgemeinste, welches man für ein vierdimensionales Kontinuum aufstellen kann, und man wird gut tun, es mit diesem allgemeinsten zu vergleichen, um festzustellen, welches die Eigenschaften sind, die man dem vierdimensionalen Kontinuum (dem Äther) zuschreiben muß, um gerade Mies Gesetze zu erhalten. Es wird sich zeigen, daß es nicht die Eigenschaften eines elastischen Körpers sind; die vierdimensionale, mit dem Relativitätsprinzipe verträgliche Elastizitätstheorie hat Herglotz[1]) erschöpfend behandelt, sie wird durch eine andere Spezialisierung unseres Variationsprinzips gewonnen. Vielmehr entspricht Mies vierdimensionales Kontinuum dem dreidimensionalen Äther Mac Cullagh's[2]), der aus der Annahme, daß die Wirbel des Äthers, nicht seine Deformationen, die Energie aufspeichern, Gleichungen erhielt, die mit Maxwells Gleichungen für stationäre elektrodynamische Vorgänge gleichlauten. Die Analogie der Mieschen Theorie mit der allgemeinen Mechanik von Lagrange tritt vielleicht am klarsten durch die Betrachtung des Energiesatzes hervor. Bekanntlich gibt es für ein Variationsproblem der Form (1) immer dann ein den Energiesatz ausdrückendes Integral der Differentialgleichungen (2), wenn die unabhängige Variable t in Φ nicht explicite vorkommt (t ist dann eine „zyklische Koordinate“). Dann ist nämlich

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial\Phi}{\partial q}\dot{q},$$

und wenn man hierzu die mit $\dot{q}$ multiplizierte Gleichung (2) addiert, erhält man

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}}\right); \tag{3}$$

führt man als „Energie“ die Legendresche Transformierte von Φ ein:

$$W = \Phi - \dot{q}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}},$$

so läßt sich die Gleichung (3) in der Form

1) Ann. d. Phys. (4), Bd. 36, S. 493.
2) Irish. Trans. 21.

$$\frac{dW}{dt} = 0 \text{ oder } W = \text{konst.} \tag{3'}$$

schreiben und stellt den Satz von der Erhaltung der Energie dar.

Nun gibt es auch in der Mieschen Elektrodynamik einen Satz, der als Impuls-Energie-Satz in allen neueren, auf dem Relativitätsprinzipe beruhenden dynamischen Theorien eine große Rolle spielt; der Satz besteht in 4 Gleichungen, von denen die drei ersten die Erhaltung des Impulses, die letzte die Erhaltung der Energie bedeuten. Mie gewinnt den letzten dieser Sätze durch Rechnung und die übrigen auf Grund der vom Relativitätsprinzipe geforderten Symmetrien. Ich werde im folgenden zeigen, daß diese 4 Gleichungen genaue Verallgemeinerungen der Gleichung (3) auf den Fall von 4 Variabeln sind; die Bedingung ihrer Gültigkeit ist, genau wie dort, daß die Funktion Φ die 4 unabhängigen Variabeln nicht explicite enthält, und der Beweis geschieht in genau derselben Weise, wie wir die Gleichung (3) abgeleitet haben. Dabei wird sich die Struktur der Mieschen Formeln für die Energiegrößen enthüllen, die auf den ersten Blick nicht leicht zu übersehen sind.

§ 1. Das Variatonsprinzip der Statik für ein vierdimensionales Kontinuum.

Die Deformation eines vierdimensionalen Kontinuums wird man dadurch beschreiben können, daß man die Projektionen u_1, u_2, u_3, u_4 der Verrückungen seiner Punkte auf 4 rechtwinklige Achsen als Funktionen der Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 gibt:

$$u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad \alpha = 1, \dots 4. \tag{4}$$

Wir setzen ferner zur Abkürzung

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = a_{\alpha\beta}. \tag{5}$$

Alle Eigenschaften des Kontinuums sollen nun durch Angabe einer Funktion Φ der Verrückungen u_α und ihrer Ableitungen $a_{\alpha\beta}$ festgelegt sein, und die eintretenden Deformationen sollen durch die Forderung bestimmt werden, daß die Variationsableitungen des über den vierdimensionalen Raum erstreckten Integrals

$$\int \Phi(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}; a_{21}, \dots a_{44}; u_1, \dots u_4)\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 \tag{6}$$

verschwinden.

Setzen wir nun zur Abkürzung[1])

$$(7) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial a_{\alpha\beta}} = X_{\alpha\beta}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} = X_\alpha,$$

so liefert diese Forderung die 4 Differentialgleichungen:

$$(8) \qquad \sum_\gamma \frac{\partial X_{\beta\gamma}}{\partial x_\gamma} - X_\beta = 0,$$

die die Gleichgewichtsbedingungen darstellen und der Gleichung (2) der Einleitung entsprechen.

§ 2. Erster Spezialfall des Prinzips: Herglotz' Elastizitätstheorie.

In der Relativitätstheorie bedeuten x_1, x_2, x_3 die Raumkoordinaten und x_4 die mit der imaginären Einheit i und der Lichtgeschwindigkeit c multiplizierte Zeit. Statik des vierdimensionalen Kontinuums ist dann nichts anderes als Dynamik des dreidimensionalen.

Daher muß die Elastizitätstheorie, die von Herglotz dem Relativitätsprinzipe angepaßt worden ist, als Spezialfall unseres Prinzips (6) erscheinen.

Ich will kurz angeben, in welcher Weise dabei die auftretenden Größen zu deuten sind und die Funktion Φ spezialisiert werden muß. Die unabhängigen Variabeln x_1, x_2, x_3 hat man als die Parameter ξ, η, ζ anzusehen, die in einem bestimmten Augenblicke die Lage der Körperpunkte fixieren; x_4 ist gleich $ic\tau$ zu setzen, wo τ einen „zeitartigen“ Parameter bedeutet, der im übrigen ganz willkürlich ist. u_1, u_2, u_3 bedeuten die Koordinaten x, y, z der Körperpunkte zu einer beliebigen Zeit $t = \frac{u_4}{ic}$. Dann sind offenbar die Größen $a_{\alpha\beta}$ für $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ durch die Verzerrung des Körpers bestimmt, während $\frac{a_{14}}{a_{44}}$, $\frac{a_{24}}{a_{44}}$, $\frac{a_{34}}{a_{44}}$ die Komponenten der Geschwindigkeit bedeuten. Die Funktion Φ ist nun durch die Forderung zu spezialisieren, daß das Integral (6) weder bei einer Lorentztransformation der Variabeln u_1, u_2, u_3, u_4 (Drehung des vierdimensionalen Raumes) noch bei einem Wechsel des Zeit-

---

1) Alle Indizes sollen im folgenden die Werte 1, 2, 3, 4 durchlaufen und alle Summen über diese Werte erstreckt werden.

parameters τ seinen Wert ändert. Daraus folgt dann, daß Φ nicht von allen 16 Größen $a_{\alpha\beta}$, sondern nur von 6 Verbindungen derselben, den „Ruhdeformationen“ e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{23}, e_{31}, e_{12} abhängt; diese Größen, die ich zuerst angegeben habe[1]), sind ein Maß für die von einem mitbewegten Beobachter gemessene Deformation des Volumelementes. Bei diesem Ansatze ist das Bemerkenswerteste das Fehlen der kinetischen Energie; dafür treten die Geschwindigkeiten in den Ruhdeformationen $e_{\alpha\beta}$ auf. Herglotz hat die Bewegungsgesetze, die bei dieser Deutung der Größen durch (8) geliefert werden, ausführlich untersucht und gezeigt, daß die gewöhnliche Mechanik elastischer Körper ein Grenzfall dieser Theorie ist.

§ 3. Zweiter Spezialfall des Prinzips: Mies Elektrodynamik.

Die Theorie von Mie ist ein ganz anderer Spezialfall des Variationsprinzips (6). Ehe wir auf die elektrodynamische Bezeichnung der Größen eingehen, wollen wir die charakteristische Spezialisierung der Funktion Φ angeben, die der ganzen Theorie ihr Gepräge verleiht: Φ soll nur von den Differenzen

$$a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \tag{9}$$

abhängen. Dieser Ansatz, für den dreidimensionalen Raum ausgeführt, führt genau zu der in der Einleitung erwähnten Theorie von Mac Cullagh, und man kann daher hier die Formeln in genau derselben Weise deuten, wie das dort geschieht. Die Größen (9) sind nämlich die Komponenten der infinitesimalen Drehungen der Volumelemente des Kontinuums, die „Rotationskomponenten“. Bei Mac Cullagh hängt die Energie des Äthers nur von diesen Drehungen, nicht von den Deformationen des Äthers ab; wir sehen, daß wir die Miesche Theorie in derselben Weise auffassen können, wenn wir statt Äther „vierdimensionale Welt“ sagen. Ob eine mechanische Deutung dieses Ansatzes im gewöhnlichen Sinne möglich ist, lassen wir dahingestellt und begnügen uns mit der Feststellung, daß in ihm die ganze Elektrodynamik von Mie (als Spezialfall also auch die gewöhnliche Elektronentheorie) enthalten ist.

Wenden wir uns jetzt zur physikalischen Deutung und Bezeichnung der auftretenden Größen. Bei Mie sind x_1, x_2, x_3, x_4

1) Ann. d. Phys. (4), Bd. 30, 1909, S. 1.

nichts weiter als Koordinaten und Zeit x, y, z, ict. Ferner schreibt Mie für

$$(10) \qquad \begin{matrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ f_x, & f_y, & f_z, & i\varphi. \end{matrix}$$

Diese primären Zustandsgrößen[1]) des Äthers entsprechen den Komponenten des Viererpotentials der Elektronentheorie.

Die Drehungskomponenten (9) erscheinen bei Mie als Komponenten des Sechservektors $(\mathfrak{b}, -i\mathfrak{e})$, wo $\mathfrak{b}$ die magnetische Induktion, $\mathfrak{e}$ die elektrische Feldstärke bedeuten, gemäß dem Schema

$$(11) \qquad (a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha}) = \begin{vmatrix} 0 & -\mathfrak{b}_z & \mathfrak{b}_y & i\mathfrak{e}_x \\ \mathfrak{b}_z & 0 & -\mathfrak{b}_x & i\mathfrak{e}_y \\ -\mathfrak{b}_y & \mathfrak{b}_x & 0 & i\mathfrak{e}_z \\ -i\mathfrak{e}_x & -i\mathfrak{e}_y & -i\mathfrak{e}_z & 0 \end{vmatrix}$$

Dies kann man auch so schreiben:

$$(11') \qquad (\mathfrak{b}, -i\mathfrak{e}) = \mathfrak{Rot}(f, i\varphi)$$

oder

$$(11'') \qquad \mathfrak{b} = \operatorname{rot} f, \qquad \mathfrak{e} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Mit diesen Zeichen erscheint Φ als Funktion der Komponenten der Vektoren $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$, f und des Skalars φ:

$$(6') \qquad \Phi(\mathfrak{b}_x, \mathfrak{b}_y, \mathfrak{b}_z, \mathfrak{e}_x, \mathfrak{e}_y, \mathfrak{e}_z; f_x, f_y, f_z, \varphi),$$

worin die Grundannahme, daß Φ nur von den Drehungen $a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha}$ abhängt, zum Ausdrucke kommt. Gleichzeitig ist nun aber darin auch enthalten, daß die Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b}$ das eine Quadrupel der

---

1) In dieser Darstellung müßten die f_x, f_y, f_z, φ als „Quantitätsgrößen" bezeichnet werden, da sie den Charakter von Verschiebungskomponenten des vierdimensionalen Kontinuums haben; die sogleich zu definierenden $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$ würden dann als „Intensitätsgrößen" einzuführen sein. Daß Mie hier wie bei der Einteilung der Feldvektoren in Quantitäts- und Intensitätsgrößen gerade umgekehrt verfährt, liegt daran, daß seine Bezeichnungsweise sich der physikalischen Anschauung von elektrischer Dichte, Verschiebung, Feldstärke u. s. w. besser anschließt; auch verwendet Mie zumeist ein anderes Variationsprinzip, das aus dem unseren durch eine Legendresche Transformation hervorgeht und jene Einteilung der Größen nahe legt. Da aber Mies Variationsprinzipe Nebenbedingungen brauchen und sich nicht ohne weiteres in das Schema der Statik des vierdimensionalen Kontinuums einordnen lassen, habe ich den hier eingeschlagenen Weg vorgezogen.

Maxwellschen Gleichungen erfüllen, welches lautet:

(12) $$\mathrm{Div}(\mathfrak{b}, -i\mathfrak{e}) = 0$$

oder

(12′) $$\mathrm{rot}\,\mathfrak{e} + \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\mathfrak{b} = 0;$$

denn diese Gleichungen folgen unmittelbar aus (11′) bezw. (11″). Die Differentialgleichungen (8) aber sind nichts anderes als das zweite Quadrupel der Maxwellschen Gleichungen; um dies zu zeigen, setzen wir mit Mie:

(13) $$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{b}_x} &= \mathfrak{h}_x, & \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{e}_x} &= -\mathfrak{d}_x, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{b}_y} &= \mathfrak{h}_y, & \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{e}_y} &= -\mathfrak{d}_y, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{b}_z} &= \mathfrak{h}_z, & \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{e}_z} &= -\mathfrak{d}_z, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{b}_x} = -\mathfrak{v}_x, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial f_y} = -\mathfrak{v}_y, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial f_z} = -\mathfrak{v}_z, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \varrho.$$

Dann werden die 4 Größen X_α der allgemeinen Theorie mit den Größen $-\mathfrak{v}_x$, $-\mathfrak{v}_y$, $-\mathfrak{v}_z$, $-i\varrho$ identisch und die 16 Größen $X_{\alpha\beta}$ mit den Komponenten der Vektoren $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{d}$, in der Weise, wie es die Matrizengleichung

(14) $$(X_{\alpha\beta}) = \left| \begin{array}{cccc} 0 & -\mathfrak{h}_z & \mathfrak{h}_y & i\mathfrak{d}_x \\ \mathfrak{h}_z & 0 & -\mathfrak{h}_x & i\mathfrak{d}_y \\ -\mathfrak{h}_y & \mathfrak{h}_x & 0 & i\mathfrak{d}_z \\ -i\mathfrak{d}_x & -i\mathfrak{d}_y & -i\mathfrak{d}_z & 0 \end{array} \right|$$

veranschaulicht. Mit diesen Zeichen gehen die Gleichungen (8) über in

(15) $$\mathrm{Div}(\mathfrak{h}, -i\mathfrak{d}) = (\mathfrak{v}, i\varrho)$$

oder

(15′) $$\mathrm{rot}\,\mathfrak{h} - \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} = \mathfrak{v}, \qquad \mathrm{div}\,\mathfrak{d} = \varrho.$$

Hieraus erkennt man, daß ϱ die Dichte der elektrischen Ladung, $\mathfrak{v}$ den Konvektionsstrom (Ladung mal Geschwindigkeit), $\mathfrak{h}$ die magnetische Feldstärke, $\mathfrak{d}$ die elektrische Erregung bedeuten. Wir sehen also, daß diese Größen nach dem Schema (14) im Bilde der

Statik des vierdimensionalen Kontinuums den Spannungen und Kräften entsprechen.

Aus (15) ergibt sich als Folgerung die Kontinuitätsgleichung der elektrischen Strömung

(16) $$\mathrm{Div}\,(\mathfrak{v},\ i\varrho) = 0$$

oder

(16′) $$\mathrm{div}\ \mathfrak{v} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0.$$

Bei alledem ist Φ noch eine willkürliche Funktion ihrer 10 Argumente. Wir sehen, daß die Maxwellschen Gleichungen (12) und (15) formal für jede beliebige Funktion Φ gelten.

Will man nun aber das Relativitätsprinzip aufrecht erhalten, so muß die Wahl von Φ eingeschränkt werden. Φ darf dann offenbar nicht explizite von allen 10 Argumenten abhängen, sondern nur von solchen Verbindungen derselben, die gegen Lorentztransformationen invariant sind. Mie hat gezeigt, daß es vier solche Invarianten gibt, die von einander unabhängig sind. In unserer Darstellung könnten wir etwa folgende 4 Invarianten wählen:

1) Die Länge des Vierervektors $(f,\ i\varphi)$

$$\chi = \sqrt{\varphi^2 - f^2},$$

2) Der absolute Betrag des Sechservektors $(\mathfrak{b},\ -i\mathfrak{e})$:

$$\eta = \sqrt{\mathfrak{e}^2 - \mathfrak{b}^2},$$

3) Das skalare Produkt des Sechservektors $(\mathfrak{b},\ -i\mathfrak{e})$ mit seinem dualen Vektor $(-i\mathfrak{e},\ \mathfrak{b})$:

$$\varkappa = (\mathfrak{b}\,\mathfrak{e})$$

4) Als Simultaninvariante des Vierervektors und Sechservektors kann man den Betrag desjenigen Vierervektors nehmen, den man durch Multiplikation der beiden ursprünglichen Vektoren erhält:

$$\lambda^2 = ([f\mathfrak{b}] + \varphi\,\mathfrak{e})^2 - (f\mathfrak{e})^2.$$

Φ kann als Funktion dieser 4 Argumente noch willkürlich gewählt werden.

Die Theorie von Mie stellt dann als Ziel der physikalischen Forschung auf, durch geeignete Wahl der Funktion von 4 Argu-

menten $\Phi(\chi, \eta, \varkappa, \lambda)$ allen elektromagnetischen Eigenschaften[1]) der Elektronen und Atome gerecht zu werden.

Wir haben darin die gerade Fortführung von Lagranges großartigem Programme.

Die gewöhnliche Elektronentheorie ist formal ein Spezialfall der Mieschen Theorie, aber nicht in strengem Sinne. Allerdings erhält man ihre Feldgleichungen, indem man einfach setzt:

$$\Phi = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{e}^2) - (\mathfrak{f}\mathfrak{v}) + \varphi\varrho, \tag{17}$$

wobei $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$ und ϱ als gegebene Funktionen des Ortes und der Zeit anzusehen sind, die die Bewegungen der Elektronen angeben.

Aber dann ist eben Φ nicht mehr eine Funktion der 4 Invarianten $\chi, \eta, \varkappa, \lambda$ allein, sondern hängt noch explizite von x, y, z, t ab; gerade das aber schließt Mies Theorie prinzipiell aus. Bei Mie sollen eben die Kräfte, die Elektronen und Atome zusammenhalten, aus dem Ansatze für Φ selbst hervorgehen, während in der gewöhnlichen Elektronentheorie diese Kräfte besonders hinzugefügt werden müssen.

§ 4. Der Impuls-Energiesatz für den allgemeinen Fall des vierdimensionalen Kontinuums.

Die soeben hervorgehobene Annahme Mies, daß die Funktion Φ von x, y, z, t unabhängig ist, ist auch der wahre mathematische Grund für die Gültigkeit des Impuls-Energie-Satzes.

Um das zu zeigen, betrachten wir zunächst wie in § 1 ein allgemeines vierdimensionales Kontinuum, dessen Gleichgewicht durch die Gleichungen (8) bestimmt ist. Wir behaupten, daß für diese Differentialgleichungen immer dann ein dem Energiesatze (3′) der Lagrangeschen Mechanik analoger Satz gilt, sobald eine der 4 Koordinaten, x_α, in Φ nicht explizite vorkommt.

Dann erhält man nämlich durch Differentiation von Φ nach x_α:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} = \sum_{\beta, \gamma} X_{\beta\gamma} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma} + \sum_\beta X_\beta \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha},$$

und wenn man nun die mit den Größen $\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$ multiplizierten Gleichungen (8) zu dieser Gleichung addiert, so bekommt man:

1) Von der Gravitation sehen wir hierbei ab.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} = \sum_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (\sum_\beta X_{\beta\gamma} a_{\beta\alpha}). \tag{18}$$

Das ist die dem Energiesatze der Mechanik entsprechende Formel. Ist Φ von allen 4 Koordinaten x_α unabhängig, so gilt (18) für $\alpha = 1, 2, 3, 4$; diese 4 Gleichungen sind als der Impuls-Energiesatz zu bezeichnen. Man kann sie in die symbolische Gleichung

$$\operatorname{Div} T = 0 \tag{18'}$$

zusammenfassen, wenn die 16 Komponenten $T_{\alpha\beta}$ der Matrix T durch

$$T_{\alpha\beta} = \Phi\, \delta_{\alpha\beta} - \sum_\gamma a_{\gamma\alpha} X_{\gamma\beta} \tag{19}$$

definiert werden, wobei

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \text{ für } \alpha = \beta \\ 0 \text{ für } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

gesetzt ist. Im Matrizenkalkül kann man (19) so schreiben:

$$T = \Phi - \bar{a} X, \tag{19'}$$

wo $\bar{a} = (a_{\beta\alpha})$ die zu $a = (a_{\alpha\beta})$ transponierte Matrix bedeutet[1]).

§ 5. Spezielle Form des Impuls-Energie-Satzes für den Fall der Mieschen Elektrodynamik.

Die von Mie als Impuls-Energie-Satz bezeichneten Gleichungen sind nun wesentlich nichts anderes als die allgemeinen Gleichungen (18) bezw. (18'); eine mathematisch geringfügige Umformung führt zu den Formeln Mies. Um zu sehen, warum diese Umformung erforderlich ist, betrachten wir den Energie-Spannungstensor T, am besten in der kurzen symbolischen Form (19'). Erinnern wir uns an die elektrodynamische Bedeutung der Größen $a_{\alpha\beta}$ und $X_{\alpha\beta}$ (Formeln (11) und (14)), so sehen wir, daß sich zwar die Größen $X_{\alpha\beta}$ direkt durch die Komponenten der Feldvektoren ausdrücken lassen, nicht aber die Größen $a_{\alpha\beta}$; vielmehr haben nur die Verbindungen $a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha}$, deren Matrix mit $a - \bar{a}$ zu bezeichnen ist, eine physikalische Bedeutung. Daher werden wir die Gleichung (19') so umzuformen haben, daß sie die Differenzenmatrix $\alpha - \bar{a}$ enthält.

---

1) Das Produkt zweier Matrizen ist die Matrix, bei der das Element mit den Indizes α, β durch Multiplikation der α-ten Zeile der ersten Matrix mit der β-ten Kolonne der zweiten entsteht.

Wir dürfen natürlich nicht einfach aX zu T hinzufügen, denn dadurch würde die Gültigkeit von (18') aufgehoben werden. Wohl aber kann man versuchen, ob man eine Matrix ψ so bestimmen kann, daß für die Matrix

(20) $$S = \Phi + (a - \bar{a}) X + \psi$$

die Divergenzgleichung (18') erhalten bleibt; bezeichnen wir die hinzugefügte Matrix $\psi + aX$ mit ω, sodaß $S = T + \omega$ ist, so haben wir also zu fordern, daß

(21) $$\operatorname{Div} \omega = 0$$

ist.

Wir zeigen nun, daß (21) durch die Matrix

(22) $$\psi_{\alpha\beta} = - u_\alpha X_\beta$$

erfüllt wird unter der Voraussetzung, daß die Matrix X alternierend ist:

(23) $$X_{\alpha\beta} = - X_{\beta\alpha}, \text{ oder } X = - \bar{X}.$$

Dann ist nämlich wegen (8)

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta} &= \sum_\gamma a_{\alpha\gamma} X_{\gamma\beta} - u_\alpha X_\beta \\ &= \sum_\gamma \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\gamma} X_{\gamma\beta} + u_\alpha \frac{\partial X_{\gamma\beta}}{\partial x_\gamma} \right) \\ &= \sum_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (u_\alpha X_{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

und bei nochmaliger Anwendung von (23)

$$\sum_\beta \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \sum_{\beta\gamma} \frac{\partial^2 u_\alpha X_{\gamma\beta}}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} = - \sum_{\beta\gamma} \frac{\partial^2 u_\alpha X_{\gamma\beta}}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} = 0;$$

d. h. (21) ist erfüllt.

Die Bedingung (23) ist nun in der Mieschen Theorie gerade erfüllt wegen der Voraussetzung, daß Φ nur von den Differenzen $a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha}$ abhängt, wie ein Blick auf das Schema (14) lehrt; also kann man den Impuls-Energiesatz in der Form

(24) $$\operatorname{Div} S = 0$$

schreiben, wo S durch (20) und (22) definiert ist.

In dieser Gestalt ist die mathematische Struktur des Satzes äußerst durchsichtig.

Führen wir die elektromagnetischen Bezeichnungen ein, so lautet die Matrizengleichung (20)

$$
(20') \qquad S = \begin{vmatrix} \Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\mathfrak{b}_z & \mathfrak{b}_y & ie_x \\ \mathfrak{b}_z & 0 & -\mathfrak{b}_x & ie_y \\ -\mathfrak{b}_z & \mathfrak{b}_x & 0 & ie_z \\ -ie_x & -ie_y & -ie_z & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{h}_z & \mathfrak{h}_y & i\mathfrak{d}_x \\ \mathfrak{h}_z & 0 & -\mathfrak{h}_x & i\mathfrak{d}_y \\ -\mathfrak{h}_y & \mathfrak{h}_x & 0 & i\mathfrak{d}_z \\ -i\mathfrak{d}_x & -i\mathfrak{d}_y & -i\mathfrak{d}_z & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
+ \begin{vmatrix} f_x \mathfrak{v}_x & f_x \mathfrak{v}_y & f_x \mathfrak{v}_z & i f_x \varrho \\ f_y \mathfrak{v}_x & f_y \mathfrak{v}_y & f_y \mathfrak{v}_z & i f_y \varrho \\ f_z \mathfrak{v}_x & f_z \mathfrak{v}_y & f_z \mathfrak{v}_z & i f_z \varrho \\ i\varphi \mathfrak{v}_x & i\varphi \mathfrak{v}_y & i\varphi \mathfrak{v}_z & -\varphi\varrho \end{vmatrix}
$$

oder ausmultipliziert:

$$
(20'') \qquad S = \left| \begin{matrix} \Phi - \mathfrak{b}_y \mathfrak{h}_y - \mathfrak{b}_z \mathfrak{h}_z + \mathfrak{e}_x \mathfrak{d}_x + f_x \mathfrak{v}_x, & \mathfrak{e}_x \mathfrak{d}_y + \mathfrak{h}_x \mathfrak{b}_y + f_x \mathfrak{v}_y, \\ \mathfrak{e}_y \mathfrak{d}_x + \mathfrak{h}_y \mathfrak{b}_x + f_y \mathfrak{v}_x, & \Phi - \mathfrak{b}_z \mathfrak{h}_z - \mathfrak{b}_x \mathfrak{h}_x + \mathfrak{e}_y \mathfrak{d}_y + f_y \mathfrak{v}_y, \\ \mathfrak{e}_z \mathfrak{d}_x + \mathfrak{h}_z \mathfrak{b}_x + f_z \mathfrak{v}_x, & \mathfrak{e}_z \mathfrak{d}_y + \mathfrak{h}_z \mathfrak{b}_y + f_z \mathfrak{v}_y, \\ -i(\mathfrak{e}_y \mathfrak{h}_z - \mathfrak{e}_z \mathfrak{h}_y - \varphi \mathfrak{v}_x), & -i(\mathfrak{e}_z \mathfrak{h}_x - \mathfrak{e}_x \mathfrak{h}_z - \varphi \mathfrak{v}_y), \end{matrix} \right.
$$

$$
\left. \begin{matrix} \mathfrak{e}_x \mathfrak{d}_z + \mathfrak{h}_x \mathfrak{b}_z + f_x \mathfrak{v}_z, & -i(\mathfrak{d}_y \mathfrak{b}_z - \mathfrak{d}_z \mathfrak{b}_y - \varrho f_x) \\ \mathfrak{e}_y \mathfrak{d}_z + \mathfrak{h}_y \mathfrak{b}_z + f_y \mathfrak{v}_z, & -i(\mathfrak{d}_z \mathfrak{b}_x - \mathfrak{d}_x \mathfrak{b}_z - \varrho f_y) \\ \Phi - \mathfrak{b}_x \mathfrak{h}_x - \mathfrak{b}_y \mathfrak{h}_y + \mathfrak{e}_z \mathfrak{d}_z + f_z \mathfrak{v}_z, & -i(\mathfrak{d}_x \mathfrak{b}_y - \mathfrak{d}_y \mathfrak{b}_x - \varrho f_z) \\ -i(\mathfrak{e}_x \mathfrak{h}_y - \mathfrak{e}_y \mathfrak{h}_x - \varphi \mathfrak{v}_z), & \Phi + \mathfrak{e}_x \mathfrak{d}_x + \mathfrak{e}_y \mathfrak{d}_y + \mathfrak{e}_z \mathfrak{d}_z - \varphi\varrho \end{matrix} \right|
$$

Dies ist genau die von Mie angegebene Energie-Spannungsmatrix.

Mie hat dann gezeigt, daß diese symmetrisch ist, sobald Φ nur von den 4 Invarianten χ, η, $\varkappa$, λ abhängt; dieser Beweis, der durch eine einfache Rechnung geführt wird, läßt sich durch unsere Darstellungsweise nicht wesentlich vereinfachen.

Es ist vielleicht nicht überflüssig hervorzuheben, daß der Energie-Impulssatz der gewöhnlichen Elektronentheorie nicht etwa als Spezialfall dadurch herauskommt, daß man in (20″) für Φ den Ansatz (17) macht; denn dann ist Φ nicht von x, y, z, t unabhängig, da $\mathfrak{v}$ und ϱ von Ort und Zeit abhängen, und damit wird unsere Beweisführung hinfällig. Man kann auch durch Einsetzen des Ansatzes (17) in (24) leicht sehen, daß das Resultat von dem Energie-Impuls-Satze der gewöhnlichen Elektronentheorie abweicht; fügt man aber zu (24) die Glieder hinzu, die beim Differenzieren von (17) nach x, y, z, t aus der Abhängigkeit von $\mathfrak{v}$ und ϱ entstehen und die sich nicht in die Form einer vierdimensionalen Di-

vergenz schreiben lassen, so bekommt man den Energie-Impuls-Satz der Elektronentheorie in der gewöhnlichen Form. Bezüglich der entsprechenden Frage in der elektrodynamischen Theorie bewegter materieller Körper ist dasselbe zu sagen: keiner der vorhandenen Ansätze für die Energie-Spannungs-Matrix, weder der unsymmetrische von Minkowski, noch der symmetrische von Abraham und Laue fallen unmittelbar unter das Miesche Schema; doch läßt sich auch hier dieselbe Methode anwenden.

Über das Gleichgewicht rechteckiger Platten.

Von

Hans Happel.

Vorgelegt in der Sitzung am 10. Januar 1914 durch Herrn C. Runge.

§ 1. Das Gleichgewicht von elastischen rechteckigen Platten ist in den letzten Jahren verschiedentlich Gegenstand von mathematischen Untersuchungen gewesen. Wir erinnern hier nur an die interessanten Arbeiten von W. Ritz[1]) und G. Lauricella[2]). In der Abhandlung von Ritz wird angenommen, daß die Platte am Rande überall eingeklemmt ist und daß auf ihrer ganzen Oberfläche ein Druck lastet, der eine beliebige Funktion von xy bezw. konstant ist. Lauricella setzt voraus, daß auf der Platte kein Druck lastet, daß aber der Rand in vorgeschriebener Weise deformiert ist. Der Fall, wo die Platte nur eine Einzellast trägt, ist bis jetzt noch nicht behandelt worden.

Wir wollen daher hier das folgende Problem behandeln: Eine ursprünglich ebene rechteckige am Rande überall eingeklemmte Platte mit den Seiten a und b ist in der Mitte mit dem Gewicht P belastet, während an den übrigen Stellen der Oberfläche keine Kräfte angreifen. Gesucht wird der Gleichgewichtszustand der Platte, also die Deformation der Mittelebene.

Das Koordinatensystem xy nehmen wir in derjenigen Ebene an, die die Mittelebene der Platte im unbelasteten Zustand ist und zwar möge dabei der Ursprung in den Mittelpunkt fallen und die x- und y-Axe parallel mit den Rändern sein, und zwar wird die x-Axe senkrecht zu den Seiten von der Länge b angenommen. Die positive z-Axe verlaufe nach unten.

---

1) W. Ritz, Journal f. reine u. angew. Mathematik, 135, p. 1, 1909.

2) G. Lauricella, Acta mathematica, 32, p. 201, 1909.

Bezeichnet man mit w die gesuchte Verrückung eines beliebigen Punktes der Mittelebene, so ist bekanntlich die gestellte Aufgabe mit dem folgenden mathematischen Problem identisch: Man soll die Funktion w bestimmen, die innerhalb der Platte, jedoch mit Ausnahme des Mittelpunktes und seiner nächsten Umgebung der Gleichung

$$1) \qquad \Delta\Delta w = 0$$

genügt, während w am Rande die beiden Bedingungen

$$2) \qquad w = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dw}{dn} = 0$$

zu erfüllen hat, wobei n die innere Normale sein soll. Bezeichnet man mit p die auf die Flächeneinheit bezogene Druckkraft, die im Mittelpunkt bezw. an einer beliebigen Stelle in nächster Nähe des Mittelpunktes herrscht, so gilt für diese Stelle bekanntlich die Gleichung

$$\frac{4}{3} Kh^3 \frac{1+2\theta}{1+\theta} \Delta\Delta w = p,$$

wobei $2h$ die Dicke der Platte ist und K und θ die Elastizitätskonstanten in Kirchhoffscher Bezeichnungsweise sind. Da nun das Gewicht P, das auf einem sehr kleinen den Mittelpunkt umschliessenden Flächenstück f lastet, gleich $\iint_f p\,dxdy$ ist, wobei die Integration über f zu erstrecken ist, so hat w im Mittelpunkte der Gleichung

$$3) \qquad \frac{4}{3} Kh^3 \frac{1+2\theta}{1+\theta} \iint_f \Delta\Delta w\,dxdy = P$$

zu genügen.

Zur Lösung unseres Problems erwähnen wir zunächst den folgenden Hilfssatz: Es sei $n(x, y)$ eine Funktion, die innerhalb eines beliebigen Bereichs B der Gleichung $\Delta w = 0$ genügt. Ferner sei x_1, y_1 ein beliebiger aber fester Punkt innerhalb B, während xy einen variabeln Punkt im Innern von B darstelle. Setzt man noch

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2,$$

so genügt der Ausdruck

$$4) \qquad r^2 n(x, y)$$

innerhalb B der Gleichung 1). Der Beweis dieses Hilfssatzes ergibt sich leicht durch Einsetzen von 4) in 1), wobei nur zu beachten ist, daß Δn identisch verschwindet.

Es sei nun $G(xy;\,0,0)$ die zur ersten Randwertaufgabe gehörige Greensche Funktion des Rechtecks; d. h. G soll im Innern des Rechtecks der Gleichung $\Delta G = 0$ genügen, ferner soll, wenn die Entfernung r zwischen xy und dem Koordinatenursprung, also dem Punkte 0, 0 verschwindet, G unendlich werden wie $l(r)$ und endlich soll am Rand G verschwinden. Auf Grund unseres Hilfssatzes stellt dann die Funktion

$$5)\qquad r^2 G(xy;\,0,0) \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

eine Lösung von 1) dar, die außerdem noch am Rande verschwindet, also die erste Grenzbedingung erfüllt, während die zweite noch nicht befriedigt wird.

Um nun auch der zweiten Grenzbedingung zu genügen, fügen wir zu 5) noch eine Funktion $F(xy)$ additiv hinzu, wir bilden also die Funktion

$$6)\qquad r^2 G(xy;\,0,0) + F(xy).$$

Dabei soll F innerhalb des Rechtecks und zwar auch im Mittelpunkt ebenfalls der Gleichung 1) genügen. Ferner soll F am Rande gleichfalls verschwinden und endlich soll die normale Ableitung von F der Gleichung

$$7)\qquad \frac{\partial r^2 G}{\partial n} + \frac{\partial F}{\partial n} = 0$$

genügen, wobei sich der Wert von $\frac{\partial r^2 G}{\partial n}$ leicht ergibt, nachdem G gefunden ist.

Ist F in dieser Weise bestimmt, so genügt die Funktion 6) ebenfalls der Gleichung 1) und den 2 Randbedingungen, während 3) noch nicht erfüllt sein wird. Um endlich auch 3) noch zu befriedigen, multiplizieren wir 6) noch mit A, wobei A eine Konstante ist, wir bilden also die Funktion

$$8)\qquad w = A\,\{r^2 G(xy;\,0,0) + F(xy)\}. \qquad r = x^2 + y^2$$

Durch passende Wahl von A und infolge der Unstetigkeit der Funktion G für $x = y = 0$ läßt es sich dann erreichen, daß 3) erfüllt ist und alsdann genügt die Funktion 8) allen Anforderungen und ist also mit der genannten Funktion w identisch.

§ 2. Für das Rechteck ist die Greensche Funktion zuerst von Kneser[1]) aufgestellt worden und zwar gleich für den allgemeinen

1) A. Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, 1911, p. 137. Wie Herr Prof. Maurer mir mitteilte, beschäftigt sich auch E. B. Christoffel mit der Ermittelung der Greenschen Funktion des Rechtecks in der Abhandlung: Sul problema della temperature stationarie etc. Werke Bd. 1.

Fall, wo der feste Punkt der Greenschen Funktion ein beliebiger Punkt innerhalb des Rechtecks ist. Es sei hier erwähnt, daß die Knesersche Definition der Greenschen Funktion sich von der unsrigen um einen konstanten Faktor unterscheidet, was natürlich völlig belanglos ist. Um die Funktion G, also die Greensche Funktion in unserm Sinne zu erhalten, haben wir die Greensche Funktion im Kneserschen Sinn noch mit -2π zu multiplizieren. Berücksichtigt man dies, und beachtet man ferner unsere Wahl des Koordinatensystems und außerdem, daß bei uns der feste Punkt mit dem Anfangspunkt identisch ist, so ergibt sich nach Kneser:

9)
$$\begin{aligned} G(x,y;0,0) = -\frac{8}{ab\pi}\Bigg\{ &\cos\frac{\pi y}{b}\left[\frac{\cos\frac{\pi x}{a}}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}} + \frac{\cos\frac{3\pi x}{a}}{\frac{1}{b^2}+\frac{3^2}{a^2}} + \frac{\cos\frac{5\pi x}{a}}{\frac{1}{b^2}+\frac{5^2}{a^2}} + \cdots\right] \\ &+ \cos\frac{3\pi y}{b}\left[\frac{\cos\frac{\pi x}{a}}{\frac{3^2}{b^2}+\frac{1}{a^2}} + \frac{\cos\frac{3\pi x}{a}}{\frac{3^2}{b^2}+\frac{3^2}{a^2}} + \frac{\cos\frac{5\pi x}{a}}{\frac{3^2}{b^2}+\frac{5^2}{a^2}} + \cdots\right] \\ &+ \cos\frac{5\pi y}{b}\left[\frac{\cos\frac{\pi x}{a}}{\frac{5^2}{b^2}+\frac{1}{a^2}} + \frac{\cos\frac{3\pi x}{a}}{\frac{5^2}{b^2}+\frac{3^2}{a^2}} + \frac{\cos\frac{5\pi x}{a}}{\frac{5^2}{b^2}+\frac{5^2}{a^2}} + \cdots\right] \\ &+ \cdots\cdots\cdots \Bigg\} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck läßt sich, wie Kneser ebenfalls zeigt, für positives x auch so schreiben:

10)
$$\begin{aligned} G(x,y;0,0) = -4\Bigg\{ &\cos\frac{\pi y}{b}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\frac{a}{b}}{1\cdot\mathfrak{Sin}\,\pi\frac{a}{b}}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{b}\left(\frac{a}{2}-x\right) \\ &+ \cos\frac{3\pi y}{b}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,3\frac{\pi}{2}\frac{a}{b}}{3\,\mathfrak{Sin}\,3\pi\frac{a}{b}}\,\mathfrak{Sin}\,3\frac{\pi}{b}\left(\frac{a}{2}-x\right) \\ &+ \cos\frac{5\pi y}{b}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,5\frac{\pi}{2}\frac{a}{b}}{5\,\mathfrak{Sin}\,5\pi\frac{a}{b}}\,\mathfrak{Sin}\,5\frac{\pi}{b}\left(\frac{a}{2}-x\right) \\ &+ \cdots\cdots\cdots \Bigg\} \end{aligned}$$

Wie Kneser zeigt, konvergiert die Reihe 9) stets gleichmäßig, falls die Punkte xy und $0, 0$ um ein endliches Stück, das aber beliebig klein sein darf, entfernt sind. Die Reihe 10) konvergiert sicher dann gleichmäßig, falls x um ein endliches Stück, das wiederum beliebig klein sein darf, größer als Null ist.

Um $F(x, y)$ zu bilden, brauchen wir wegen 7) den Wert von $\frac{\partial (x^2+y^2)\, G}{\partial n}$ längs des Randes. Für $x = +\frac{a}{2}$ hat man, da $G = 0$ ist für den Rand und n die innere Normale darstellt:

$$\frac{\partial r^2 G}{\partial n} = -\frac{\partial r^2 G}{\partial x} = -r^2 \frac{\partial G}{\partial x} \qquad \text{für } x = +\frac{a}{2}$$

oder nach 10)

$$11) \quad \frac{\partial r^2 G}{\partial x} = +\frac{4\pi}{b}\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)\left\{\cos\frac{\pi y}{b}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\frac{a}{b}}{\mathfrak{Sin}\,\pi\frac{a}{b}} + \cos\frac{3\pi y}{b}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{3\pi}{2}\frac{a}{b}}{\mathfrak{Sin}\,3\pi\frac{a}{b}} + \cdots\right\}$$

$$\text{für } x = +\frac{a}{2}.$$

Die für $x > 0$ durch gliedweise Differentiation von $r^2 G$ nach x erhaltene Reihe und daher auch die Reihe 11) konvergiert für jedes y gleichmäßig und absolut, wie man leicht einsieht, daher ist die bei der Bildung von 11) angewandte gliedweise Differentiation gestattet. Analog berechnen sich die Differentialquotienten von $r^2 G$ nach der Normale längs der übrigen Seiten des Rechtecks.

§ 3. Für das Folgende ist es nötig den Ausdruck 11), der noch den Faktor $\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)$ enthält, in eine Fouriersche Reihe zu entwickeln. Aus einem Grunde, der bald (s. p. 52) ersichtlich sein wird, wollen wir haben, daß in dieser Fourierschen Reihe geradeso wie in der in 11) bereits vorkommenden Reihe nur die ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi y}{b}$ auftreten; die Periode der Reihe ist $y = 2b$, also doppelt so groß wie die Rechteckseite. Um die geraden Vielfachen von $\frac{\pi y}{b}$ zum Verschwinden zu bringen, ist zu beachten, daß für unsere Aufgabe nur die Entwickelung längs der Rechteckseite, also für das Intervall $-\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}$ in Betracht kommt. Daher dürfen wir außerhalb dieses Intervalls die zu entwickelnde Funk-

tion 11) abändern. Die Abänderung soll darin bestehen, daß wir den Faktor $\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)$

$$\text{für } +\frac{b}{2}\leqq y\leqq b \text{ durch } \frac{a^2}{4}+(y-b)^2$$

und für $-b\leqq y\leqq-\frac{b}{2}$ durch $\frac{a^2}{4}+(y+b)^2=\frac{a^2}{4}+(-|y|+b)^2$

ersetzen. Für $-\frac{b}{2}<y<+\frac{b}{2}$ darf natürlich an 11) nichts geändert werden. Zeichnen wir den Verlauf von $\frac{a^2}{4}+y^2$ für $-\frac{b}{2}<y<\frac{b}{2}$, so ergibt sich für die 2 angrenzenden Intervalle der Verlauf des zugehörigen Ersatzfaktors durch Spiegelung an der zu $y=+\frac{b}{2}$ bezw. $y=-\frac{b}{2}$ gehörigen Ordinate. Wir denken uns nun 11) außerhalb der Rechteckseite in der angegebenen Weise modifiziert und entwickeln alsdann 11) in eine Fouriersche Reihe. Daß dabei infolge der erwähnten Modifikation nur die ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi y}{b}$ vorkommen, ergibt sich aus dem Folgenden.

Setzt man

$$\frac{\pi y}{b}=z$$

so folgt, vorausgesetzt, daß die Entwickelung in eine Fouriersche Reihe gestattet ist:

$$12)\quad \frac{\partial r^3 G}{\partial x}=\frac{1}{2}A_0+\sum\nolimits^q A_q\cos qz=\frac{1}{2}A_0+\sum\nolimits^q A_q\cos q\frac{\pi y}{b},$$

wobei, falls l die Zahlen 1, 3, 5 ... durchläuft:

$$13)\quad A_0=\frac{4}{b}\sum\nolimits^l\frac{\mathfrak{Sin}\, l\frac{\pi}{2}\frac{a}{b}}{\mathfrak{Sin}\, l\pi\frac{a}{b}}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2(z+\pi)^2}{\pi^2}\right)\cos lz\,dz\right.$$
$$\left.+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2z^2}{\pi^2}\right)\cos lz\,dz+\int_{+\frac{\pi}{2}}^{+\pi}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2(z-\pi)^2}{\pi^2}\right)\cos lz\,dz\right\}$$

$$A_q = \frac{4}{b}\Sigma^l \frac{\mathfrak{Sin}\, l\frac{\pi}{2}\frac{a}{b}}{\mathfrak{Sin}\, l\pi\frac{a}{b}}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2(z+\pi)^2}{\pi^2}\right)\cos lz\cos qz\,dz\right.$$

13) $$+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2z^2}{\pi^2}\right)\cos lz\cos qz\,dz$$

$$\left.+\int_{+\frac{\pi}{2}}^{+\pi}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2(z-\pi)^2}{\pi^2}\right)\cos lz\cos qz\,dz\right\}.$$

Da 11) gleichmäßig konvergiert, so ist die in 13) angewandte gliedweise Integration gestattet, vorausgesetzt, daß die Entwickelung 12) giltig ist.

Es ist leicht einzusehen, daß alle A mit geradem Index, also A_0, A_2, A_4, ... verschwinden. Da nämlich l nur ungerade Werte annimmt, so hat man

$$\cos lz = -\cos l(\pi + z).$$

Mithin ist in der ersten Gleichung 13) die Summe vom ersten und letzten Integral entgegengesetzt gleich dem zweiten; d. h. es ist $A_0 = 0$. Nehmen wir nun an, daß q eine gerade Zahl ist, so hat man:

$$\cos lz\cos qz = -\cos l(\pi+z)\cos q(\pi+z).$$

Es verschwinden daher alle A_q mit geraden q, und in der Entwickelung 12) treten nur die ungeraden Vielfachen von z auf.

Für ein ungerades q ist in der zweiten Gleichung 13) die Summe vom ersten und dritten Integral ebenso groß wie das zweite. Daher gilt für ungerades q

14) $$A_q = \frac{8}{b}\Sigma^l \frac{\mathfrak{Sin}\, l\frac{\pi}{2}\frac{a}{b}}{\mathfrak{Sin}\, l\pi\frac{a}{b}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2z^2}{\pi^2}\right)\cos lz\cos qz\,dz.$$

Zur Berechnung der in 14) auftretenden Integrale fassen wir für den Augenblick l in einer allgemeinern Bedeutung wie eben auf und denken uns darunter einen Parameter, der ganz beliebige Werte annehmen darf. Es ist dann:

$$\int \cos lz \cos qz\,dz = \frac{\sin(l-q)z}{2(l-q)} + \frac{\sin(l+q)z}{2(l+q)} \quad \text{für } l \neq q$$

Durch zweimalige Differentiation nach l ergibt sich hieraus:

$$+\int z^2 \cos lz \cos qz\,dz = +\frac{z^2 \sin(l-q)z}{2(l-q)} + \frac{z\cos(l-q)z}{(l-q)^2} - \frac{\sin(l-q)z}{(l-q)^3}$$
$$+\frac{z^2\sin(l+q)z}{2(l+q)} + \frac{z\cos(l+q)z}{(l+q)^2} - \frac{\sin(l+q)z}{(l+q)^3} \quad \text{für } l \neq q.$$

Mithin ist, falls l wieder wie ursprünglich eine der Zahlen 1, 3, 5, ... bedeutet

$$\cos(l+q)\frac{\pi}{2} = -\cos(l-q)\frac{\pi}{2} = (-1)^{\frac{q+l}{2}}$$

und

$$15)\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2z^2}{\pi^2}\right)\cos lz \cos qz\,dz = (-1)^{\frac{q+l}{2}} \frac{b^2}{\pi}\left\{\frac{1}{(q+l)^2} - \frac{1}{(q-l)^2}\right\} \text{ für } l \neq q.$$

Ferner ist nach der Formel für $\int \cos lz \cos qz\,dz$ für solche l, die sich nur wenig von q unterscheiden

$$\int \cos lz \cos qz\,dz = \frac{z}{2} - \frac{(l-q)^2 z^3}{12} + \frac{\sin(l+q)z}{2(l+q)} + \cdots$$

wobei die durch Punkte angedeuteten Glieder mindestens von der Ordnung $(l-q)^4$ sind. Durch zweimalige Differentiation nach l folgt:

$$\int z^2 \cos lz \cos qz\,dz = \frac{1}{6}z^3 + \frac{z^2\sin(l+q)z}{2(l+q)} + \frac{z\cos(l+q)z}{(l+q)^2} - \frac{\sin(l+q)z}{(l+q)^3} + \cdots$$

Da die nicht hingeschriebenen Glieder für $l = q$ verschwinden, so folgt hieraus

$$16)\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2z^2}{\pi^2}\right)\cos^2 qz\,dz = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{b^2}{6}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{b^2}{\pi}\frac{1}{4q^2}.$$

Für die Koefficienten von 12), also der Reihe

$$17)\quad \frac{\partial r^2 G}{\partial x} = \sum^q A_q \cos q\frac{\pi y}{b} \qquad q = 1, 3, 5, \ldots$$

ergeben sich somit nach 14), 15) und 16) die Werte:

$$A_q = \frac{8}{b}\left[\sum\nolimits'_l (-1)^{\frac{q+l}{2}} \frac{b^2}{\pi} \frac{\mathfrak{Sin}\, l \frac{\pi}{2}\frac{a}{b}}{\mathfrak{Sin}\, l\pi\frac{a}{b}} \left\{\frac{1}{(q+l)^2} - \frac{1}{(q-l)^2}\right\}\right.$$

18)
$$\left. + \frac{\mathfrak{Sin}\, q\frac{\pi}{2}\frac{a}{b}}{\mathfrak{Sin}\, q\pi\frac{a}{b}} \left\{\left(\frac{a^2}{8}+\frac{b^2}{24}\right)\pi - \frac{b^2}{4\pi q^2}\right\}\right]$$

$$q = 1, 3, 5, \ldots \qquad l = 1, 3, 5, \ldots$$

Der Akzent am $\sum$-Zeichen bedeutet, daß der Wert $l = q$ auszulassen ist.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß sich 11) überhaupt in eine Fouriersche Reihe entwickeln läßt. Um die Richtigkeit dieser Annahme zu verifizieren, entwickeln wir zunächst den in 11) auftretenden Faktor $\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)$ in eine Fouriersche Reihe, wir erhalten

$$\frac{a^2}{4}+y^2 = \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{12}+\frac{b^2}{\pi^2}\sum\nolimits_k (-1)^k \frac{\cos\frac{2k\pi y}{b}}{k^2} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Da diese Reihe ebenso in die in 11) bereits vorkommende Reihe absolut konvergiert, so darf man beide Reihen mit einander multiplizieren und erhält wieder eine absolut konvergente Doppelreihe. Man erkennt, daß diese ebenso wie die zwei ursprünglichen Reihen auch dann noch absolut konvergiert, falls jeder Cosinus durch 1 ersetzt wird. Die Glieder der Doppelreihe enthalten den Faktor $\cos\frac{2k\pi y}{b}\cos\frac{r\pi y}{b}$, wobei r eine der Zahlen $1, 3, 5, \ldots$ ist. Setzt man noch

$$\cos\frac{2k\pi y}{b}\cos\frac{r\pi y}{b} = \left\{\cos(2k+r)\frac{\pi y}{b} + \cos(2k-r)\frac{\pi y}{b}\right\}\frac{1}{2},$$

so erhält man genau die Entwickelung 17); da eine absolut konvergente Doppelreihe auch unbedingt konvergiert und man also die Reihenfolge der Glieder ändern darf. Das Bildungsgesetz der A_q ist jedoch mittelst des ursprünglich eingeschlagenen Weges leichter zu erkennen.

Man erkennt leicht, daß die Glieder in 17) schließlich dem Betrag nach nicht größer werden als die Glieder der Reihe

19)
$$\sum\nolimits_q \frac{C}{q^{\frac{5}{2}}} \qquad q = 1, 3, 5, \ldots$$

worin C eine endliche positive Konstante bedeutet. Um dies zu beweisen, ist nur zu zeigen, daß $\lim_{q=\infty} q^{\frac{5}{2}} |A_q|$ gleich einer endlichen Zahl ist. Man hat:

$$q^{\frac{5}{2}} |A_q| < \frac{8}{b} \Sigma'_l \frac{\mathfrak{Sin}\, l \frac{\pi}{2} \frac{a}{b}}{\mathfrak{Sin}\, l\pi \frac{a}{b}} \frac{b^2}{\pi} q^{\frac{5}{2}} \left| \left\{ \frac{1}{(q+l)^2} - \frac{1}{(q-l)^2} \right\} \right|$$

$$+ \frac{8}{b} q^{\frac{5}{2}} \frac{\mathfrak{Sin}\, q \frac{\pi}{2} \frac{a}{b}}{\mathfrak{Sin}\, q\pi \frac{a}{b}} \left| \left(\frac{a^2}{8} + \frac{b^2}{24} \right) \pi - \frac{b^2}{4\pi q^2} \right|.$$

Mit wachsendem q nähert sich das letzte Glied rechts der Grenze null. Die Summe rechts, in der l die Werte $1, 3, \ldots$ bis ∞, aber mit Ausnahme von $l = q$ durchläuft, spalten wir in zwei Summen. Zur ersten rechnen wir alle Glieder, deren $l \geq 1$ aber $\leq \bar{l}$ ist, wobei $\bar{l}$ gleich oder wenigstens möglichst nahe gleich $\sqrt{q}$ sein soll, im übrigen kommt es auf den genauen Wert von $\bar{l}$ nicht weiter an. Zur zweiten Summe rechnen wir alle übrigen Glieder, also alle der $l > \bar{l}$ ist. In der zweiten Summe ist, da $q \neq l$ und also die Differenz $(q - l) \geq 2$ ist

$$q^{\frac{5}{2}} \left| \left\{ \frac{1}{(q+l)^2} - \frac{1}{(q-l)^2} \right\} \right| < \frac{q^{\frac{5}{2}}}{2^2}.$$

Mithin

$$\frac{8}{b} \sum_{\bar{l}}^{\infty}{}' \frac{\mathfrak{Sin}\, l \frac{\pi}{2} \frac{a}{b}}{\mathfrak{Sin}\, l\pi \frac{a}{b}} \frac{b^2}{\pi} q^{\frac{5}{2}} \left| \left\{ \frac{1}{(q+l)^2} - \frac{1}{(q-l)^2} \right\} \right| < \frac{8b}{\pi} \frac{q^{\frac{5}{2}}}{2^2} \sum_{\bar{l}}^{\infty}{}'_l \frac{\mathfrak{Sin}\, l \frac{\pi}{2} \frac{a}{b}}{\mathfrak{Sin}\, l\pi \frac{a}{b}}.$$

Diese Summe nähert sich, wie man leicht erkennt, mit wachsendem q der Grenze null, da $\bar{l}$ nahe gleich $\sqrt{q}$ ist.

Für hinreichend große q, wo wir die Glieder vernachlässigen dürfen, die in der Grenze verschwinden, ist demnach:

$$q^{\frac{5}{2}} A_q < \frac{8b}{\pi} \sum_{1}^{\bar{l}}{}'_l \frac{\mathfrak{Sin}\, l \frac{\pi}{2} \frac{a}{b}}{\mathfrak{Sin}\, l\pi \frac{a}{b}} q^{\frac{5}{2}} \left| \frac{1}{(q+l)^2} - \frac{1}{(q-l)^2} \right|$$

$$= \frac{32b}{\pi} \sum_{1}^{\bar{l}}{}'_l \frac{\mathfrak{Sin}\, l \frac{\pi}{2} \frac{a}{b}}{\mathfrak{Sin}\, l\pi \frac{a}{b}} \frac{q^{\frac{5}{2}} l}{q^3} \left\{ 1 - \left(\frac{l}{q} \right)^2 \right\}^{-2}$$

oder

$$q^{\frac{5}{2}} A_q < \frac{32\,b}{\pi} \frac{1}{\left[1-\left(\frac{\bar{l}}{q}\right)^2\right]^2} \sum_1^{\bar{l}} l \frac{\mathfrak{Sin}\, l \frac{\pi}{2} \frac{a}{b}}{\mathfrak{Sin}\, l\pi \frac{a}{b}}.$$

Da $\bar{l}$ nahe gleich $\sqrt{q}$ ist, so steht rechts etwas Endliches, und auch mit wachsendem q bezw. $\bar{l}$ bleibt rechts alles endlich. Damit ist gezeigt, daß die Glieder von 17) schließlich kleiner als die entsprechenden von 19) werden.

§ 4. Wir wenden uns nun zur Bestimmung der Funktion $F(x, y)$ der Gleichung 8). Hierbei haben wir in ähnlicher Weise vorzugehen wie Lauricella in der anfangs zitierten Abhandlung. Hier zeigt Lauricella, daß bei den Annahmen, die er schließlich macht, das von ihm behandelte Problem sich zurückführen läßt auf ein Problem aus der Balkentheorie, das Mathieu[1]) behandelt hat. Unsere Betrachtungen bei der Ermittelung von $F(x, y)$ sind zwar nicht identisch mit denen von Lauricella oder Mathieu, jedoch führen in unserm Falle ganz analoge Gedankengänge zum Ziel.

Wir setzen

20) $$F = F_1(x, y) + F_2(x, y).$$

Dabei soll jede der Funktionen F_1 und F_2, die wir ebenso wie ihre Derivierten als innerhalb vom Rechteck überall stetig und endlich voraussetzen, der Gleichung 1) genügen. Ferner soll jede der Funktionen F_1 und F_2 auf dem Rande verschwinden. Ferner soll die Ableitung von F_1 nach der innern Normalen den Randbedingungen genügen:

21)
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial r^2 G}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial x} = 0 \quad \text{für } x = +\frac{a}{2} \\
&\frac{\partial r^2 G}{\partial x} + \frac{\partial F_1'}{\partial x} = 0 \quad \text{für } x = -\frac{a}{2} \\
&\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \quad \text{für } y = +\frac{b}{2} \\
&\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \quad \text{für } y = -\frac{b}{2}.
\end{aligned}$$

Dagegen kommen für F_2 die folgenden Bedingungen in Betracht:

1) É. Mathieu, Theorie de l'estasticité des corps solides, Paris 1890, seconde partie p. 140.

$$22)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial r^2 G}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0 \quad \text{für } y = +\frac{b}{2} \text{ u. } y = -\frac{b}{2} \\ &\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 \qquad\qquad\quad \text{für } x = +\frac{a}{2} \text{ u. } x = -\frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Sind F_1 und F_2 in der angegebenen Weise bestimmt, so genügt die Summe $F_1 + F_2$ allen an die Funktion F der Gleichung 8) zu stellenden Anforderungen, d. h. $F_1 + F_2$ ist mit dieser Funktion F identisch.

Offenbar genügt es eine der zwei Funktionen F_1 und F_2 zu bestimmen, etwa F_1. Wir machen den Ansatz:

$$23)\quad \begin{aligned} F_1(x, y) = {} & \sum^q B_q \left\{ \frac{x}{n} \mathfrak{Sin}\, nx - \frac{a}{2n} \frac{\mathfrak{Sin}\, n \frac{a}{2}}{\mathfrak{Cof}\, n \frac{a}{2}} \mathfrak{Cof}(nx) \right\} \cos ny \\ & + \sum^p \mathfrak{B}_p \left\{ \frac{y}{m} \mathfrak{Sin}\, my - \frac{b}{2m} \frac{\mathfrak{Sin}\, m \frac{b}{2}}{\mathfrak{Cof}\, m \frac{b}{2}} \mathfrak{Cof}(my) \right\} \cos mx, \end{aligned}$$

wobei

$$n = \frac{q\pi}{b} \qquad m = \frac{p\pi}{a}$$

$$q = 1, 3, 5, \ldots \qquad p = 1, 3, 5, \ldots$$

und die B_q und $\mathfrak{B}_p$ noch zu bestimmende Konstanten sind.

Die Reihe für F_1 hat folgende Eigenschaften: Sie genügt formal der Differentialgleichung 1), wovon man sich leicht durch Einsetzen überzeugt. Ferner ist, da p und q nur die ungeraden Zahlen durchlaufen, am Rande überall $F_1 = 0$. Da F_1 ebenso wie die Randbedingungen symmetrisch ist in Bezug auf die x- und y-Axe, so sind die für $\frac{\partial F_1}{\partial n}$ in Betracht kommenden Randbedingungen überall erfüllt, falls ihnen längs der zwei Seiten $x = +\frac{a}{2}$ und $y = +\frac{b}{2}$ genügt wird. Wir können aber, wie wir sehen werden, die zweimal unendlich vielen Konstanten B_q und $\mathfrak{B}_p$ so bestimmen, daß dies der Fall ist. Zeigt es sich ferner noch, daß die Reihe 23) konvergiert, und daß die von uns angewandten gliedweisen Differentiationen etc. gestattet sind, so stellt 23) in der Tat die gesuchte Funktion F_1 dar. Wir wollen zunächst die Konstanten B_q und $\mathfrak{B}_p$ ermitteln und erst dann auf die Konvergenzuntersuchungen eingehen.

§ 5. Zur Aufstellung der Randbedingungen für $\frac{\partial F_1}{\partial n}$ bilden wir zunächst:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \sum^q B_q \left\{ \frac{1}{n} \mathfrak{Sin}\, nx + x\, \mathfrak{Cos}\, nx - \frac{a}{2} \frac{\mathfrak{Sin}\, n\frac{a}{2}}{\mathfrak{Cos}\, n\frac{a}{2}} \mathfrak{Sin}\, nx \right\} \cos ny$$

$$+ \sum^p \mathfrak{B}_p \left\{ \frac{b}{2} \frac{\mathfrak{Sin}\, m\frac{b}{2}}{\mathfrak{Cos}\, m\frac{b}{2}} \mathfrak{Cos}\, my - y\, \mathfrak{Sin}\, my \right\} \sin mx$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \sum^q B_q \left\{ \frac{a}{2} \frac{\mathfrak{Sin}\, n\frac{a}{2}}{\mathfrak{Cos}\, n\frac{a}{2}} \mathfrak{Cos}\, nx - x\, \mathfrak{Sin}\, nx \right\} \sin ny$$

$$+ \sum^p \mathfrak{B}_p \left\{ \frac{1}{m} \mathfrak{Sin}\, my + y\, \mathfrak{Cos}\, my - \frac{b}{2} \frac{\mathfrak{Sin}\, m\frac{b}{2}}{\mathfrak{Cos}\, m\frac{b}{2}} \mathfrak{Sin}\, my \right\} \cos mx.$$

Wegen 21), 17) und weil $\mathfrak{Cos}^2 nx - \mathfrak{Sin}^2 nx = 1$ ist, müssen also für $x = +\frac{a}{2}$ bezw. $y = +\frac{b}{2}$ die Bedingungen bestehen:

24)

$$- \sum^q A_q \cos ny = \sum^q B_q \left\{ \frac{\mathfrak{Sin}\, n\frac{a}{2}}{n} + \frac{a}{2} \frac{1}{\mathfrak{Cos}\, n\frac{a}{2}} \right\} \cos ny$$

$$+ \sum^p \mathfrak{B}_p \left\{ \frac{b}{2} \frac{\mathfrak{Sin}\, m\frac{b}{2}}{\mathfrak{Cos}\, m\frac{b}{2}} \mathfrak{Cos}\, my - y\, \mathfrak{Sin}\, my \right\} \sin m\frac{a}{2}$$

$$0 = \sum^q B_q \left\{ \frac{a}{2} \frac{\mathfrak{Sin}\, n\frac{a}{2}}{\mathfrak{Cos}\, n\frac{a}{2}} \mathfrak{Cos}\, nx - x\, \mathfrak{Sin}\, nx \right\} \sin n\frac{b}{2}$$

$$+ \sum^p \mathfrak{B}_p \left\{ \frac{1}{m} \mathfrak{Sin}\, m\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \frac{1}{\mathfrak{Cos}\, m\frac{b}{2}} \right\} \cos mx.$$

Um in der ersten der Formeln 24) die rechte und linke Seite in Übereinstimmung zu bringen, haben wir die rechte Seite ebenfalls in eine Fouriersche Reihe zu entwickeln, und dann die entsprechenden Koeffizienten rechts und links einander gleich zu setzen. Da diese Entwickelung geradeso wie die der linken Seite für das Intervall von $-b$ bis $+b$ gelten soll, die Funktion F_1 aber vorläufig für Punkte außerhalb des Rechtecks noch gar nicht definiert ist, so treffen wir zunächst folgende Festsetzung: Für ein beliebiges aber konstantes x innerhalb des Rechtecks oder auf dem Rande soll für das Intervall $+\frac{b}{2} \leqq y \leqq +b$ bezw. $-b \leqq y \leqq -\frac{b}{2}$ sein:

$$F_1\left(x, \frac{b}{2}+\delta\right) = -F_1\left(x, \frac{b}{2}-\delta\right)$$

$$F_1\left(x, -\frac{b}{2}-\delta\right) = -F_1\left(x, -\frac{b}{2}+\delta\right);$$

dabei ist δ irgend eine positive Zahl zwischen 0 und $\frac{b}{2}$. Man hat dann, falls wiederum x stets denselben Wert hat:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_{y=\frac{b}{2}+\delta} = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_{y=\frac{b}{2}-\delta}$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_{y=-\frac{b}{2}-\delta} = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_{y=-\frac{b}{2}+\delta}.$$

Bei der Entwickelung der rechten Seite der ersten der Gleichungen 24), bei der $x = \frac{a}{2}$ ist, treten offenbar, falls $n_1 = \frac{q_1\pi}{b}$ und $q_1 = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ gesetzt wird, nur die Glieder mit $\cos n_1 y = \cos q_1 z$ auf, wobei $z = \frac{\pi}{b} y$ die Periode 2π hat. Ferner erkennt man, daß:

$$\int_{-b}^{+b} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} \cos n_1 y \, dy = 0 \quad \text{für } q_1 = 0, 2, 4, 6, \ldots$$

während

$$\int_{-b}^{+b} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} \cos n_1 y \, dy = 2\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} \cos n_1 y \, dy$$

$$\text{für } q_1 = 1, 3, 5, 7, \ldots$$

Da also rechts in der Fourierschen Reihe nur die ungeraden Vielfachen von $z = \frac{\pi}{b} y$ vorkommen, so hat im Folgenden n_1 bezw. q_1 dieselbe Bedeutung wie n bezw. q. Analog entwickeln wir die rechte Seite der zweiten Gleichung 24) in eine nach $\cos m_1 x$ fortschreitende Reihe, wobei $m_1 = \frac{p_1 \pi}{a}$ und für p nur die Werte 1, 3, 5, ... in Betracht kommen; sämtliche Koeffizienten dieser Reihe sind dann gleich null zu setzen. Zur Auswertung der bei der Entwickelung der rechten Seite der ersten Gleichung 24) auftretenden Integrale, benutzen wir die Formeln:

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \cos^2 ny\, dy = \frac{b}{2} \qquad \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \cos ny \cos n_1 y dy = 0 \quad n \neq n_1$$

$$\int \mathfrak{Cos}\, my \cos n_1 y\, dy = \frac{m\, \mathfrak{Sin}\, my \cos n_1 y + n_1 \mathfrak{Cos}\, my \sin n_1 y}{m^2 + n_1^2}$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \mathfrak{Cos}\, my \cos n_1 y\, dy = \frac{2 n_1 \mathfrak{Cos}\left(m \frac{b}{2}\right) \sin n_1 \frac{b}{2}}{m^2 + n_1^2}$$

$$\text{für } n = \frac{q_1 \pi}{b} \text{ und } q_1 = 1, 3, 5, \ldots$$

Durch Differentiation nach m ergibt sich noch aus der letzten Gleichung

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y\, \mathfrak{Sin}\, my \cos n_1 y\, dy = \left[\frac{n_1 b\, \mathfrak{Sin}\left(m \frac{b}{2}\right)}{m^2 + n_1^2} - \frac{4 n_1 m\, \mathfrak{Cos}\, m \frac{b}{2}}{m^2 + n_1^2)^2}\right] \sin n_1 \frac{b}{2}$$

$$\text{für } n_1 = \frac{q_1 \pi}{b} \quad q_1 = 1, 3, 5, \ldots$$

Mit Rücksicht auf diese Formeln folgt nun aus der in der angegebenen Weise behandelten ersten Gleichung 24)

$$25) \quad \begin{aligned} &+ B_q b \left\{ \frac{\mathfrak{Sin}\, n \frac{a}{2}}{n} + \frac{a}{2} \frac{1}{\mathfrak{Cos}\, n \frac{a}{2}} \right\} = - A_q b \\ &- 8 \sin\left(n \frac{b}{2}\right) \sum^p \mathfrak{B}_p \frac{n m\, \mathfrak{Cos}\, m \frac{b}{2}}{(m^2 + n^2)^2} \sin m \frac{a}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n &= \frac{q\pi}{b} \\ q &= 1, 3, 5, \ldots \end{aligned}$$

Analog folgt aus der zweiten Gleichung 24)

$$\mathfrak{B}_p a \left\{ \frac{\mathfrak{Sin}\, m \frac{b}{2}}{m} + \frac{b}{2} \frac{1}{\mathfrak{Cos}\, m \frac{b}{2}} \right\}$$

26)

$$= -8 \sin m \frac{a}{2} \sum^q B_q \frac{nm\, \mathfrak{Cos}\, n \frac{a}{2}}{(m^2 + n^2)^2} \sin n \frac{b}{2}$$

$$m = \frac{p\pi}{a} \text{ und } p = 1, 3, 5, \ldots$$

Bestimmen wir die zweifach unendlich vielen Unbekannten B_q und $\mathfrak{B}_p$ so, daß die zweifach unendlich vielen Gleichungen 25) und 26) befriedigt sind, so sind damit auch die Grenzbedingungen 24) erfüllt.

Da bei der Entwickelung der rechten Seiten von 24) für q_1 und p_1 nur die ungeraden Werte in Betracht kommen und daher auch nur die ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{b} y$ und $\frac{\pi}{a} x$, so mußten wir es wie auf p. 41 angegeben, so einrichten, daß auch bei der Entwickelung von $\frac{\partial r^2 G}{\partial x}$ in eine Fouriersche Reihe nur die ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi y}{b}$ vorkommen.

§ 6. Zur Bestimmung von B_q und $\mathfrak{B}_p$ führen wir zunächst die Bezeichnungen ein:

27) $$t(x) = \mathfrak{Sin}\, x + \frac{x}{\mathfrak{Cos}\, x} \qquad \varphi(x) = \frac{\mathfrak{Cos}\, x}{t(x)},$$

wodurch die Gleichungen 25) und 26) übergehen in:

28)

$$B_q = -\frac{A_q n}{t\left(n \frac{a}{2}\right)} - \frac{8 n^2 \sin n \frac{b}{2}}{b\, t\left(n \frac{a}{2}\right)} \sum^p \mathfrak{B}_p \frac{m\, \mathfrak{Cos}\, m \frac{b}{2}}{(m^2 + n^2)^2} \sin m \frac{a}{2}$$

$$\mathfrak{B}_p = -\frac{8 m^2 \sin m \frac{a}{2}}{a\, t\left(m \frac{b}{2}\right)} \sum^q \mathfrak{B}_q \frac{n\, \mathfrak{Cos}\, n \frac{a}{2}}{(m^2 + n^2)^2} \sin n \frac{b}{2}.$$

Um hieraus die B_q und $\mathfrak{B}_p$ zu ermitteln, haben wir in ganz analoger Weise vorzugehen wie Mathieu auf p. 149 seines bereits zitierten Buches. Wir wollen daher gleich das Resultat angeben,

zumal man sich durch nachträgliches Einsetzen von seiner Richtigkeit überzeugen kann. Man findet:

29)
$$B_q = -\frac{A_q n}{t\left(n\frac{a}{2}\right)} - \frac{64 n^2 \sin\left(\frac{nb}{2}\right)}{a b t\left(n\frac{a}{2}\right)} \sum^{q'} A_{q'} n'^2 \varphi\left(n'\frac{a}{2}\right) \sin\frac{n'b}{2}\left[\Psi_1(n,n') + \frac{64}{ab}\Psi_3(n,n') + \frac{64^2}{a^2 b^2}\Psi_5(n,n') + \cdots\right]$$

$$\mathfrak{B}_p = \frac{8 m^2 \sin\left(m\frac{a}{2}\right)}{a t\left(m\frac{b}{2}\right)} \sum^{q} A_q n^2 \varphi\left(n\frac{a}{2}\right) \sin\frac{nb}{2}\left[\Psi_0(n,m) + \frac{64}{ab}\Psi_2(n,m) + \frac{64^2}{a^2 b^2}\Psi_4(n,m) + \cdots\right],$$

wobei

$$n' = \frac{q'\pi}{b} \qquad n'' = \frac{q''\pi}{b}$$

$$m' = \frac{p'\pi}{a} \qquad m'' = \frac{p''\pi}{a}$$

und jede der Größen q', q'', p', p'' alle ungeraden Zahlen 1, 3, 5, … durchläuft. Ferner ist gesetzt:

$$\Psi_1(n,n') = \sum^{p} \frac{m^3 \varphi\left(m\frac{b}{2}\right)}{(m^2+n^2)^2 (m^2+n'^2)^2}$$

$$\Psi_3(n,n') = \sum^{p'} \frac{m'^3 \varphi\left(m'\frac{b}{2}\right)}{(m'^2+n'^2)^2} \sum^{q''} \frac{n''^3 \varphi\left(n''\frac{a}{2}\right)}{(m'^2+n''^2)^2} \Psi_1(n'',n)$$

$$\Psi_5(n,n') = \sum^{p'} \frac{m'^3 \varphi\left(m'\frac{b}{2}\right)}{(m'^2+n'^2)^2} \sum^{q''} \frac{n''^3 \varphi\left(n''\frac{a}{2}\right)}{(m'^2+n''^2)^2} \Psi_3(n'',n)$$

. . . .

$$\Psi_0(n,m) = \frac{1}{(m^2+n^2)^2}$$

$$\Psi_2(n,m) = \sum^{p'} \frac{m'^3 \varphi\left(m'\frac{b}{2}\right)}{(m'^2+n^2)^2} \sum^{q'} \frac{n'^3 \varphi\left(n'\frac{a}{2}\right)}{(m'^2+n'^2)^2} \Psi_0(n',m)$$

$$\Psi_4(n,m) = \sum^{p'} \frac{m'^3 \varphi\left(\frac{m'b}{2}\right)}{(m'^2+n^2)^2} \sum^{q'} \frac{n'^3 \varphi\left(\frac{n'a}{2}\right)}{(m'^2+n'^2)^2} \Psi_2(n',m).$$

. . . .

Für die numerische Berechnung empfiehlt es sich statt der Größen $n, n', n'', \ldots\ m, m', m'', \ldots$ die $q, q', q'', \ldots\ p, p', p'', \ldots$ einzuführen. Setzt man zur Abkürzung

30) $$\frac{a}{b} = \alpha$$

und

31)
$$\lambda_1(q,q') = \sum^p \frac{2^5 p^3 \varphi\left(\frac{p\pi}{2\alpha}\right)}{(p^2+\alpha^2 q^2)^3\,(p^2+\alpha^2 q'^2)^2} \qquad \text{wobei} \quad \begin{aligned} q &= 1,3,5,\ldots \\ p &= 1,3,5,\ldots \\ q' &= 1,3,5,\ldots \end{aligned}$$

$$\lambda_2(p,q) = \sum^{q'} \frac{2 q'^3 \varphi\left(\frac{q'\pi}{2}\alpha\right)}{p^2+\alpha^2 q'^2)^2}\, \lambda_1(q,q')$$

$$\lambda_3(q,q') = \sum^p \frac{2 p^3 \varphi\left(\frac{p\pi}{2\alpha}\right)}{(p^2+\alpha^2 q'^2)^2}\, \lambda_2(p,q)$$

$$\lambda_4(p,q) = \sum^{q'} \frac{2 q'^3 \varphi\left(\frac{q'\pi\alpha}{2}\right)}{(p^2+\alpha^2 q'^2)^2}\, \lambda_3(q,q')$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so daß

$$\Psi_1(n,n') = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^5 \lambda_1(q,q') \qquad \Psi_2(n,m) = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^6 \alpha^3 \lambda_2(pq)$$

$$\Psi_3(n,n') = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^7 \alpha^3 \lambda_3(q,q') \qquad \Psi_4(n,m) = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^8 \alpha^6 \lambda_4(pq)$$

$$\Psi_5(n,n') = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^9 \alpha^6 \lambda_5(q,q') \qquad \Psi_6(n,m) = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{10} \alpha^9 \lambda_6(pq)$$

und beachtet man noch, daß

$$\sin\frac{nb}{2} = (-1)^{\frac{q-1}{2}} \qquad \sin\left(\frac{ma}{2}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

so folgt:

32) $$B_q = -\frac{A_q q\pi}{bt\left(q\frac{\pi}{2}\alpha\right)} - \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}\, 4 q^2 \alpha^4}{\pi t\left(\frac{q\pi}{2}\alpha\right)} \sum^{q'} (-1)^{\frac{q'-1}{2}} A_{q'} \frac{q'^2}{2b} \varphi\left(\frac{q'\pi\alpha}{2}\right) \Big[\lambda_1(qq') + \frac{16\alpha^4}{\pi^2}\lambda_3(qq') + \frac{16^2\alpha^8}{\pi^4}\lambda_5(qq') + \frac{16^3\alpha^{12}}{\pi^6}\lambda_7(qq') + \cdots\Big]$$

$$32)\quad \begin{aligned} \mathfrak{B}_p = \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p^2 \alpha}{t\left(\frac{p\pi}{2\alpha}\right)} \sum_q \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}} A_q q^2}{2b} \varphi\left(\frac{q\pi\alpha}{2}\right)\Bigg[\frac{2^4}{(p^2+\alpha^2 q^2)^2} \\ + \frac{16\alpha^4}{\pi^2}\lambda_2(pq) + \frac{16^2\alpha^8}{\pi^4}\lambda_4(pq) + \frac{16^3\alpha^{12}}{\pi^6}\lambda_6(pq) + \cdots\Bigg] \end{aligned}$$

$$q = 1, 3, 5, \ldots \qquad p = 1, 3, 5, \ldots$$
$$q' = 1, 3, 5, \ldots$$

§ 7. Wir haben jetzt die Konvergenz der in § 4, 5 und 6 vorkommenden Reihen nachzuweisen. Zunächst zeigen wir, daß die Reihen 31), die durch den Buchstaben λ bezeichnet sind, sowie die in 32) in den eckigen Klammern stehenden Reihen absolut konvergieren. Dazu machen wir uns zunächst eine Vorstellung vom Verlauf der Funktion $\varphi(x) = \dfrac{\operatorname{Cof} x}{\operatorname{Sin} x + \dfrac{x}{\operatorname{Cof} x}}$. Für $x = 0$ ist $\varphi(x) = +\infty$, mit wachsendem x nimmt $\varphi(x)$ zunächst ab, für $\sin x$ zwischen 0,639 und 0,640 erreicht $\varphi(x)$ den Wert 1. Wird x noch größer, so nimmt $\varphi(x)$ zunächst noch weiter ab, jedoch wird $\varphi(x)$ für kein $x \geqq 0{,}640$ negativ, da $\operatorname{Cof} x$ und $\operatorname{Sin} x$ stets positiv sind. Andererseits kann auch für kein endliches $x \geqq 0{,}640$ die Funktion $\varphi(x) \geqq 1$ werden, denn man hat

$$\varphi(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x} + \dfrac{4x}{e^x + e^{-x}}} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{e^{2x} - e^{-2x} + 4x}$$

$$= 1 - \frac{4x - \dfrac{2}{e^{2x}} - 2}{4x + 2\left\{2x + \dfrac{(2x)^3}{3!} + \dfrac{(2x)^5}{5!} + \cdots\right\}}.$$

Da nun $4x - \dfrac{2}{e^{2x}} - 2$ für ein x zwischen 0,639 und 0,640 verschwindet und von nun an mit wachsendem x beständig größer wird, so kann $\varphi(x)$ für $x \geqq 0{,}640$ nicht größer als 1 werden. Man hat daher

$$|\varphi(x)| \leqq 1 \text{ für } x \geqq 0{,}640.$$

In den Reihen 31) treten die Größen $\varphi\left(\dfrac{q\pi\alpha}{2}\right)$ und $\varphi\left(\dfrac{p\pi}{2\alpha}\right)$

auf, deren Argument den kleinsten für uns in Betracht kommenden Wert für $q = 1$ bezw. $p = 1$ erreicht. Die Größen $\varphi\left(\frac{q\pi\alpha}{2}\right)$ und $\varphi\left(\frac{p\pi}{2\alpha}\right)$ sind daher für alle in Betracht kommenden q bezw. p kleiner oder höchstens gleich eins, falls

$$\frac{\pi\alpha}{2} \geqq 0{,}640 \text{ und } \frac{\pi}{2\alpha} \geqq 0{,}640$$

ist, oder was dasselbe ist, falls

33) $$0{,}407 \leqq \alpha \leqq 2{,}46.$$

Im Folgenden wollen wir uns auf solche α beschränken, die in dem hier angegebenen Intervall liegen. Ersetzen wir dann in den Reihen 31) alle φ durch 1, so sind die so entstandenen Reihen größer als die Reihen λ.

Wir setzen ferner

$$H_1(q) = \sum^p \frac{2^3 p}{(p^2+\alpha^2 q^2)^2}$$

$$H_2(p) = \sum^{q'} \frac{2q'^3}{(p^2+\alpha^2 q'^2)^2} \sum^{p'} \frac{2^3 p'}{(p'^2+\alpha^2 q'^2)^2}$$

$$= \sum^{q'} \frac{2q'^3}{(p^2+\alpha^2 q'^2)^2} H_1(q')$$

$$H_3(q) = \sum^p \frac{2p^3}{(p^2+\alpha^2 q^2)^2} H_2(p)$$

$$H_4(p) = \sum^{q'} \frac{2q'^3}{(p^2+\alpha^2 q'^2)^2} H_3(q')$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und erhalten dann in analoger Weise wie Mathieu

$$\lambda_1(qq') < \frac{2^2}{4\alpha^2 q^2} H_1(q')$$

$$\lambda_2(pq) < \frac{2^2}{4\alpha^2 q^2} H_2(p)$$

$$\lambda_3(qq') < \frac{2^2}{4\alpha^2 q^2} H_3(q')$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Reihe

$$H_1(q) = \sum^p \frac{2^3 p}{(p^2+\alpha^2 q^2)^2} = \sum^{\frac{p}{2}} \frac{\frac{p}{2}}{\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{\alpha^2 q^2}{2^2}\right)^2}$$

$$\frac{p}{2} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$$

vergleichen wir nun mit dem Integral

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\left(x^2+\frac{\alpha^2 q^2}{4}\right)^2} = \frac{2}{\alpha^2 q^2}.$$

Bildet man den Quotienten

$$\frac{\sum^p \frac{2^3 p}{(p^2+\alpha^2 q^2)^2}}{\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\left(x^2+\frac{\alpha^2 q^2}{4}\right)^2}} = \frac{\alpha^2 q^2}{2} \sum^p \frac{2^3 p}{(p^2+\alpha^2 q^2)^2} = Q$$

und ermittelt man seinen Wert für verschiedene Werte von $\alpha^2 q^2$, wobei wegen 33) $\alpha^2 q^2$ stets $> 0{,}166$ ist, so ergibt sich, daß Q mit wachsendem $\alpha^2 q^2$ zunächst wächst, für ein $\alpha^2 q^2$ zwischen 1,5 und 2 erreicht Q einen Maximalwert, der jedoch kleiner als 1,30 ist. Von nun an nimmt Q beständig ab und nähert sich mit wachsendem $\alpha^2 q^2$ der Grenze 1; man erkennt dies, indem man setzt $\frac{p}{2} = \omega x$, wobei ω eine große konstante Zahl sein soll, so daß x sich nahezu in kontinuierlicher Weise ändert, wodurch dann die Reihe in ein Integral übergeht.

Es ergibt sich nun ohne Mühe in derselben Weise wie bei Mathieu, daß die Reihen λ absolut konvergieren. Ferner findet man für die in 32) in den eckigen Klammern stehenden Reihen:

34)
$$\left[\lambda_1(qq') + \frac{16\alpha^4}{\pi^2}\lambda_3(qq') + \frac{16^2\alpha^8}{\pi^4}\lambda_5(qq') + \cdots\right] < \frac{1{,}30\cdot 2}{\alpha^4 q^2 q'^2}\left\{\frac{1}{1-\frac{1{,}30^2\cdot 4}{\pi^2}}\right\}$$

$$\left[\frac{2^4}{(p^2+\alpha^2 q^2)^2} + \frac{16\alpha^4}{\pi^2}\lambda_2(pq) + \frac{16^2\alpha^8}{\pi^4}\lambda_4(pq) + \cdots\right] < \frac{4}{\alpha^2 p^2 q^2}\left\{\frac{1}{1-\frac{1{,}30^2\cdot 4}{\pi^2}}\right\}$$

womit gezeigt ist, daß auch diese Reihen absolut konvergieren, falls die Bedingung 33) erfüllt ist.

Mit Rücksicht auf 34) sowie den am Schluß von § 3 bewiesenen Satz, daß $\lim_{q=\infty} A_q < \frac{C}{q^{\frac{5}{2}}}$ ist, erkennt man, daß die in 32), also in den Werten für B_q und $\mathfrak{B}_p$ vorkommenden zwei Reihen, bei denen über q' bezw. q summiert wird, absolut konvergieren, und zwar ergibt sich daß

35) $$B_q < \frac{D_1}{t\left(\frac{q\pi\alpha}{2}\right)} \qquad \mathfrak{B}_p < \frac{D_2}{t\left(\frac{p\pi}{2\alpha}\right)}$$

wobei D_1 und D_2 zwei geeignet gewählte positive endliche Zahlen sind.

Hieraus folgt weiter, daß die Reihe 23) für F_1 unter der Voraussetzung 33) im Innern des Rechtecks absolut konvergiert, aber auch auf dem Rande, da hier ja $F_1 = 0$ ist, insbesondere ist die absolute Konvergenz auch in nächster Nähe des Randes, jedoch innerhalb des Rechtecks vorhanden. Ferner sieht man ein, daß man bei der Bildung des Ausdrucks $\Delta\Delta F_1$ die dabei vorkommenden Differentiationen innerhalb des Rechtecks gliedweise vornehmen darf.

Es sind nun noch die in § 5 auftretenden Gleichungen auf ihre strenge Richtigkeit hin zu untersuchen. Wir bemerken vorher, daß man die Betrachtungen in § 5 auch in der folgenden etwas andern Form darstellen kann, wobei die Berechtigung der angewandten gliedweisen Differentiation und gliedweisen Integration leicht zu übersehen ist.

Da in den beiden Gleichungen 24) von § 5 die gliedweise Differentiation nicht ohne Weiteres klar ist, so setzen wir das Zeichen $\frac{\partial}{\partial x}$ vor den ganzen zu differentiierenden Ausdruck und erhalten also beispielsweise statt der ersten der Gleichungen 24) die folgenden:

$$-\sum A_q \cos ny = \frac{\partial}{\partial x}_{x=\frac{a}{2}} \sum^q B_q \left\{ \frac{x \,\mathfrak{Sin}\, nx}{n} - \frac{a}{2n} \frac{\mathfrak{Sin}\, n\frac{a}{2}}{\mathfrak{Cos}\, n\frac{a}{2}} \mathfrak{Cos}\, nx \right\} \cos ny$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}_{x=\frac{a}{2}} \sum^p \mathfrak{B}_p \left\{ \frac{y}{m} \mathfrak{Sin}\, my - \frac{b}{2m} \frac{\mathfrak{Sin}\, m\frac{b}{2}}{\mathfrak{Cos}\, m\frac{b}{2}} \mathfrak{Cos}\, my \right\} \cos mx.$$

Wir multiplizieren nun mit der bereits in § 5 erwähnten Größe $\cos n_1 y$, wobei n_1 natürlich auch gleich n sein darf. Ferner inte-

grieren wir nach y zwischen $-\frac{b}{2}$ und $+\frac{b}{2}$. Mit Rücksicht auf die in § 5 erwähnten Integralformeln ergibt sich dann, da die gliedweise Integration gestattet ist,

$$
\begin{aligned}
-A_q b = {} & \frac{\partial}{\partial x}_{x=\frac{a}{2}} B_q \left\{ \frac{x \,\mathfrak{Sin}\, nx}{n} - \frac{a}{2n} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\, n\frac{a}{2}}{\mathfrak{Cof}\, n\frac{a}{2}} \,\mathfrak{Cof}\, nx \right\} b \\
& - \frac{\partial}{\partial x}_{x=\frac{a}{2}} 8 \sin n\frac{b}{2} \sum^p \mathfrak{B}_p \frac{n \,\mathfrak{Cof}\, m\frac{b}{2}}{(m^2+n^2)^2} \cos mx.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Bei der rechts in der zweiten Zeile vorkommenden Reihe ist die gliedweise Differentiation nach x gestattet. Führt man rechts überall die Differentiation nach x aus und setzt man dann noch $x = \frac{a}{2}$, so erhält man die Gleichung 25), deren Richtigkeit somit nachgewiesen ist. Genau ebenso ergibt sich die Richtigkeit von 26). Man erkennt ferner, daß aus 25) und 26) bezw. aus 36) und der analogen Gleichung sich auch umgekehrt die Gleichungen 24) ergeben; denn man darf die letzten Betrachtungen auch in umgekehrter Reihenfolge vornehmen. Insbesondere darf man z. B. in 36) rechts im ersten Gliede zu der zu differentiierenden Funktion also hinter dem Differentiationszeichen, unendlich viele Glieder von der Form

$$
B_{q_1} \left\{ \frac{x}{n_1} \,\mathfrak{Sin}\, n_1 x - \frac{a}{2n_1} \frac{\mathfrak{Sin}\, n_1 \frac{a}{2}}{\mathfrak{Cof}\, n_1 \frac{a}{2}} \,\mathfrak{Cof}\, n_1 x \right\} 2 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \cos ny \cos n_1 y \, dy,
$$

wobei $n_1 \neq n$ ist, hinzuaddieren, da alle diese Glieder verschwinden.

In analoger Weise wie F_1 ergibt sich die in 20) vorkommende Größe F_2; man findet:

$$
\begin{aligned}
F_2 = {} & \sum^q \mathfrak{B}_q \left\{ \frac{x}{n} \,\mathfrak{Sin}\, nx - \frac{a}{2n} \frac{\mathfrak{Sin}\, n\frac{a}{2}}{\mathfrak{Cof}\, n\frac{a}{2}} \,\mathfrak{Cof}\, nx \right\} \cos ny \\
& + \sum^p B_p \left\{ \frac{y}{m} \,\mathfrak{Sin}\, my - \frac{b}{2m} \frac{\mathfrak{Sin}\, m\frac{b}{2}}{\mathfrak{Cof}\, mb} \,\mathfrak{Cof}\, my \right\} \cos mx.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

$$n = \frac{q\pi}{b} \qquad m = \frac{p\pi}{a}$$

$$q = 1, 3, 5, \ldots \qquad p = 1, 3, 5, \ldots$$

In 37) ist für den Fall einer quadratischen Platte, also für $\alpha = \frac{a}{b} = 1$ jedes $\mathfrak{B}_q$ gleich der in F_1 vorkommenden Größe $\mathfrak{B}_p$, falls $q = p$ ist und jedes B_p in 36) ist für $p = q$ identisch mit B_q von F_1; man erkennt ferner ohne Mühe, welche Werte die $\mathfrak{B}_q$ und B_p im Falle einer beliebigen rechteckigen Platte haben. Die Reihe 37) konvergiert absolut unter der gleichen Voraussetzung wie der Ausdruck F_1, also unter der Bedingung 33).

§ 8. Wir haben schließlich noch die Konstante A in 8) zu ermitteln. Dazu haben wir, wie erwähnt in 3) für w den Ausdruck 8) einzusetzen und dann A so zu bestimmen, daß 3) erfüllt ist. Man hat zunächst:

$$\iint_f \Delta\Delta w\,dx\,dy = A\iint_f \{\Delta\Delta\,(r^2 G\,(x, y, 00)) + \Delta\Delta F\}\,dx\,dy.$$

Da nun in 3) die Integration nur über das sehr kleine den Nullpunkt umschließende Gebiet f zu erstrecken ist und ferner F im Nullpunkt eine reguläre Funktion ist, so können wir die sehr kleine Größe $\iint \Delta\Delta F\,dx\,dy$ vernachlässigen. Also folgt:

38) $$\iint_f \Delta\Delta\,w\,dx\,dy = A\iint_f \Delta\Delta\,(r^2\,G\,(x, y, 00))\,dx\,dy.$$

Zur Bildung von $\Delta\Delta\,(r^2 G)$ erinnern wir zunächst daran, daß sich, wie Kneser[1]) zeigt, der Ausdruck G noch in einer anderen Form schreiben läßt; es ist nämlich:

39). $$r^2\,G\,(xy, 00) = -r^2\,R\lg\frac{\vartheta_1\left(\frac{x+iy+a}{2a},\ e^{-\frac{\pi b}{a}}\right)\vartheta_1\left(\frac{x+iy+ib}{2a},\ e^{-\frac{\pi b}{a}}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x+iy+a+ib}{2a},\ e^{+\frac{\pi b}{a}}\right)\vartheta_1\left(\frac{x+iy}{2a},\ e^{-\frac{\pi b}{a}}\right)}$$

Hier ist unter $e^{-\frac{\pi b}{a}}$ die Konstante zu verstehen, die in den Thetafunktionen auftritt und die man gewöhnlich mit q bezeichnet [2]),

1) A. Kneser l. c. p. 141. E. B. Christoffel l. c.

2) Siehe z. B. C. Runge, Theorie und Praxis der Reihen (Sammlung Schubert) 1904, p. 222. Durège Maurer, Theorie d. ellipt. Funktionen, 1908, p. 223.

der Buchstabe R bedeutet, daß nur der reelle Teil vom Logarithmus in Betracht kommt.

Man erkennt leicht, daß

$$r^2 G = r^2 \lg r + X$$

wobei X eine im Nullpunkt reguläre Funktion der komplexen Variabel $x + iy$ ist. Daher wird:

$$\iint_f \Delta\Delta w \, dx \, dy = A \iint_f \Delta\Delta (r^2 \lg r) \, dx \, dy$$

und wenn wir für das Gebiet f einen um den Nullpunkt beschriebenen Kreis von dem sehr kleinen Radius δ wählen[1])

40) $$\iint_f \Delta\Delta w \, dx \, dy = 8\pi A.$$

Setzt man diesen Wert für $\iint \Delta\Delta w \, dx \, dy$ in 3) ein, so folgt:

$$\frac{32\pi}{3} K h^3 \frac{1+2\theta}{1+\theta} A = P$$

oder

41) $$A = \frac{3}{32} \frac{P}{\pi} \frac{1+\theta}{1+2\theta} \frac{1}{Kh^3}.$$

Führt man diesen Wert für A in 8) ein und beachtet man 20), so ergibt sich als Resultat: Die gesuchte Verschiebung w wird dargestellt durch die Gleichung:

42) $$w = \frac{3}{32} \frac{P}{\pi} \frac{1+\theta}{1+2\theta} \frac{1}{Kh^3} \left\{ r^2 G(x, y, 00) + F_1 + F_2 \right\}$$

wobei die Werte von G, F_1 und F_2 bezw. aus 9) (oder 10)), 23) und 37) zu entnehmen sind.

Für die numerische Berechnung sind zunächst die Größen A_q nach 18) zu ermitteln, alsdann die Größen λ nach 31) und hierauf die Größen B_q und $\mathfrak{B}_p$ der Funktion F_1 nach 32), die Konstanten $\mathfrak{B}_q$ und B_p von F_2 ergeben sich in analoger Weise. Für den Fall einer quadratischen Platte, also $b = a$, nehmen die A_q rasch ab, man findet hier $A_1 = +0{,}705\,a$, $A_3 = -0{,}0585\,a$, $A_5 = +0{,}0138\,a$. Auch die Größen λ lassen sich leicht nach 31) berechnen, die Reihen konvergieren gleichfalls rasch für den Fall $b = a$. Handelt es

1) Siehe A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. V, 1907, p. 111.

sich darum die Einsenkung einer quadratischen Platte im Mittelpunkt zu berechnen, so spielen bereits die Koeffizienten B_3 und $\mathfrak{B}_3$ keine große Rolle mehr.

Denkt man sich einmal eine eingeklemmte quadratische Platte, deren Seite $= a$ ist und andererseits eine eingeklemmte kreisförmige Platte, deren Durchmesser $= a$ ist und sind beide Platten im Mittelpunkte mit demselben Gewicht P belastet, so ist die Einsenkung des Mittelpunktes für die quadratische Platte nicht wesentlich verschieden von der der kreisförmigen Platte.

Für eine rechteckige Platte, bei der jedoch $\frac{a}{b}$ nicht allzusehr von 1 verschieden ist, sind die Kurven $w =$ const. in der Nähe vom Mittelpunkt genähert Kreise. Man erkennt dies wenn man in 42) Glieder mit x^2 und y^2 vernachlässigt, jedoch das in $r^2 G$ vorkommende Glied $r^2 \lg(r)$ beibehält, da es den sehr großen Faktor $l(r)$ enthält.

Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. II. Längseffekt.

Von

J. Stark und **G. Wendt.**

Vorgelegt in der Sitzung am 20. Dezember 1913 von Herrn W. Voigt.

§ 1. **Problem.** — An anderer Stelle[1]) hat der eine von uns in einer ersten Mitteilung den Quereffekt (Transversaleffekt) des elektrischen Feldes auf Serienlinien des Wasserstoffs und Heliums beschrieben. Auf Grund der Resultate über diesen Quereffekt ließen sich für den Längseffekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien folgende Verhältnisse erwarten. Diejenigen Komponenten einer elektrisch zerlegten Linie, welche im Quereffekt elektrisch senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien geradlinig schwingen, erscheinen allein im Längseffekt und sind in diesem unpolarisiert.

Wenn diese Vorhersage auch viel Wahrscheinlichkeit für sich hatte, so erschien es doch notwendig, sie experimentell zu prüfen. Denn es durfte nicht ohne weiteres als gänzlich ausgeschlossen gelten, daß in einigen Fällen gewisse Komponenten einer zerlegten Linie im Längseffekt zirkular polarisiert sind. Unterliegt nämlich einerseits das Atom einer Serienlinie etwa als Dipol einer orientierenden Kraft im elektrischen Feld, wie es wahrscheinlich ist, hat also eine Atomaxe das Bestreben sich parallel der Axe des elektrischen Feldes zu stellen, und vermag dasjenige Elektron in ihm, welches die Serienlinie emittiert, infolge eines Zwanges der Atomstruktur nur in einer Richtung um jene Atomaxe zu rotieren,

---

1) J. Stark, Ber. d. Berl. Akad. 47, 932, 1913.

so muß die von diesem Elektron in der Feldaxe emittierte Spektrallinie wenigstens zum Teil zirkular polarisiert sein.

Nun sei als Resultat unserer Untersuchung vorweg mitgeteilt, daß die Komponenten einer Serienlinie im Längseffekt wenigstens für Wasserstoff und Helium unpolarisiert sind. Hieraus ergibt sich gemäß vorstehender Überlegung die Folgerung, daß die Elektronen, welche die Zentra der Serienemission sind, bei diesen Elementen um eine Atomaxe parallel der Feldaxe sowohl in der einen als in der entgegengesetzten Richtung zu rotieren vermögen.

Der Längseffekt des elektrischen Feldes auf Serienlinien ist demnach von dem Zeemaneffekt in bemerkenswerter Weise verschieden: während in diesem die Komponenten einer zerlegten Serienlinie rechts und links zirkular polarisiert sind, erweisen sie sich im Längseffekt des elektrischen Feldes unpolarisiert. Und wie ebenfalls gleich hier bemerkt sei, ist dies Resultat der Beobachtung, Fehlen der Polarisation im Längseffekt des elektrischen Feldes, in Übereinstimmung mit der von W. Voigt[1]) gegebenen Theorie der Zerlegung von Spektrallinien durch ein elektrisches Feld.

Die experimentelle Untersuchung des Längseffektes des elektrischen Feldes auf Serienlinien hat auch für die Auffindung des neuen Effektes an gewissen Stellen der Sonnenatmosphäre Bedeutung. Es scheint nämlich, daß dort ähnlich wie in der Erdatmosphäre die elektrischen Kraftlinien überwiegend radiale Richtung haben. Ist dies der Fall, so wird ein Beobachter, der in ein radiales elektrisches Feld auf der Mitte der Sonnenscheibe schaut, den Längseffekt und, wenn er in ein radiales Feld am Rande der Sonnenscheibe blickt, den Quereffekt beobachten.

§ 2. **Methoden.** — In der erwähnten ersten Mitteilung hat der eine von uns folgendes methodische Prinzip zur Herstellung eines starken elektrischen Feldes in einem leuchtenden Gas angegeben: die Lichtemission in einem verdünnten Gas wird durch Kanalstrahlen angeregt, auf das so außerhalb eines Glimmstromes leuchtende Gas in engem Raume wird das elektrische Feld einer unselbständigen Strömung gelegt. Zum Zweck der Beobachtung des Quereffektes des elektrischen Feldes wurde das vorstehende Prinzip so ausgeführt, daß die Axe der Licht emittierenden Kanalstrahlen in die Axe des elektrischen Feldes gelegt wurde; die Sehrichtung stand also gleichzeitig senkrecht auf der Axe des

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 4, 197, 1901.

Feldes und auf der Bewegungsrichtung der Kanalstrahlen. Wollte man bei dieser Anordnung den Längseffekt des elektrischen Feldes beobachten, so würde dies durch folgende Umstände sehr erschwert; einmal würde neben dem Licht aus dem starken elektrischen Feld noch intensives Licht durch die Löcher in der Kathode aus dem Raum vor der Kathode (erste Kathodenschicht) in die Sehrichtung gelangen, zweitens würde der Effekt des elektrischen Feldes durch den Doppler-Effekt der leuchtenden Kanalstrahlenteilchen gestört werden.

Um den vorstehenden Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, haben wir das obige methodische Prinzip in folgender Ausführung bei unserer Untersuchung des Längseffektes zur Anwendung gebracht. Wir haben nämlich das elektrische Feld senkrecht zur Axe der Kanalstrahlen gestellt und in der Axe des Feldes parallel zur Hinterfläche der Glimmstrom-Kathode durch Löcher in der Anode des Spannungsfeldes hindurch die Serienemission in diesem beobachtet. Die Einzelheiten der von uns gewählten Versuchsanordnung waren folgende.

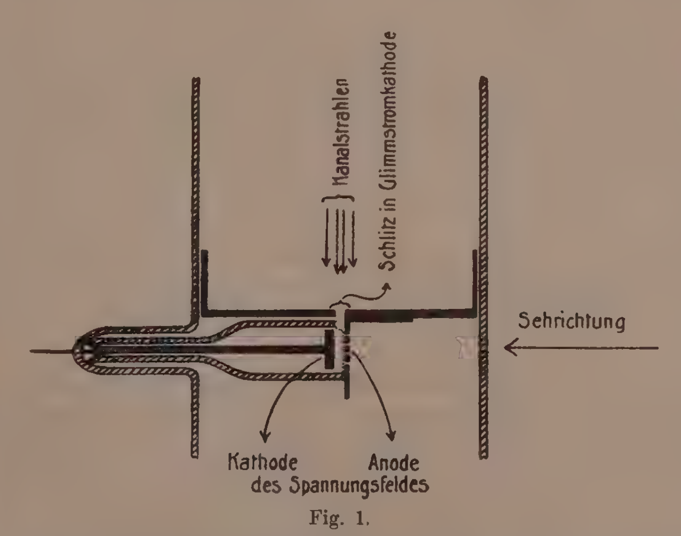


Fig. 1.

Fig. 1 gibt den axialen Schnitt durch die Glimmstromkathode und das Spannungsfeld. In der Mitte des Bodens der Glimmstromkathode ist ein 3 mm langer, 1,5 mm breiter Schlitz angebracht, durch dieses tritt ein Kanalstrahlenbündel von gleichem Umriß in das Spannungsfeld hinter der Kathode. Auf deren Rückseite ist nämlich die Aluminiumanode des Spannungsfeldes aufgenietet, so

daß die Kanalstrahlen gerade an ihrer Oberfläche entlang laufen. Parallel ihr gegenüber in 1,5 mm Abstand ist als Kathode des Spannungsfeldes eine Aluminiumscheibe von 8 mm Durchmesser aufgestellt, so daß ebenfalls das Kanalstrahlenbündel an ihrer Oberfläche entlang läuft. Über die Aluminiumscheibe ist ein vorne abgeschliffenes Glasrohr so weit geschoben, daß sein vorderer Rand (punktiert) die Anodenfläche berührt. Indes ist in dem Glasrohr unterhalb des Schlitzes in der Glimmstromkathode eine 3 mm lange, 1,5 mm breite Öffnung gelassen, so daß das Kanalstrahlenbündel unbehindert in das Spannungsfeld eintreten kann. Es ist sorgfältig darauf geachtet, daß die über die Aluminiumscheibe geschobene Glasröhre diese und die über ihr sitzende Glimmstromkathode nicht berührt, sondern überall 0,5—0,75 mm Abstand von ihnen hält.

In der Anode des Spannungsfeldes sind dicht neben einander drei Reihen 1 mm weiter Löcher angebracht. Durch diese hindurch, also in der Axe des Spannungsfeldes und senkrecht zum Kanalstrahlenbündel kann der Längseffekt beobachtet werden.

Nun könnte man auf den ersten Blick zu folgendem Einwand geneigt sein. Die in das Spannungsfeld normal zu seiner Axe eintretenden primären positiven Kanalstrahlen werden nach der Kathode des Spannungsfeldes zu beschleunigt und nehmen so eine Geschwindigkeit in der Sehaxe an; das gleiche gilt von den positiven Atomjonen, welche durch die Stoßwirkung der primären Strahlen im Spannungsfeld geschaffen und nach dessen Kathode zu eine Geschwindigkeit gewinnen. Infolge dieser Geschwindigkeit der primären und sekundären Kanalstrahlen in der Sehaxe, kann bei der Beobachtung des Längseffektes des elektrischen Feldes der Doppler-Effekt stören.

Die vorstehende Überlegung ist prinzipiell richtig; in quantitativer Hinsicht kann indes dank der Wahl der Versuchsbedingungen der vermutete Doppler-Effekt nicht in störender Weise sich bemerkbar machen. Die in der Sehaxe von einem einfach geladenen positiven Kanalstrahlenjon gewonnene Geschwindigkeit ist nämlich $v = \frac{e}{m} E t$, wo $\frac{e}{m}$ die spez. Ladung des Jons, E die Stärke des Spannungsfeldes, t die Zeitdauer der Beschleunigung ist. Wählt man darum den Weg l der primären Strahlen im Spannungsfeld bis zur Sehaxe nur kurz, indem man die Sehaxe nahe an die Eintrittsstelle der Kanalstrahlen schiebt und den primären Strahlen eine große Geschwindigkeit v_0 (6000—10 000 Volt

Kathodenfall) gibt, so wird $t = \frac{l}{v_0}$ und damit auch v klein. $t = \frac{l}{v_0}$ ist zudem die größte mögliche Beschleunigungszeit, für den Fall, daß der primäre Kanalstrahl auf dem ganzen Wege l unverändert positiv geladen bleibt. In Wirklichkeit aber sind die meisten primären Kanalstrahlen, wie durch verschiedene Forscher insbesondere durch W. Wien festgestellt worden ist, bei einem Druck, bei welchem noch Lichtemission statt hat, nur einen Teil der Zeit t ihrer Bewegung durch ein Gas längs eines Weges l positiv geladen. Dieser Umstand bedingt für die meisten primären Kanalstrahlen noch eine weitere Verkleinerung der Geschwindigkeit v in der Sehaxe. Zudem haben die primären Strahlen und vor allem die sekundären Kanalstrahlen, die ja im Gesichtsfeld verbleiben, eine störend große Geschwindigkeit in der Feldaxe erst in unmittelbarer Nähe der Oberfläche die Kathode des Spannungsfeldes gewonnen. Die Lichtemission aus der relativ sehr dünnen Schicht, welcher einen störenden Doppler-Effekt geben könnte, ist darum unmerklich schwach im Verhältnis zur Lichtemission aus dem übrigen Teil des Spannungsfeldes.

Daß die vorstehenden Überlegungen für unsere Versuchsbedingungen zutreffend sind, lehrt jedenfalls der Erfolg unserer Beobachtungen. Auf unseren Spektrogrammen ist nämlich nicht einmal bei den dafür besonders empfindlichen Wasserstofflinien auch nur eine Andeutung eines störenden Doppler-Effektes wahrnehmbar.

Nach den obigen Darlegungen ist ohne weiteres ersichtlich, daß man nicht die Kathode, sondern die Anode des Spannungsfeldes mit Löchern für die Beobachtung des Längseffektes zu versehen hat. Es treten nämlich dann nicht die leuchtenden sekundären Kanalstrahlen, sondern nur die im Spannungsfeld erzeugten Kathodenstrahlen durch die Löcher in den feldlosen Gasraum bis zur Glaswand aus. Diese bringen aber ihrer geringen Absorption wegen hier nur eine schwache Lichtemission hervor. Zudem läßt sich diese, wenn sie auftritt, im Spektrogramm von der Lichtemission aus dem Spannungsfeld dank der von uns gewählten optischen Anordnung unterscheiden.

Wie bei der Beobachtung des Quereffektes wurde nämlich auch in der vorliegenden Arbeit das Spannungsfeld scharf auf den Spalt des Spektrographen abgebildet. Wegen der geringen Tiefe des Spannungsfeldes erschienen auch noch die Löcher in seiner Anode scharf in dem Bild auf dem Spalt. Darum waren

die Spaltbilder in den Linien des Lichtes aus dem Spannungsfeld ihrer Länge nach nicht kontinuierlich, sondern der Länge nach in kurze Streifchen mit ungeschwärzten Zwischenräumen geteilt, wobei die Länge des Streifchens gleich dem Durchmesser eines Lochbildes auf dem Spalt war. Die Linien der Lichtemission infolge der Wirkung der Kathodenstrahlen zwischen den Löchern in der Anode und der Glaswand erschienen dagegen nicht in dieser Weise von lichtleeren Stellen unterbrochen, sondern in ihrer ganzen Länge ausgezeichnet. Dies war insbesondere bei der *He*-Linie λ 5016 Å der Fall.

Die Abbildung des Spannungsfeldes erfolgte wieder wie früher unter Vorschaltung einer Kalkspat-(Wollaston)-Platte vor das abbildende Objektiv, es wurden also auf dem Spalt unmittelbar über einander ein vertikal und ein horizontal schwingendes Bild von dem leuchtenden Spannungsfeld entworfen. Waren demnach die in dem Spannungsfeld emittierten Komponenten von zerlegten Serienlinien zum Teil horizontal, zum Teil vertikal geradlinig polarisiert, so fehlten die einen in dem oberen, die anderen in dem unteren Spaltbild. Setzen sich dagegen alle Komponenten in dem oberen Spaltbild geradlinig in das untere Spaltbild fort, so waren die Komponenten entweder unpolarisiert oder zirkular polarisiert. Um wieder zwischen diesen zwei Möglichkeiten zu entscheiden, wurde vor die Kalkspatplatte eine Viertelwellenlängen-Glimmerplatte für Blau so gesetzt, daß ihre Axenebene unter 45° zur Horizontalen lag, daß sie also rechts und links zirkular polarisiertes Licht in vertikal und horizontal geradlinig polarisiertes Licht verwandelte. Setzen sich nunmehr alle Komponenten in dem oberen und dem unteren Spaltbild geradlinig in einander fort mit gleicher Intensität, so ist daraus zu folgen, daß die von dem elektrischen Feld erzwungenen Komponenten einer Serienlinie in der Axe des Feldes unpolarisiert emittiert werden.

An einem Mangel leidet das vorstehende Verfahren zur Untersuchung des Längseffektes, der sich wohl kaum beseitigen lassen wird. Bei der Beobachtung längs der Feldaxe ist die Dicke der leuchtenden Schicht nur gering (1,5 mm) und infolgedessen die Lichtintensität so klein, daß selbst mit dem von uns verwendeten lichtstarken Spektrographen die Expositionszeit auf 3—8 Stunden gesteigert werden mußte.

Im Vorbeigehen sei bemerkt, daß die oben beschriebene Anordnung zur Beobachtung des Längseffektes unter Umständen bei entsprechender Verbesserung zur Beobachtung des Quereffektes

sich verwenden läßt. Man braucht nämlich die Sehrichtung nur senkrecht zu der Feldaxe und zu den Kanalstrahlen zu stellen.

§ 3. **Der Längseffekt im *H*-Spektrum.** — Wie in der ersten Abhandlung dargelegt ist, wird die Wasserstofflinie H_γ durch ein elektrisches Feld für die Beobachtung quer zu diesem in ein Quintett[1]) zerlegt, dessen drei innere Komponenten elektrisch senkrecht, dessen zwei äußere Komponenten parallel zum Feld schwingen. Im Längseffekt erscheinen nun sowohl bei H_β wie bei H_γ drei unpolarisierte Komponenten und zwar haben diese dieselbe spektrale Lage (Wellenlänge) wie die drei inneren Komponenten im Quereffekt, welche senkrecht zur Feldaxe schwingen. Fig. 2 gibt einen Überblick über die elektrischen Komponenten von H_γ und ihre Polarisation für eine Feldstärke von 13000 Volt $\times$ cm^{-1}.

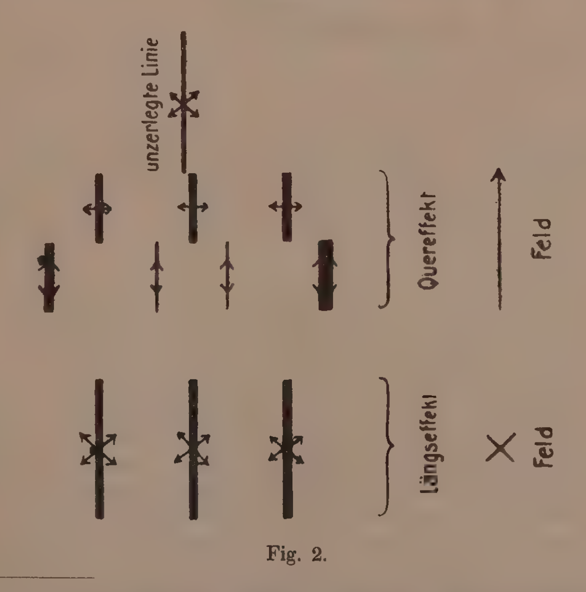


Fig. 2.

1) Durch Anwendung einer größeren Dispersion und eines stärkeren Feldes habe ich unterdes gefunden, daß H_γ in einem Feld von 18000 Volt $\times$ cm^{-1} außer den zwei intensiven parallel zum Feld schwingenden Komponenten zwischen ihnen auch zwei weitere parallel dem Feld schwingende Komponenten besitzt, die indes sehr wenig intensiv im Verhältnis zu den äußeren Komponenten sind. Entsprechend diesem Befund habe ich die Fig. 2 gezeichnet. Die hierbei angewendete Dispersion betrug 1 : 8,9 mm : Å. In einem Feld von 50000 Volt $\times$ cm^{-1} erschien auch die mittlere senkrecht zum Feld schwingende Komponente in ein Duplet aufgelöst. Stark.

§ 4. **Der Längseffekt im *He*-Spektrum.** — Wie in der ersten Abhandlung mitgeteilt wurde, werden die Linien der ersten oder diffusen Nebenserien des Heliums unter den angegebenen Versuchsbedingungen in der Quersicht in Komponenten zerlegt, nämlich die Linie λ 4472 in ein Duplet und 4026 Å in ein Triplet, die Linie λ 4922 in ein Duplet und 4388 Å in ein Quartett parallel und senkrecht zum Feld schwingender Komponenten. Hierbei fallen die senkrecht mit den parallel schwingenden Komponenten spektral zwar nahezu, aber nicht in allen Fällen genau zusammen.

Der Längseffekt wurde bei den *He*-Linien λ 4922—4388—4472 Å spektrographisch beobachtet. Es erschienen bei ihnen allen am Orte der senkrecht zum Feld schwingenden Komponenten im Quereffekt in dem gleichen Intensitätsverhältnis Komponenten, jedoch unpolarisiert wie im Falle des Wasserstoffs.

Aachen, Physik. Instit. d. Techn. Hochschule, 10. Dez. 1913.

Theoretische Bemerkungen zu den neuen Beobachtungen des Herrn J. Stark.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. Dezember 1913 [1]).

1) Sich bereits jetzt zu der wundervollen Entdeckung des Herrn Stark [2]) theoretisch zu äußern, mag in mancher Hinsicht verfrüht erscheinen, insofern die bisherigen Beobachtungen manche wichtige Punkte noch nicht zweifellos aufklären. So wird es

---

1) Obige Notiz ist inhaltlich im Wesentlichen übereinstimmend an dem angegebenen Tage der Kgl. Ges. der Wiss. vorgelegt worden. In Aussicht stehende weitere Beobachtungsresultate besonders über den Einfluß einer Feldumkehr veranlaßten ihre Zurückhaltung und nachträgliche Ergänzung in einigen Punkten. Die obige Form datiert von Ende Januar. In der Zwischenzeit sind mehrere Bearbeitungen des Problems auf Grund des Bohrschen Atommodelles oder verwandter Vorstellungen erschienen, die zwar nicht die von Herrn Stark beobachteten Veränderungen, aber andere von ähnlicher Größenordnung liefern. Ich unterschätze die Bedeutung derartiger Resultate gewiß nicht, glaube aber, daß Übereinstimmungen in der Größenordnung auf sehr verschiedene Weisen zustande kommen können und daher allein nicht genügen. Außerdem muß ich wiederholen, daß m. E. ein Modell für den Emissionsvorgang erst dann seine Verwertbarkeit erwiesen hat, wenn es auch die Ableitung des Absorptionsvorganges gestattet. In bezug hierauf scheinen mir aber z. B. bei dem Bohrschen Modell bisher beträchtliche Schwierigkeiten vorzuliegen.

Die obige Darstellung gibt zunächst über die Größenordnung des Stark-Effektes nur unvollständige Auskunft; sie scheint mir aber den Vorteil zu besitzen, daß sie mit klaren Vorstellungen und Methoden arbeitet, daß sie den Boden nicht verläßt, auf dem beträchtliche Erfolge in der Theorie des Zeeman-Effektes erzielt sind, und daß sie endlich die nötige Ausgestaltungsfähigkeit besitzt, durch die sie Möglichkeiten zur Erklärung sehr vielfältiger Zerlegungstypen bietet.

2) J. Stark, Berl. Ber. v. 20. Nov., Gött. Nachr. v. 20. Dez. 1913.

beispielsweise für die Deutung der Erscheinung sehr wesentlich sein, ob und wie weit letztere bei einer Umkehrung des auf die Kanalstrahlen gelegten Feldes sich genau in derselben Weise reproduziert. Hierüber liegen bisher nur ganz vereinzelte Angaben vor. Aber trotz der Unsicherheit einzelner Umstände ist vielleicht eine allgemeine theoretische Überlegung nicht unangebracht, da eine solche zur Präzisierung von Fragen dienen kann, die weiterhin an das Experiment zu stellen sind. Und da ich bereits vor 14 Jahren bei der Skizze einer Theorie der elektrischen Doppelbrechung (Kerr-Effekt) ein elektrisches Analogon zum Zeeman-Effekt als wahrscheinlich bezeichnet und gewisse Züge desselben beschrieben habe, so liegt es mir besonders nahe, solche Überlegungen anzustellen.

Die ersten damals angestellten Betrachtungen[1]) basierten (wie ich das auch bez. des magnetischen Zeeman-Effektes getan habe) auf rein phänomenologischer Grundlage; sie bedienten sich ausschließlich allgemeiner Prinzipien: der lineären Form der Gleichungen der Optik, der Gleichung der Energie, der Symmetrie eines elektrischen Feldes. Später[2]) habe ich dann eine spezielle Vorstellung verfolgt, die auch die Resultate der ersten Beobachtungsreihe spezialisierte.

Diese Vorstellung ging dahin, daß die quasielastische Kraft, welcher das Elektron in einem Molekül unterliegt, nur für kleine Elongationen aus der Ruhelage diesen selbst proportional ist, für größere ein komplizierteres Gesetz befolgt. Ich habe damals auch einen Umstand bezeichnet, der zu derartigen Verhältnissen zu führen vermag. Denkt man sich die negativen Elektronen innerhalb einer räumlich gleichförmig positiv geladenen Kugel beweglich, so erhält man die lineäre Form der quasielastischen Kraft für alle Elongationen, die das Elektron nicht aus der Kugel hinausführen; denkt man hingegen die Dichte der positiven Ladung nach konzentrischen Schichten, oder aber schließlich ganz allgemein beliebig variierend, so ergibt sich eine quasielastische Kraft, die einem komplizierteren Gesetz folgt. Dies Gesetz habe ich dann später ausführlicher diskutiert und auch für die Moleküle von Kristallen nach deren Symmetrien spezialisiert.

2) Ich will hier zunächst noch einmal kurz auf den Fall isotroper quasielastischer Felder eingehen. Das Potential φ eines solchen Feldes sei wiederum durch eine Reihe dargestellt

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. **69**, 297, 1899.
2) W. Voigt, Ann. d. Phys. **4**, 197, 1901.

$$1)\qquad \varphi = \tfrac{1}{2}k\mathfrak{r}^2 + \tfrac{1}{4}k'\mathfrak{r}^4 + \tfrac{1}{6}k''\mathfrak{r}^6 + \cdots,$$

wobei $\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2$ ist, und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Elongationen des Elektrons bezeichnen. Die Gleichungen für die Eigenschwingungen in dem $/\!/Z$ liegenden äußeren Feld E_0 werden dann zu

$$2)\qquad \begin{aligned} m\mathfrak{x}'' &= -(k + k'\mathfrak{r}^2 + k''\mathfrak{r}^4 + \cdots)\mathfrak{x},\\ m\mathfrak{y}'' &= -(k + k'\mathfrak{r}^2 + k''\mathfrak{r}^4 + \cdots)\mathfrak{y},\\ m\mathfrak{z}'' &= -(k + k'\mathfrak{r}^2 + k''\mathfrak{r}^4 + \cdots)\mathfrak{z} + eE_0. \end{aligned}$$

Aus ihnen folgt eine Gleichgewichtslage $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$ gegeben durch

$$3)\qquad \mathfrak{x}_0 = 0, \qquad \mathfrak{y}_0 = 0, \qquad (k + k'\mathfrak{z}_0^2 + k''\mathfrak{z}_0^4 + \cdots)\mathfrak{z}_0 = eE_0.$$

In erster Annäherung giebt dies

$$\mathfrak{z}_0 = eE_0/k,$$

in zweiter

$$4)\qquad \mathfrak{z}_0 = eE_0/(k + k'(eE_0/k)^2) \text{ u. s. f.}$$

Bei den Schwingungen sei

$$5)\qquad \mathfrak{x} = \xi, \qquad \mathfrak{y} = \eta, \qquad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + \zeta$$

und ξ, η, ζ sehr klein neben $\mathfrak{z}_0$, somit merklich

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + \zeta.$$

Dann nehmen die obigen Formeln die Gestalt an

$$6)\qquad \begin{aligned} m\xi'' &= -(k + k'\mathfrak{z}_0^2 + k''\mathfrak{z}_0^4 + \cdots)\xi,\\ m\eta'' &= -(k + k'\mathfrak{z}_0^2 + k''\mathfrak{z}_0^4 + \cdots)\eta,\\ m\zeta'' &= -(k + 3k'\mathfrak{z}_0^2 + 5k''\mathfrak{z}_0^4 + \cdots)\zeta. \end{aligned}$$

Diese Bedingungen zeigen, daß das durch E_0 abgelenkte Elektron in einem aeolotropen Feld schwingt und parallel den Koordinatenachsen die Frequenzen ν_1, ν_2, ν_3 besitzt, gegeben durch

$$7)\qquad \begin{aligned} m\nu_1^2 = m\nu_2^2 &= (k + k'\mathfrak{z}_0^2 + k''\mathfrak{z}_0^4 + \cdots),\\ m\nu_3^2 &= (k + 3k'\mathfrak{z}_0^2 + 5k''\mathfrak{z}_0^4 + \cdots). \end{aligned}$$

Dabei können in die Glieder der Klammern Werte für $\mathfrak{z}_0$ in abnehmender Annäherung eingesetzt werden.

In der ersten Annäherung wird bei Einführung der Frequenz ν_0, die $E_0 = 0$ entspricht,

$$8)\qquad \begin{aligned} \nu_1 = \nu_2 &= \nu_0\left(1 + \frac{k'}{2k^3}e^2E_0^2\right),\\ \nu_3 &= \nu_0\left(1 + \frac{3k'}{2k^3}e^2E_0^2\right). \end{aligned}$$

Die Beobachtungen über elektrische Doppelbrechung ließen s. Z. eine Beschränkung auf diese Annäherung als genügend erscheinen.

Die Betrachtung eines einzelnen Elektrons unter den vorausgesetzten Umständen führt hiernach für die Emission längs der Kraftlinien zu Schwingungen beliebiger Art, also unpolarisierten, mit den Frequenzen $\nu_1 = \nu_2$, für die Emission normal dazu zu einer Schwingung parallel E_0 mit der Frequenz ν_3, und zu einer solchen normal E_0 mit der Frequenz $\nu_1 = \nu_2$. Die Abweichungen dieser Frequenzen von der ursprünglichen ν_0 sind proportional mit E_0^2, und zwar gilt

9) $$\nu_3 - \nu_0 = 3(\nu_1 - \nu_0).$$

Diesem geschilderten direkten oder Emissionseffekt entspricht ein inverser oder Absorptionsvorgang, der begleitet wird von einer linearen Doppelbrechung. Der in das elektrische Feld gebrachte isotrope Körper nimmt die Natur eines einachsigen dichroitischen Kristalles an, dessen optische Achse in die Richtung der Kraftlinien fällt.

Für die Brechungsindizes der normal zum Feld fortgepflanzten und resp. senkrecht und parallel zum Feld schwingenden Wellen ergibt sich innerhalb eines durchsichtigen Spektralgebietes in erster Annäherung bez. E_0

10) $$n_s^2 = n_0^2 - 4\pi E_0^2 \sum \frac{k' e^4 N}{k^2 (k - m\nu^2)^2},$$
$$n_p^2 = n_0^2 - 4\pi E_0^2 \sum \frac{3k' e^4 N}{k^2 (k - m\nu^2)^2},$$

wobei die Summen über alle Elektronenarten zu erstrecken sind, und N die Anzahl jeder Art in der Volumeneinheit bezeichnet. Als Maß der Doppelbrechung ergibt sich hieraus

11) $$n_s^2 - n_p^6 = 8\pi E_0^2 \sum \frac{k' e^4 N}{k^2 (k - m\nu^2)^2}.$$

Diese ganze Betrachtung setzt einen einfachsten Fall voraus, der in der Magnetooptik einem Medium entspricht, das den Zeeman-Effekt nur in normalen Tripletts liefert. Für eine Verallgemeinerung sind mehrere Wege offen.

Um eine Schätzung über die Größenordnung der Aufspaltung zu erhalten, kann man von einem bekannten Werte der elektrischen Doppelbrechung eines im sichtbaren Spektrum durchsichtigen Körpers ausgehen, diese ganz auf einen ultravioletten Absorptionsstreifen begründen und damit den Parameter k' berechnen.

Eine solche Überlegung — die natürlich sehr unsicher ist, führt auf eine außerordentlich kleine Aufspaltung.

3) Gegenüber den vorstehend rekapitulierten Resultaten jener einfachsten möglichen Vorstellungen zeigen nun die Starkschen Beobachtungen neben der allgemeinen Übereinstimmung bez. der Polarisationsverhältnisse und der Beziehungen zwischen den Wahrnehmungen parallel und normal zu den Kraftlinien völlig fremde Züge, so daß auf den ersten Blick eine Verfolgung des früher eingeschlagenen Weges fast hoffnungslos erscheint. In erster Linie stellt die beobachtete lineäre Abhängigkeit der Zerlegung von der Feldstärke einen völligen Widerspruch dar. Man konnte anfangs zweifeln, ob dieses lineäre Gesetz nur vorgetäuscht wäre, und ob es sich nicht, wie in manchen Gebieten der Magnetooptik, in Wirklichkeit um eine Erscheinung handelte, die zwar eine gerade Funktion der Feldstärke ist, aber bei starken Feldern nahe lineär verläuft — also z. B. einem hyperbolischen Gesetz folgt. Die obigen Entwickelungen ergeben, daß bei Benutzung höherer Glieder derartige Gesetze approximiert werden könnten. Indessen lauten doch neuere Bekundungen von Herrn Stark und auch von Herrn Wilsar (im hiesigen Institut) so bestimmt, daß man die angedeutete Möglichkeit nicht ernstlich in Betracht ziehen kann, sondern sich mit dem lineären Gesetz abfinden muß.

Eine zweite auffallende Differenz zwischen den Starkschen Beobachtungen und den Resultaten der obigen Rechnung besteht bezüglich der Zahl der Komponenten, in welche die Spektrallinien durch das elektrische Feld zerlegt werden. Die Differenz hat indessen nicht ganz die Bedeutung, wie die vorige. Denn die früheren Rechnungen beziehen sich, wie ich wiederholt betont habe, auf den ideal einfachen Fall, der dem Zeemanschen normalen Triplett in der Magnetooptik entspricht, und der die kleinst-mögliche Zahl von Freiheitsgraden in Rechnung setzt. Es ist vielleicht ein Zufall, daß bei dem Zeeman-Effekt zuerst dieser einfachste Fall beobachtet wurde (an der blaugrünen Ca-Linie), und daß die komplizierteren erst gefunden wurden, nachdem an jenem das Zutrauen zu der Lorentzschen Theorie erwachsen war, — vielleicht ist es gleichfalls ein Zufall, daß bei dem Stark-Effekt zuerst komplizierte Fälle entgegengetreten sind.

Herr Stark hat mir übrigens brieflich mitgeteilt, daß er seit seinen beiden ersten Publikationen den einfachsten Typ einer Zerlegung in zwei Komponenten, wobei die Verschiebung der p-Komponenten größer ist als diejenige der s-, mehrfach beobachtet hat,

daß aber in diesen Fällen die Verschiebungen so klein sind, daß Messungen an ihnen bisher nicht ausgeführt werden konnten. Es wird abzuwarten sein, ob die genannten Fälle wirklich den theoretisch einfachsten Typ darstellen.

In jedem Falle wird es sich darum handeln, ob man sich Gebilde mit mehr Freiheitsgraden vorstellen kann, welche theoretisch Erscheinungen liefern, die den Beobachtungen entsprechen.

Eine dritte und wieder gewichtigere Differenz besteht zwischen der nach den obigen Rechnungen (allerdings auf Grund sehr unsicherer Daten) vermuteten und der von Herrn Stark beobachteten Größenordnung der Aufspaltung. Ich erwartete sie fast unmeßbar klein und habe demgemäß die Beobachtungen, die ich selbst zur Auffindung des elektrischen Analogons zum Zeeman-Effekt angestellt habe, hauptsächlich auf die m. E. leichter wahrnehmbaren Begleiterscheinungen des inversen Effektes (transversale Doppelbrechung in der Umgebung von Absorptionslinien) gerichtet. Herr Stark findet einen ungemein starken und deutlichen Effekt. Ich will auf diesen Widerspruch am Schluß dieser Darlegung eingehen.

4) Ich bin der Meinung, daß die vorstehend zusammengestellten Widersprüche ein Aufgeben des von mir früher eingenommenen Standpunktes zunächst noch nicht verlangen, und daß man überhaupt nach den Erfolgen, welche die Theorie der Magnetooptik in völlig erforschten Gebieten schließlich auf Grund der älteren Vorstellungen erzielt hat, Bedenken tragen sollte, um einer nur in den ersten Zügen erkannten neuen Erscheinung willen, das Alte — das allerdings altmodisch einfach ist — zu verwerfen, ohne zuvor alle Möglichkeiten seiner Anpassung an die neuen Tatsachen erschöpft zu haben. Der Zweck dieser Mitteilung ist, auf solche Möglichkeiten aufmerksam zu machen, indem darin ein neuer Typ von Wirkungen auseinandergesetzt wird, der zwar, wie der frühere, immer noch ausnahmsweise einfach ist, aber doch bemerkenswerte Züge mit den Resultaten der Starkschen Beobachtungen an Wasserstoff gemeinsam hat.

Dabei muß schon im Voraus auf ein merkwürdiges Beobachtungsresultat Bezug gnommen werden, über das noch keine Publikation berichtet, über das mir aber durch sehr freundliche Mitteilungen des Herrn Wilsar, dann des Herrn Stark Kunde geworden ist.

Herr Stark erwähnt in seiner ersten Publikation beiläufig, daß bei seinen ersten Beobachtungen des Transversalaffektes, wo das auf die H-Kanalstrahlen gelegte Kondensator-Feld beschleu-

nigend wirkte, die nach großen Wellenlängen hin liegenden s- und p-Komponenten eine größere Intensität besäßen, als die nach kleinen Wellen hinliegenden. Herr Wilsar hat mir dann mitgeteilt, daß diese Intensitätsdissymetrie sich mit dem Felde umkehre. Herr Stark hat mir dieselbe Angabe gemacht und hinzugefügt, daß die Dissymmetrie bei schwachen Kondensatorfeldern sehr beträchtlich wäre und mit wachsendem Felde, resp. mit wachsender Zerlegung schnell abnähme. Er hat hinzugefügt, daß im Gegensatz zu diesen auf den Transversaleffekt bezüglichen Angaben die Dissymetrie bei dem longitudinalen Effekt unmerklich wäre.

Meiner Meinung nach sind diese Tatsachen für die Deutung des ganzen Stark-Effektes von fundamentaler Wichtigkeit.

Es ist klar, daß wenn das Gas durch bloße Erwärmung zum Emittieren oder Absorbieren gebracht wäre, eine solche mit Umkehrung des Feldes wechselnde Dissymetrie nicht bestehen könnte. Dieselbe ist vielmehr durch spezielle innerhalb der Kanalstrahlen herrschende Verhältnisse bedingt.

Die natürlichste Deutung des Vorganges ist wohl die folgende. Die Elektronen, welche an einer H-Linie beteiligt sind, zerfallen in zwei Gruppen, deren eine die nach größeren, die andere die nach kleineren Frequenzen verschobenen Komponenten bedingt. Wirkt auf das Gas keine andere Richtungsgröße als E_0, so verteilen sich die vorhandenen Elektronen gleichmäßig auf die beiden Gruppen. Nun ist aber bei der Starkschen Anordnung außer E_0 noch eine weitere gerichtete Größe (mindestens indirekt) wirksam, das inhomogene Feld E_1 jenseits der Kathode, das die Kanalstrahlen erregt.

Dieses Feld bedingt nach den beschriebenen Beobachtungen offenbar eine Richtungseigenschaft der Jonen der Kanalstrahlen, derart, daß eine ungleiche Zahl von ihnen eine positive resp. eine negative Seite in die Richtung der Kanalstrahlen wendet. Je nachdem das Kondensator-Feld mit der (−+) oder der (+−) Richtung im Jon zusammenfällt, ist seine Wirkung bez. der Emission eine andere. Im einen Falle bewirkt das Feld die Verschiebung der Zerlegungskomponenten nach größeren, im anderen nach kleineren Wellenlängen; die ungleiche Zahl der im einen und im andern Sinne orientierten Jonen gibt dann für die p- und die s-Schwingungen die Veranlassung zu einer Intensitätsdissymmetrie in dem einen oder anderen Sinne.

Wirkt das Feld E_0 normal zu beiden Richtungen (−+) und

(+—), so fällt die Veranlassung für eine Bevorzugung der längeren oder kürzeren Wellen hinweg.

Im Vorstehenden sind im Grunde nur die früher aufgezählten Erfahrungstatsachen in anderen Worten wiedergegeben; eine spezielle Hypothese über den Mechanismus der Vorgänge ist absichtlich vermieden worden. Ich halte dies Verfahren dem Neuen gegenüber, was hier vor uns liegt, für das zunächst angemessenste.

Um aber auch etwas konkreter zu werden, will ich jetzt an einem Bild zeigen, wie Vorgänge von der fraglichen Art zustande kommen könnten.

Ich nehme an, die Jonen seien elektrisch aeolotrop influenzierbar; in jedem gebe es eine Achse C größter Influenzierbarkeit; die dazu normalen Richtungen seien (einfachst) einander gleichwertig. Die Achse C ist dann bez. der Influenzierung zweiseitig, d. h. also, wenn wir bei ihr willkürlich eine $+C$- und $-C$-Seite festsetzen, so geschieht die Influenzierung merklich in derselben Weise, wenn die $+C$-, als wenn die $-C$-Richtung in das Feld E_0 fällt. Ist ursprünglich eine Schar derartiger Jonen sich selbst überlassen, so wird, wenn ein Feld E_0 erregt wird, die eine Hälfte von allen sich mit der $+C$-, die andere mit der $-C$-Richtung in E_0 einstellen, bez. um diese Richtung oszillieren.

Nun mag aber die für die Influenzwirkung zweiseitige Axe C bezüglich des quasielastischen Feldes, in dem die Elektronen schwingen, einseitig sein; dieses Feld sei in bezug auf C dissymetrisch, im übrigen rings um C von rotatorischer Symmetrie. Ferner gebe ein inhomogenes Feld, wie z. B. in unserem Falle E_1, eine Bevorzugung der einen, z. B. der $+C$-Achse.

Dann werden von den durch die Kathoden tretenden Jonen mehr das $+C$-Ende in die Bewegungsrichtung kehren, als das $-C$-Ende. Bei der Einstellung in einem parallel E_1 wirkenden homogenen Felde E_0 werden somit auch mehr Jonen ihre Gleichgewichtslage mit der $+C$-Axe in der Richtung der Kanalstrahlen haben, als die $-C$-Achse. Es wird also das quasielastische Feld in der ersten Orientierung öfter zur Geltung kommen, als in der zweiten. Da aber das quasielastische Feld dissymmetrisch nach C ist, so werden Intensitätsdissymmetrien auftreten, die sich bei Umkehrung von E_0 selbst umkehren. Wirkt E_0 normal zu E_1, so kommt die ursprüngliche Bevorzugung der $+C$-Richtung nicht zur Geltung: die Dissymmetrie verschwindet.

Auch die Abnahme der Dissymmetrie beim Transversaleffekt mit wachsender Feldstärke oder Zerlegung läßt sich im Bereiche dieser Vorstellungen verständlich machen. Man kann dazu etwa

an die Reflexionen der Jonen an einander oder an den Kondensatorplatten denken, welche im Sinne der Aufhebung des richtenden Einflusses von E_1 wirken könnten. Doch soll dies nicht näher verfolgt werden.

Wie schon betont, will diese Darlegung keine Erklärung des wirklichen Vorganges bieten, sondern nur zeigen, *welche Art von Umständen* im Sinne der beobachteten umkehrbaren Intensitätsdissymmetrien wirksam sein könnten. Wahrscheinlich wird es sich in Wirklichkeit auch nicht um die Einstellung materieller Jonen im Felde handeln, für welche die statistische Mechanik heranzuziehen wäre, sondern um einen viel weniger trägen Vorgang *im Innern* der Jonen.

Für das Weitere ist das eigentliche Resultat der vorstehenden Überlegung darin zu sehen, daß die beobachteten Intensitätsdissymmetrien sich hiernach am einfachsten mit Hilfe der Annahme verständlich machen lassen, daß an den nach *großen* und den nach *kleinen* Wellenlängen liegenden Zerlegungskomponenten *zwei verschiedene Gruppen von Jonen beteiligt sind*. Diese Deutung ist übrigens, wie ausdrücklich betont werden möge, durchaus im Sinne der *Absorptions*theorie gemacht, welche die *Gesamt*stärke einer Absorptionslinie im Wesentlichen nur von der Anzahl der an ihr beteiligten Elektronen abhängig macht und die demgemäß Gleiches für die Emissionslinien vermuten läßt.

5) Nach diesen Darlegungen ist der theoretische Ansatz für den einfachsten geometrisch-symmetrischen Typ des Stark-Effektes unmittelbar gegeben.

Sind die Elongationen eines Elektrons gegen ein Achsensystem A, B, C durch a, b, c, gegeben, so ist die einfachste Form[1]) des dissymmetrischen Potentiales gegeben durch

$$\varphi = \tfrac{1}{2}k(a^2 + b^2 + c^2) + \tfrac{1}{2}k_1(a^2 + b^2)c + \tfrac{1}{2}k_2 c^3.$$

Für kleine Elongationen, wie sie eine Lichtwelle *ohne* Einwirkung eines äußeren Feldes gibt, sind die Glieder mit k_1 und k_2 unmerklich; hier verhält sich das Medium isotrop und besitzt eine Eigenfrequenz ν_0, gegeben durch

$$\nu_0^2 = k/m.$$

1) Der Ansatz, den neuestens Herr Garbasso (Phys. Zeitschr. 15, 123, 1914) für ein solches Potential giebt, ist nicht richtig. Ein Glied mit $(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}$ ist nicht dissymmetrisch. Allgemeine Erörterungen über dissymmetrische Potentiale finden sich in meiner Magneto- und Elektrooptik p. 363 u. f.

Wirkt dagegen ein Feld E_0 parallel der festen Z-Achse, so stellt sich in einem Teil aller Jonen die $+C$-, in dem andern die $-C$-Richtung in die Z-Achse.

Hiernach sind für die beiden Teile die Potentiale

$$13)\qquad \varphi = \tfrac{1}{2}k(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2) \pm \tfrac{1}{2}k_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)\mathfrak{z} \pm \tfrac{1}{3}k_2\mathfrak{z}^3$$

mit den bez. Vorzeichen zu benutzen, und die Bewegungsgleichungen werden

$$14)\qquad \begin{aligned} m\mathfrak{x}'' &= -(k \pm k_1\mathfrak{z})\mathfrak{x},\\ m\mathfrak{y}'' &= -(k \pm k_1\mathfrak{z})\mathfrak{y},\\ m\mathfrak{z}'' &= -(k \pm k_2\mathfrak{z})\mathfrak{z} \mp \tfrac{1}{2}k_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2) + eE_0. \end{aligned}$$

Für den Gleichgewichtszustand gilt

$$15)\qquad \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{y}_0 = 0, \qquad (k \pm k_2\mathfrak{z}_0)\mathfrak{z}_0 = eE_0,$$

oder bei kleinem $k_2\mathfrak{z}_0/k$ auch

$$k\mathfrak{z}_0 = eE_0 \mp k_2(eE_0/k)^2.$$

Hieraus folgt, daß für ein ruhendes Gas, in dem die $\pm$ Zeichen je für die gleiche Anzahl Jonen gelten, die dielektrische Erregung von den Ergänzungsgliedern des Potentiales unabhängig und somit proportional zur Feldstärke ist.

Für Schwingungen innerhalb des Feldes E_0 setzen wir wieder

$$\mathfrak{x} = \xi, \qquad \mathfrak{y} = \eta, \qquad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + \zeta$$

und betrachten ξ, η, ζ als klein neben $\mathfrak{z}_0$. Dann gilt in erster Annäherung bei Rücksicht auf (15)

$$16)\qquad \begin{aligned} m\xi'' &= -(k \pm k_1\mathfrak{z}_0)\xi,\\ m\eta'' &= -(k \pm k_1\mathfrak{z}_0)\eta,\\ m\zeta'' &= -(h \pm 2k_2\mathfrak{z}_0)\zeta. \end{aligned}$$

Dies giebt also für ξ und η die Frequenz ν_s, für ζ dagegen ν_p in erster Annäherung zu

$$17)\qquad \nu_s = \nu_0\left(1 \pm \tfrac{1}{2}\frac{k_1\mathfrak{z}_0}{k}\right), \qquad \nu_p = \nu_0\left(1 \pm \frac{k_2\mathfrak{z}_0}{k}\right).$$

Nun ist in gleicher Annäherung

$$\mathfrak{z}_0 = eE_0/k,$$

somit

$$18)\qquad \nu_s = \nu_0\left(1 \pm \tfrac{1}{2}\frac{k_1eE_0}{k^2}\right), \qquad \nu_p = \nu_0\left(1 \pm \frac{k_2eE_0}{k^2}\right),$$

wobei das obere Vorzeichen für die eine, das untere für die andere Hälfte der vorhandenen Moleküle gilt. Es erscheint als naturgemäß, k_1 und k_2 als von gleichem Vorzeichen anzunehmen. Ist $k_1 = k_2$, dann gilt

$$\nu_p - \nu_0 = 2(\nu_s - \nu_0).$$

Die Beobachtungen zeigen ein Verhältnis derselben Größenordnung.

6) Die verfolgte Vorstellung ergibt somit in erster Annäherung die Zerlegung der Spektrallinie für longitudinale Beobachtung in ein Duplett, für transversale in ein Quadruplett. Die Verschiebungen sind symmetrisch in Bezug auf die feldlose Linie und der Feldstärke proportional. Die Intensitäten können nach § 4 eine für die s- und die p-Komponente zugleich auftretende und mit E_0 umkehrbare Dissymmetrie zeigen.

Hiermit sind denn die charakteristischsten Züge der von Herrn Stark an den H-Linien beobachteten Erscheinungen durch die Formeln wiedergegeben.

Daß die wirklichen Zerlegungen der H-Linien komplizierter sind, darf gewiß nicht befremden, da diese Linien doppelt sind. Vielleicht ist es bedeutungsvoll, daß Herr Stark nach brieflicher Mitteilung bei stärkeren Feldern und bei stärkerer Dispersion jetzt acht Komponenten (statt früher fünf) nachgewiesen hat, — vier p- und vier s-Komponenten. Auf naheliegende Versuche, diesen Typus zu erklären, soll noch nicht eingegangen werden, doch se bemerkt, daß dissymmetrische Verschiebungen, wie sie stattzufinden scheinen, recht wohl auf der verschiedenen Stärke der Konstituenten der H-Dupletts beruhen können. (Übrigens geben auch die obigen Formeln keine ganz strenge Symmetrie.)

Die He-Linien, welche den Stark-Effekt zeigen, galten bisher als einfach. Die komplizierten Zerlegungen, welche sie liefern, deuten aber auf eine größere Zahl von Freiheitsgraden, als sie ein einzelnes Elektron besitzt. Der zur feldlosen Lage dissymmetrische Charakter verlangt zur Erklärung ein komplizierteres Potential, als in (12) gegeben. Irgendwelche spezielle Vermutungen hierüber sind erst dann am Platz, wenn die bez. Verhältnisse durch die Beobachtung wirklich allseitig aufgeklärt sind, und das ist gegenwärtig noch nicht der Fall. Beachtenswert erscheint immerhin, daß von den He-Linien nur die Glieder der diffusen Serien den Stark-Effekt zeigen; es ist nicht unmöglich, daß diese diffuse Natur auf der Zusammenwirkung mehrerer Elektronen beruht. Der Zeeman-Effekt entscheidet diesbezüglich nicht im gegenteiligen Sinne.

7) Zum Schluß mag gemäß dem am Ende von 3) Gesagten noch auf das Verhältnis eingegangen werden, in dem die Größenordnung der Zerlegungen von dem oben erörterten Typ zu der Größenordnung der elektrischen Doppelbrechungen stehen, die sie veranlassen müssen.

Wir betrachten eine parallel der X-Achse fortgepflanzte Welle, schreiben also:

19) $$\begin{aligned} m\eta'' &= -(k \pm k_1 \mathfrak{z}_0)\eta - h\eta' + eY, \\ m\zeta'' &= -(k \pm 2k_3 \mathfrak{z}_0)\zeta - h\zeta' + eZ, \end{aligned}$$

wobei h die Dämpfungskonstante bezeichnet, und operieren mit Lösungen von der Form $e^{i\nu\left(t - \frac{x}{o}\right)}$. Dann wird

20) $$\begin{aligned} (k \pm k_1 \mathfrak{z}_0 + i h \nu - m\nu^2)\eta &= eY, \\ (k \pm 2k_2 \mathfrak{z}_0 + i h \nu - m\nu^2)\zeta &= eZ, \end{aligned}$$

und für die komplexen Brechungsindizes $\mathfrak{n}_s$, $\mathfrak{n}_p$ der s- und der p-Welle folgt

21) $$\begin{aligned} \mathfrak{n}_s^2 - 1 &= 2\pi \sum N e^2 \,\mathrm{S}\, \frac{1}{k \pm k_1 \mathfrak{z}_0 + i h \nu - m\nu^2}, \\ \mathfrak{n}_p^2 - 1 &= 2\pi \sum N e^2 \,\mathrm{S}\, \frac{1}{k \pm 2k_2 \mathfrak{z}_0 + i h \nu - m\nu^2}. \end{aligned}$$

Hierin bezieht sich S auf die Summe über zwei Glieder mit dem $+$ resp. $-$Zeichen; N ist die Anzahl aller Elektronen, die demselben Potential (12) unterliegen, und die (bei Voraussetzung eines ruhenden Körpers) hier für das $+$ und das $-$Zeichen als gleich angesehen wird; $\sum$ bezieht sich auf alle Elektronengattungen. $\mathfrak{z}_0$ kann in erster Annäherung wieder $= eE_0/k$ gesetzt werden.

Als Maß der Doppelbrechung in einem durchsichtigen Spektralbereich kann gelten

22) $$n_p^2 - n_s^2 = 4\pi E_0^2 \sum \frac{(4k_2^2 - k_1^2)\, e^4 N}{k^2 (k - m\nu^2)^{v}}.$$

Die früheren Beobachtungen ergaben die Formel (11). Beide Ausdrücke sind proportional mit E_0^2, aber der neue Ausdruck unterscheidet sich in dem Aufbau von dem alten dadurch sehr wesentlich, daß er die Parameter k_1 und k_2, welche die Aufspaltungen der Spektrallinien bestimmen, im Zähler quadratisch, der alte aber k' linear enthält, ferner daß der neue im Nenner $(k - m\nu^2)^3$ aufweist, der alte $(k - m\nu^2)^2$.

Dieser Unterschied bedingt, daß bei dem neuen Zerlegungstyp derselben Doppelbrechung viel größere Aufspaltungen entsprechen, als bei dem alten. Man könnte wieder versuchen, aus einer bei einer Flüssigkeit (z. B. Schwefelkohlenstoff) im sichtbaren Spektrum beobachteten Doppelbrechung, indem man dieselbe auf eine einzige Spektrallinie im Ultravioletten zurückführt, die Größenordnung von deren Zerlegung abzuleiten.

Indessen wäre eine solche Rechnung doch gegenstandslos, da es höchst wahrscheinlich ist, daß die insbesondere bei Flüssigkeiten beobachteten elektrischen Doppelbrechungen überwiegend eine andere Ursache haben, als vorstehend untersucht. Die Theorie von Langevin[1]) führt jene Doppelbrechungen in Flüssigkeiten auf die Orientierung ursprünglich aeolotroper Moleküle im elektrischen Felde zurück. Es mag hervorgehoben werden, daß diese Theorie keine Zerlegung der Absorptionslinien zuläßt; nach ihr kommt die Doppelbrechung nicht durch eine Verschiebung oder Zerlegung der Absorptionslinien zustande, sondern durch eine verschiedene Stärkeänderung derselben in der s- und in der p-Welle.

Bei dieser Sachlage will ich mich auf die folgende einfache Darlegung beschränken. Ich will zeigen, in welchem Verhältnis die Aufspaltungen des neuen und alten Typs bei einer und derselben Absorptionslinie stehen, wenn sie in gleichen übrigens beträchtlichen Abständen gleiche Doppelbrechungen verursachen. Die Annahme gleicher $n_p^2 - n_s^2$ gibt die Beziehung

$$23)\qquad \frac{4k_2^2 - k_1^2}{k - m\nu^2} = 2k'.$$

Nun ist die Zerlegung bei dem alten Typ nach (8)

$$\delta\nu = \frac{\nu_0 k' e^2 E_0^2}{k^3}.$$

Die Aufspaltungen der s- und der p-Komponente sind bei dem neuen Typ nach (18)

$$\delta\nu_s = \frac{\nu_0 k_1 e E_0}{k^2}, \qquad \delta\nu_p = \frac{2\nu_0 k_2 e E_0}{k^2}.$$

Hieraus folgt die Beziehung

$$\frac{(\delta\nu_p)^2 - (\delta\nu_s)^2}{k - m\nu^2} = \frac{2\nu_0\,\delta\nu}{k}.$$

1) P. Langevin, Le Radium, **9**, 249, 1910.

Handelt es sich um eine Stelle (resp. ein ν) im sichtbaren Spektrum und um eine Absorptionslinie im Ultravioletten, so kann $k - m\nu^2$ und $\frac{1}{2}k$ als von gleicher Ordnung ($\sim$) gelten; es ist dann auch

$$24)\qquad (\delta\nu_p)^2 - (\delta\nu_s)^2 \sim \nu_0 \delta\nu \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\delta\nu_p}{\nu_0}\right)^2 - \left(\frac{\delta\nu_s}{\nu_0}\right)^2 \sim \frac{\delta\nu}{\nu_0}.$$

Dies läßt hervortreten, daß $\delta\nu_s$ und $\delta\nu_p$ unvergleichlich viel größer sind, als $\delta\nu$, z. B. gut das Mehrtausendfache betragen können.

Man kann m. E. behaupten, daß, wenn man einen kleinen Teil der bei Flüssigkeiten beobachteten Doppelbrechungen auf Zerlegungen der Absorptionsstreifen in Größenordnungen, wie sie Herr Stark gefunden hat, zurückführen will, dem die Formeln nicht widersprechen.

Hiermit dürfte die dritte der im § 3 erörterten Differenzen erledigt sein.

Beobachtungen über die Abhängigkeit des Stark-Effekts von der Spannung, Feldrichtung und Wellenlänge.

Von

H. Wilsar.

Vorgelegt in der Sitzung vom 21. Februar 1914 von E. Riecke.

J. Starks hervorragende Entdeckung der Aufspaltung von Spektrallinien durch ein elektrisches Feld[1]) ergab eine neue Methode zur Untersuchung von Spektrallinien und ihren Trägern. Die Hoffnung auf diesem Wege tiefer in das Wesen der Lichtträger eindringen zu können, rechtfertigt das große Interesse, welches dieser Entdeckung entgegengebracht wird und verleiht ihr eine besondere Bedeutung.

Den bisherigen theoretischen Erwartungen entgegen bemerkte J. Stark, daß der Abstand der Komponenten bei transversalem Beobachten sich nicht proportional der 2ten Potenz der Feldstärke änderte, sondern proportional mit der ersten Potenz der Feldstärke zu verlaufen schien. Da Herr Stark diese Abhängigkeit aus Messungen bei nur wenigen verschiedenen Spannungen nicht als ganz sicher, sondern nur als wahrscheinlich hinstellte, schien es wichtig den Effekt als Funktion der Feldstärke in möglichst großem Bereich zu untersuchen. Falls der Effekt linear mit der Spannung variirte, so war vielleicht eine Abhängigkeit von der Feldrichtung zu erwarten. J. Stark gibt in seiner Arbeit[2]) an, daß er das Feld in der Richtung der Beschleunigung der Kanalstrah-

---

1) J. Stark, Berl. Ber. 20. Nov. 1913.

2) J. Stark, Berl. Ber. 20. Nov. 1913, S. 935.

lenteilchen anlegte. Es lag nahe, den Einfluß einer Umkehr des Feldes zu beobachten. Nebenbei sollte auch die Abhängigkeit des Effektes von der Wellenlänge an den Linien einer Serie nach Möglichkeit festgestellt werden. — Die Beobachtungen beschränkten sich auf die Serienlinien des Wasserstoffs. Beobachtet wurde transversal zum Feld und zur Kanalstrahlrichtung. Die Anordnung im Beobachtungsrohr war im Wesentlichen derjenigen von J. Stark ähnlich. In einem gewöhnlichen, 3,5 cm weiten, Kanal-

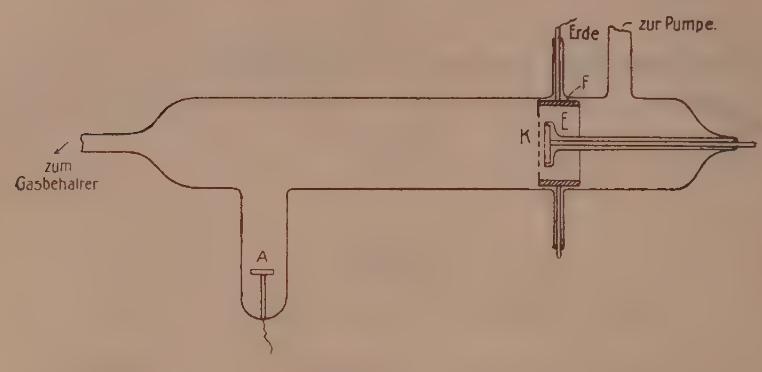


Fig. 1

strahlenrohr (Fig. 1) mit der Anode A war hinter einer Siebkathode K von 0,5 mm Dicke, die an der von der Anode abgekehrten Seite einen 1,5 cm langen röhrenförmigen Ansatz F hatte, eine Gegenelektrode E angebracht. Nur die Vorderfront der Elektrode lag frei; Seitenflächen, Rückwand und der die Platte tragende Stab waren in Glas eingebettet. Alle Metallteile waren aus Aluminium. Der röhrenförmige Ansatz F hatte einen an der Kathodenwand verlaufenden 3 mm breiten und 14 mm langen Spalt, durch den das von den Kanalstrahlen zwischen K und E angeregte Leuchten beobachtet werden konnte. Zwischen K und E wurde die felderzeugende Spannung angelegt. Die Entfernung zwischen K und E wurde zwischen 2 und 3 mm variirt.

Die Kanalstrahlen wurden mit einem Induktor erzeugt, wobei die Entladungsspannung zwischen 4 und 9 mm Funkenstrecke bei den verschiedenen Beobachtungen variirte. Der Wasserstoff strömte dauernd durch eine Kapillare zu und wurde von einer Gäde-Pumpe abgepumpt. — Um nun ohne die Entfernung KE zu verändern die Feldstärke zwischen KE in großem Bereich ändern zu können, wurde, nicht wie J. Stark es gethan hatte, als Quelle von starkem Strom, der notwendig ist um während der Jonisation durch Kanal-

strahlen die Feldstärke zwischen *K-E* aufrecht zu erhalten, eine Akkumulatoren-Batterie oder Hochspannungsdynamo benutzt, sondern eine gewöhnliche Wommelsdorfsche Influenzmaschine; dabei wurden aber parallel zu *K-E* (Fig. 1) zwei große Leidener Flaschen geschaltet. Die Influenzmaschine allein zeigte zwar auch Spannung bei *K-E* an, jedoch bestand dieselbe nur in den Momenten der Unterbrechung der durch das Induktorium erzeugten Kanalstrahlen. In den Momenten der Jonisation durch den Kanalstrahl zwischen *K* und *E* sank die Spannung und der Effekt zeigte sich nur als schwache Verwaschung der betreffenden Spektallinien. Die parallel geschalteten Kondensatoren gestatteten eine ununterbrochene Spannung konstant zu halten: während der Unterbrechung der Kanalstrahlen wurden die Kondensatoren jedesmal aufgeladen und lieferten während der Jonisationsperiode genügend Strom nach, so daß eine bestimmte Spannung aufrecht erhalten werden konnte. Durch Schwächung der Jonisation, d. h. durch weniger intensive Kanalstrahlen konnte die Spannung zwischen *K* und *E* bis zu einer beliebigen Höhe getrieben werden. Hierbei trat allerdings ein Übelstand ein: der Kreis *K-E*-Kondensatoren bildete sich zu einem Schwingungskreis aus und zwischen den Elektroden sprangen Funken über, wodurch die Spannung sehr stark schwankte. Deshalb wurde in den Kreis ein Flüssigkeitswiderstand eingeschaltet, welcher durch Dämpfung der Schwingungen das Funken beseitigte. Auf diese Weise gelang es den Effekt im Bereiche von 12000 Volt p. cm. bis zu 63000 Volt p. cm. zu beobachten. Die Spannungen wurden zum Teil mit einem Braunschen Elektrometer, zum Teil (bei höheren Werten) mit einem im physikalischen Institut konstruierten Platten-Elektrometer (nach Abraham) gemessen.

Der Effekt wurde mit Hülfe eines 3-Prismen-Spektralapparates von nicht sehr großer Lichtstärke auf Lumière-Platten „Violette Etiquette“ aufgenommen. Er konnte nur an den Linien H_β, H_γ, H_δ untersucht werden. — Die Expositionen dauerten 1,5 bis 2 Stunden.

Die Aufnahmen wurden mit dem Hartmannschen Mikrophotometer, welches Herr Prof. Hartmann in liebenswürdigster Weise zur Verfügung stellte, ausgemessen und ausphotometriert. Einen Teil der Diagramme verdanke ich der Güte des Herrn Dr. Bestelmeyer, der sie mit Hülfe des vorzüglichen von ihm konstruierten selbstregistrierenden Photometers (nach P. P. Koch) herstellte. Beiden Herrn sei an dieser Stelle gedankt.

Alle Messungen wurden nur an den *P*-Komponenten vorge-

nommen, da der Spektralapparat durch die vielen Reflexionen an den Prismen selbst polarisierend wirkte und die inneren S-Komponenten sehr stark schwächte.

Ein Teil der Aufnahmen wurde bei Feldern gemacht, welche beschleunigend auf die Kanalstrahlenteilchen wirkten, ein anderer bei bremsenden Feldern (s. unten Tabelle I).

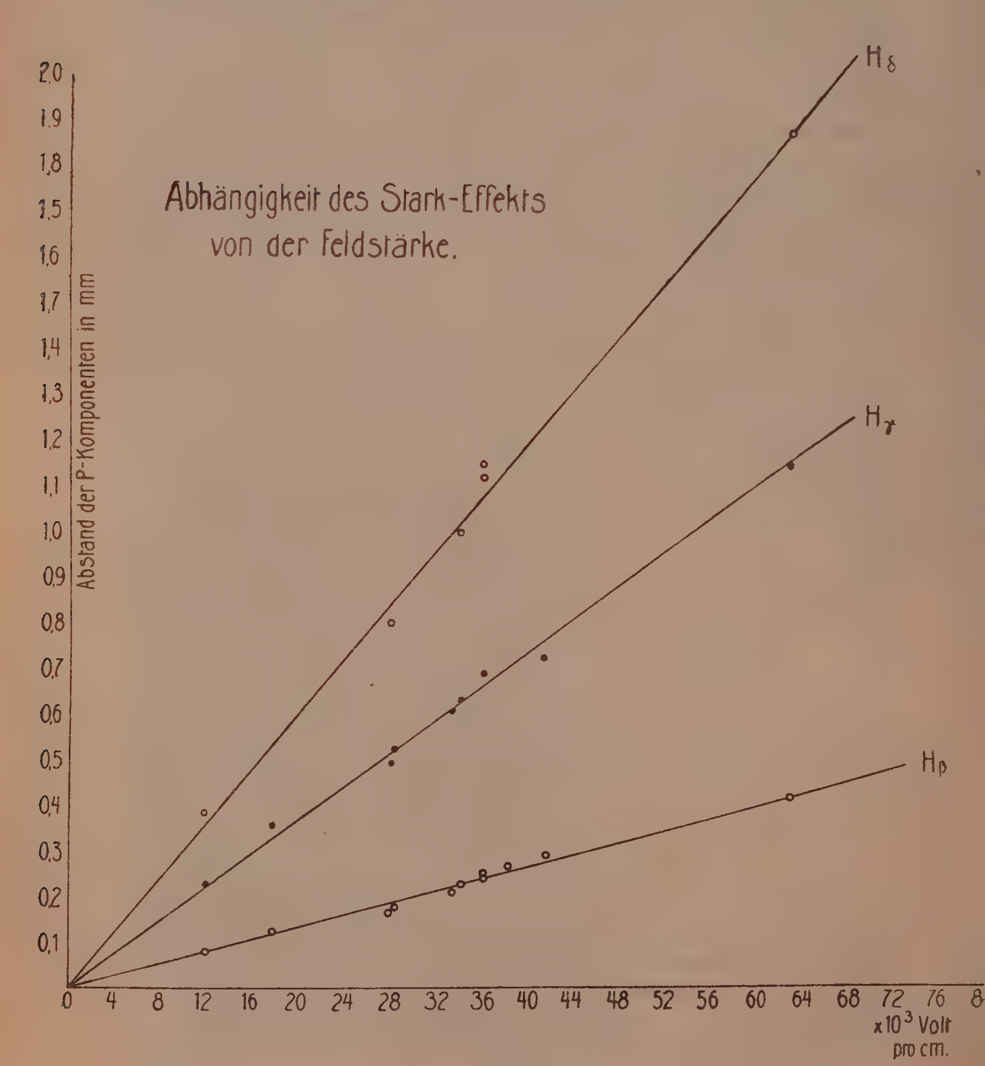


Fig. 2

Einige Aufnahmen wurden auch bei einer ein wenig abweichenden Anordnung vorgenommen: als Quelle zur Erzeugung des Feldes zwischen K und E wurde dasselbe Induktorium benutzt, welches die Kanalstrahlen erzeugte. Es wurde einfach die Anode A mit der Gegenelektrode E (Fig. 1) verbunden: dadurch wurde zwischen K und E ein die Kanalstrahlen bremsendes Feld erzeugt. Auch bei dieser Schaltung zeigte sich eine starke Zerlegung der Wasserstoff-Serienlinien, — nur konnte hierbei die Feldstärke nicht gemessen werden.

Die Abstände von Mitte einer P-Komponente bis zur Mitte der andern wurden für jede der Linien H_β, H_γ, H_δ als Funktion der Feldstärke aufgetragen. Das nebenstehende Diagramm Fig. 2 zeigt den Abstand in Abhängigkeit von der Feldstärke. — Aus dem Diagramm ist wohl mit Sicherheit zu schließen, daß für die Serienlinien des Wasserstoffs der Effekt linear mit der Feldstärke verläuft. Die geringen Abweichungen lassen sich aus den Fehlern der Messung der Abstände und aus Ungenauigkeiten bei der Spannungsmessung vollständig erklären. Bei der H_δ-Linie waren die Messungen wegen zu geringer Schwärzung auf der Platte am wenigsten genau, deshalb sind bei der H_δ-Linie im Diagramm die größten Abweichungen vom linearen Verlauf. Diese Beobachtungen bestätigen also vollständig die ersten Beobachtungen von J. Stark.

Da die Geraden H_β, H_γ, H_δ im Diagramm alle auf den Nullpunkt zuzulaufen scheinen, so ist zu erwarten, daß der Effekt nicht bei einer Minimalspannung einsetzt, sondern auch bei sehr kleinen Feldstärken schon vorhanden ist und mit genügend großer Dispersion nachgewiesen werden kann.

Die Umkehr des Feldes hat keinen Einfluß auf den Abstand der P-Komponenten. Es ist aber ein andrer Einfluß der Feldumkehr auf die Komponenten zu vermerken. Stark [1]) hatte schon konstatiert, daß auf seinen Aufnahmen sowohl bei den P-, als auch bei den S-Komponenten die Komponente der größeren Wellenlänge intensiver ist als die der kleineren Wellenlänge. Herr Stark hatte offenbar in allen Fällen ein die Kanalstrahlenteilchen beschleunigendes Feld angelegt. Bei beschleunigendem Feld zeigen auch meine Aufnahmen der P-Komponenten durchweg und zwar an der H_β, H_γ und H_δ Linie dasselbe Verhalten: die nach Rot zu liegende Komponente ist intensiver. Bei bremsendem Feld hingegen ist in allen Fällen die nach Blau zu liegende Komponente

1) J. Stark, Berl. Ber. 20. Nov. 1913, S. 938, Anmerkung.

stärker als die nach Rot zu liegende [1]) und zwar nahezu in demselben Verhältnis, wie bei beschleunigendem Feld das Umgekehrte der Fall war.

Der Vergleich der Photometerdiagramme Fig. 3 und 4 mit

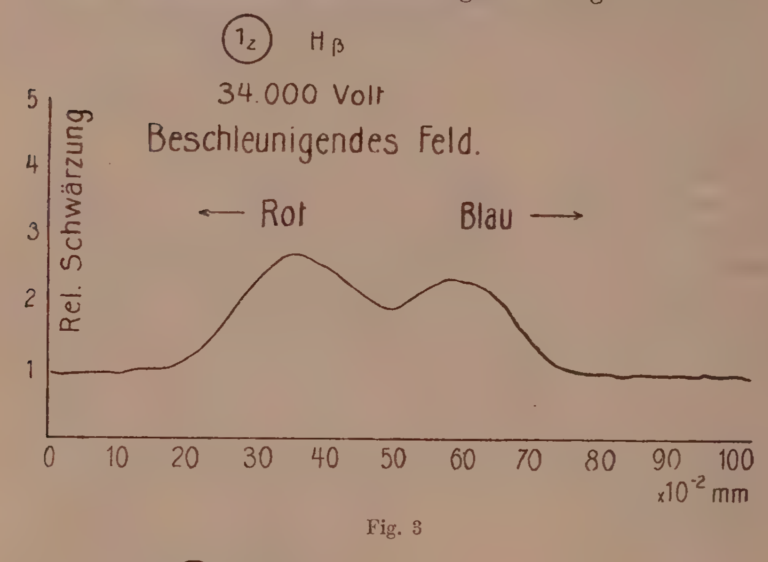


Fig. 3

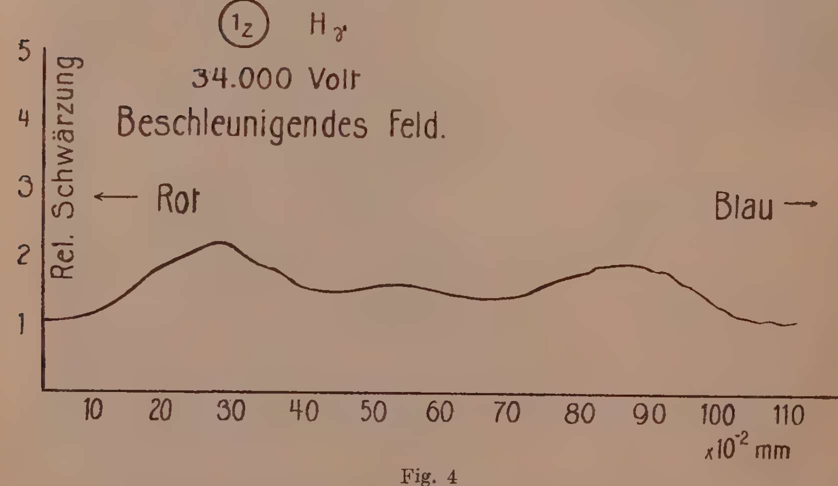


Fig. 4

1) Anmerkung: Während der Drucklegung dieser Publikation erschien in der Zeitschrift „die Naturwissenschaften" Heft 7. 1914 ein Artikel von J. Stark, aus dem zu ersehen ist, daß J. Stark und Kirschbaum zu denselben Resultaten gelangt sind.

Fig. 5 und 6 zeigt das Verhalten der Intensitäten bei der Feldumkehr.

Fig. 5

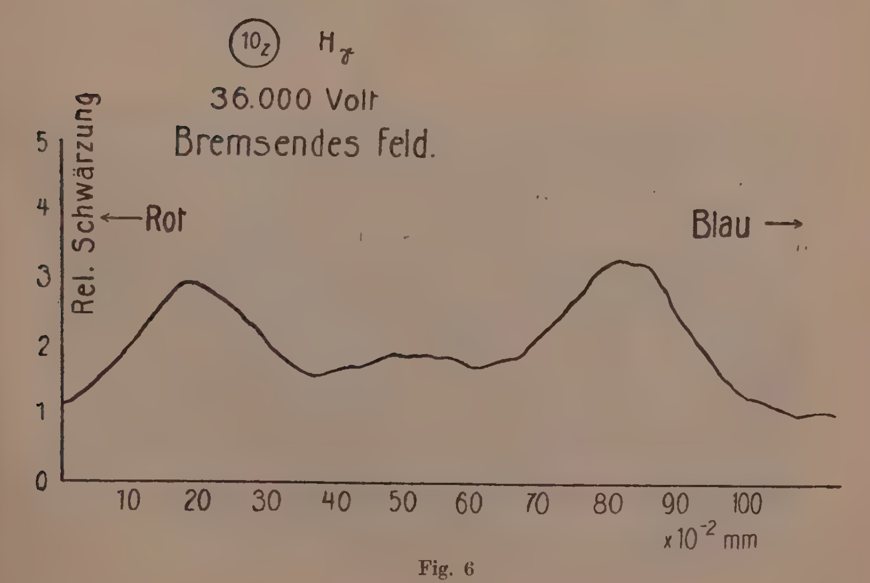


Fig. 6

Je größer die Feldstärke und je größer also die Trennung der Komponenten ist, um so mehr scheinen sich die Intensitätsunterschiede auszugleichen. Dies Verhalten zeigt ein Vergleich der Diagramme Fig. 6 und Fig. 7.

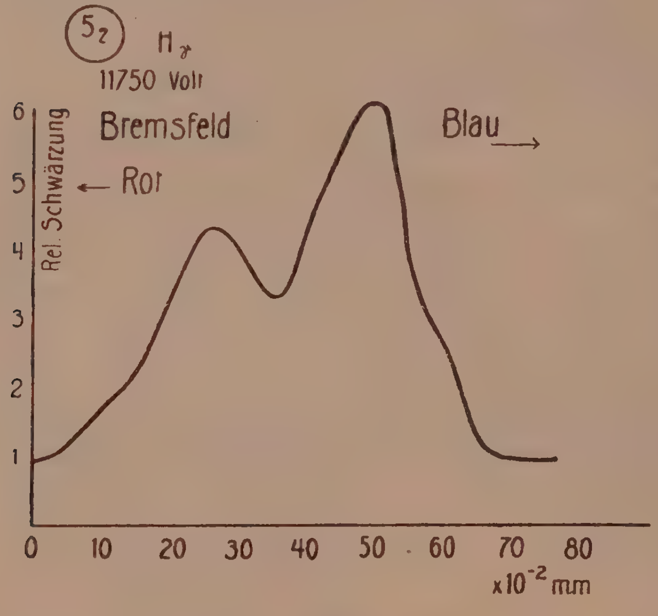


Fig. 7

Ob die Intensitätsunterschiede von der Geschwindigkeit der Kanalstrahlen abhängen, muß noch untersucht werden.

Was endlich die Änderung des Effekts in Abhängigkeit von der Wellenlänge der Serienlinien des Wasserstoffs anbetrifft, so fand J. Stark[1]), daß die Trennung sowohl für die *P*- als auch für die *S*-Komponenten mit abnehmender Wellenlänge zunimmt. Ich habe versucht für die Wasserstoffserienlinien eine quantitative Beziehung zu finden. Es standen mir dazu allerdings nur die 3 Linien: H_β, H_γ und H_δ zur Verfügung, die ich auf den 11 in Tabelle I angeführten Platten bei verschiedenen Spannungen untersucht habe. Spalte 2 gibt die Feldstärken an, in Spalte 3, 4 und 5 sind die Trennungen der *P*-Komponenten der H_β, H_γ und H_δ-Linien in Ångströmeinheiten angegeben: die letzte Spalte zeigt die Art der

1) J. Stark, Berl. Ber. 20. Nov. 1913. S. 942.

Tabelle I.

Dispersion: H_β: 40 Å pro mm; H_γ: 22,2 Å pro mm; H_δ: 18 Å pro mm.

Platte	Spannung in Volt p. cm.	Trennung der P-Komponenten $\Delta\lambda$ in Å für H_β	H_γ	H_δ	$\Delta\lambda . \lambda^4 \times 10^{-15}$ in Å für H_β	H_γ	H_δ	Richtung des Feldes
5_z	11750	3,20	5,00	6,98	1,79	1,78	1,97	Bremsung
4_z	17650	5,04	7,90	9,75	2,82	2,81	2,76	Beschleunigung
12_z	28000	6,80	11,00	14,30	3,81	3,92	4,00	Bremsung
2_{z_1}	28300	7,32	11,60	—	4,10	4,13	—	Beschleunigung
8_z	33300	8,40	13,35	—	4,69	4,75	—	Beschlennigung
1_z	34000	9,00	14,00	18,00	5,02	5,00	5,09	Beschleunigung
10_z	36000	10,00	15.40	20,50	5,58	5,49	5,80	Bremsung
11_z	36000	9,60	15,40	20,10	5,37	5,49	5,69	Bremsung
7_z	38200	10,80	—	—	6,04	—	—	Bremsung
2_{z_2}	41500	11,62	16,00	—	6,49	5,70	--	Beschleunigung
9_z	63000	16,40	25,50	33,8	9,10	9,08	9,54	Bremsung

Feldschaltung, — ob bremsendes oder beschleunigendes Feld angelegt war, — an. Es wurde gefunden, daß die Trennung der P-Komponenten nahezu umgekehrt proportional der 4ten Potenz der Wellenlänge wächst. Wenn diese Beziehung genau gilt, so muß für gleiche Felder der Ausdruck $\Delta\lambda \cdot \lambda^4 = \text{const.}$ sein, wobei $\Delta\lambda$ den Abstand zwischen den Mitten der beiden P-Komponenten einer Wasserstoff-Serienlinie bedeutet. In Spalte 6, 7 und 8 sind die Werte für $\Delta\lambda \cdot \lambda^4$ in *Å. E.* für H_β, H_γ, H_δ bei verschiedenen Feldstärken angeführt.

Die Werte zeigen eine ziemlich gute Übereinstimmung; die Abweichungen können durch Fehler der Beobachtung erklärt werden.

Die Abhängigkeit des Stark-Effekts der Wasserstofflinien von der 4ten Potenz der Wellenlänge soll aber durch diese Beobachtungen nicht mit Sicherheit als festgestellt gelten, sondern muß

durch Beobachtungen an andern Linien der Serie, insbesondere an der H_α-Linie bestätigt werden. Als Mittelwert für die beobachteten Trennungen der P-Komponenten ist der Ausdruck

$$\frac{\Delta\lambda \cdot \lambda^4}{\mathfrak{E}} = 1{,}5 . 10^{11} \qquad (1)$$

gefunden worden, wo $\mathfrak{E}$ die Feldstärke in Volt p. cm. und λ die Wellenlänge in Å. E. bedeutet. Sollte die Abhängigkeit von der 4ten Potenz der Wellenlänge exakt gelten, so muß dieser Wert (1) für die erste Nebenserie des Wasserstoffs eine Konstante sein.

Resultate.

1) Die von J. Stark gefundene lineare Abhängigkeit der Zerlegung der Spektrallinien vom elektrischen Felde wurde für die Wasserstoff-Serienlinien im Bereich von 12000 bis 63000 Volt p. cm. bestätigt.
2) Der von Stark bemerkte Intensitätsunterschied der P-Komponenten der Wasserstofflinien bei beschleunigendem Feld kehrt sich bei bremsendem Felde um.
3) Die von J. Stark konstatierte Abhängigkeit der Trennung der P-Komponenten der Wasserstofflinien von der Wellenlänge scheint nach Messungen an H_β, H_γ, H_δ umgekehrt proportional der 4ten Potenz der Wellenlänge zu verlaufen.

Physikalisches Institut der Universität Göttingen. Abteilung für Experimentalphysik.

(14. Februar 1914.)

Temperatur und Regen in Samoa 1909 und 1910 in gedrängter graphischer Darstellung.

Von

Kurt Wegener.

Vorgelegt in der Sitzung am 6. Dezember 1913 von Herrn E. Wiechert.

Mit 2 Figuren im Text und 1 Tafel.

Die umfangreichen Publikationen mancher wissenschaftlichen Expeditionen, so dankenswert sie in mancher Hinsicht sind, erfüllen ihren eigentlichen Zweck, das Beobachtungsmaterial in ausgedehntem Maße den Fachgenossen zugänglich zu machen, nur in unvollkommener Weise; denn der Umfang der Veröffentlichung bringt es mit sich, daß wegen zu hohen Preises die Arbeiten nur reichen Instituten und besonders gutgestellten Privatpersonen zugänglich werden. Der wissenschaftliche Benutzer bleibt in der Mehrzahl der Fälle bei seinen Arbeiten auf die kurzen, in Fachzeitschriften erschienenen Referate angewiesen. In diesem Punkte haben sich besondere Übelstände in der Meteorologie und im Erdmagnetismus ausgebildet, weil diese sich so gut wie ausschließlich statistischer Untersuchungsmethoden bedienen, und hierzu eines umfangreichen Zahlenmaterials bedürfen. Ein großer Teil der mühsam und meist mit erheblichen Kosten berechneten Zahlentabellen der statistischen Meteorologie aber ist nicht deshalb publiziert, weil viele Benutzer oder irgend jemand sie nun wirklich braucht, sondern weil die Möglichkeit besteht, daß irgend jemand sie später einmal vermissen würde. Dies trifft z. B. in vielen Fällen zu bei der Mitteilung von Stundenwerten; der aus ihnen ermittelte tägliche Gang hat wohl ein allgemeineres Interesse, die häufig ebenfalls publizierten Einzelwerte hingegen finden in mehr als 90 % aller Fälle keine Verwendung. Ein Bild von dem Ablauf der Witterungserscheinungen zu geben, sind sie nicht geeignet. So dienen sie nur dazu, die Bände zu füllen, die Veröffentlichung teurer und unzu-

gänglicher zu machen, und die Aufmerksamkeit des Benutzers von dem Wesentlichen abzulenken. Diese Gefahr ist in der letzten Zeit dadurch gewachsen, daß die selbstschreibenden Instrumente zu einer hohen Vollkommenheit entwickelt worden sind, so daß es relativ leichter ist als früher, Beobachtungen zu beschaffen, während die Berechnung und Publikation unverändert geblieben ist. Es scheint unter diesen Umständen angemessen, nach neuen Darstellungsformen der Ergebnisse zu suchen, um dem wissenschaftlichen Benutzer mehr als ein Referat zu geben, und ohne daß der Umfang eines solchen wesentlich überschritten, und wieder zu dem Hilfsmittel des unter der Überlast bedrückten wissenschaftlichen Arbeiters, dem Auszug gegriffen wird.

Nur selten gelangt eine Expedition heute in wirkliches Neuland. Soweit es aber nicht gelingt, neue Entdeckungen zu machen, oder neue Gesichtspunkte der Betrachtung zu finden, müßte es sicherlich richtig erscheinen, die Publikation auf das allernotwendigste zu beschränken, oder ganz auf sie zu verzichten.

Diesen Überlegungen entsprechend, habe ich den Versuch gemacht, die meteorologischen Ergebnisse der Temperatur und Regenbeobachtungen in Samoa aus den Jahren 1909 und 1910 graphisch darzustellen in einer Form, die ein leicht zu überblickendes Anschauungsmaterial liefert und wie sie ähnlich bereits Eiffel angewandt hat.

Seit rund 20 Jahren existieren von Samoa regelmäßige dreimal tägliche Terminbeobachtungen von Herrn Dr. Funk, die von der Deutschen Seewarte regelmäßig veröffentlicht sind.

1903 und 1904 sind diese Aufzeichnungen durch Parallelbeobachtungen von Herrn Dr. Tetens am Samoa-Observatorium mit Hülfe von Registrierungen auf wahre Mittelwerte reduziert worden; diese Arbeit wurde 1905 und 1906 von Herrn Dr. Linke fortgesetzt, und von beiden Observatoren das eingehend diskutierte Ergebnis der Reduktion in den Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft d. Wiss. veröffentlicht. Die Arbeit erfuhr eine Verfeinerung, soweit sie einer solchen noch fähig war, indem die von Herrn Dr. Angenheister gesammelten Beobachtungen aus den Jahren 1907 und 1908 durch Herrn Habekost nach dem Schema der Tetens-Linkeschen Abhandlung bearbeitet wurden. Auch in meinen Beobachtungsjahren 1909 und 1910 hat Herr Dr. Funk seine Beobachtungsreihe noch fortgesetzt. Seine Ergebnisse sind nicht nur in den überseeischen Beobachtungen der Deutschen Seewarte mitgeteilt, sondern auch in der Samoanischen Zeitung (in extenso), so daß eine weitere Publikation wirklich zwecklos erscheinen kann.

Wenn hier trotzdem eine solche versucht wird, so geschieht dies, weil die neue gewählte Art der Darstellung einige Erfahrungen mit einer Anschaulichkeit zeigt, die anderen zahlenmäßigen Aufzählungen fehlen würde.

Den Regen in Samoa habe ich bereits in „das Wetter“, Heft 7, 1910, für 1890—1909 graphisch mitgeteilt. Die nun gegebene Darstellung für 1909 und 1910 ist hiervon verschieden, und entspricht mehr der früher und allgemeiner üblichen.

Das für die Temperatur gewählte Bild beruht auf folgenden Voraussetzungen:

Abszisse ist wiederum die Zeit. Maxima und Minima sind von Tag zu Tag eingetragen, und erstere und letztere je durch eine Kurve verbunden. Der Zwischenraum ist durch Schraffierung als Flächenkurve gekennzeichnet. Die Kurve ist die gleiche, wie wir sie von einem automatisch schreibenden Instrument mit langer Umlaufszeit der Uhr erhalten würden, wenn die Feder desselben so schmiert, daß die aufgezeichnete Linie die gleiche Breite hat wie ein Tag in unsrer Darstellung. Wir haben also die volle Registrierung, nur mit gedrängter Zeitskala.

Das Bild zeigt den Ablauf des Wetters, bezw. der Temperatur in Samoa. Mitteltemperatur, mittlere Maxima, mittlere Minima, lassen sich bei Durchziehen der entsprechenden ausgleichenden Kurven mühelos für jeden Augenblick nicht nur für die willkürlich gewählten Monate gewinnen. Ebenso absolute Maxima und absolute Minima. Auch kommen längere Witterungsperioden zum Ausdruck; ferner macht sich der starke tägliche Temperaturgang durch die Größe der Fläche geltend; am auffälligsten aber zeigt sich, daß ein jahreszeitlicher Unterschied für die Temperaturmaxima merkwürdigerweise fast gar nicht besteht, im Gegensatz zu den Minima: Die warme Jahreszeit ist nicht dadurch charakterisiert, daß es während ihrer Dauer wärmer wird als in der kühlen, sondern daß das Sinken der Lufttemperatur stärker begrenzt ist; wohl zum Teil im Zusammenhang der stärkeren Bewölkung.

Um den typischen Verlauf des Wetters zu zeigen, habe ich ferner von der Trocken- und Regenzeit je zwei charakteristische Tage ausgesucht, und die extenso Registrierung mitgeteilt. Bei der außerordentlichen Regelmäßigkeit der Vorgänge in den Tropen möchte man glauben, daß bereits wenige solcher Kurven ein befriedigend genaues Bild von dem Verlauf Tag für Tag geben.

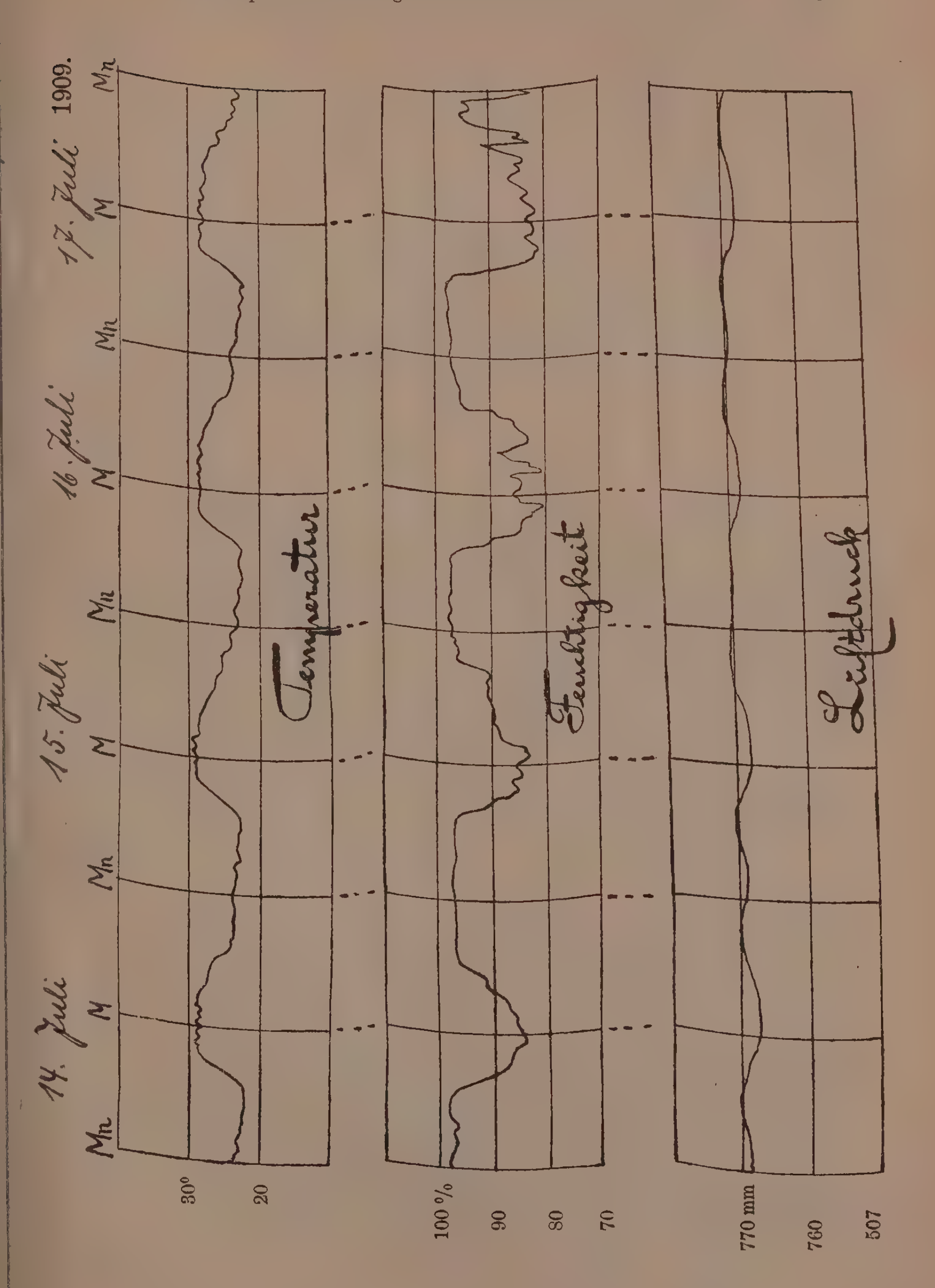
Die starke tägliche Temperatur- und Feuchtigkeitsschwankung in der Trockenzeit sei besonders vermerkt.

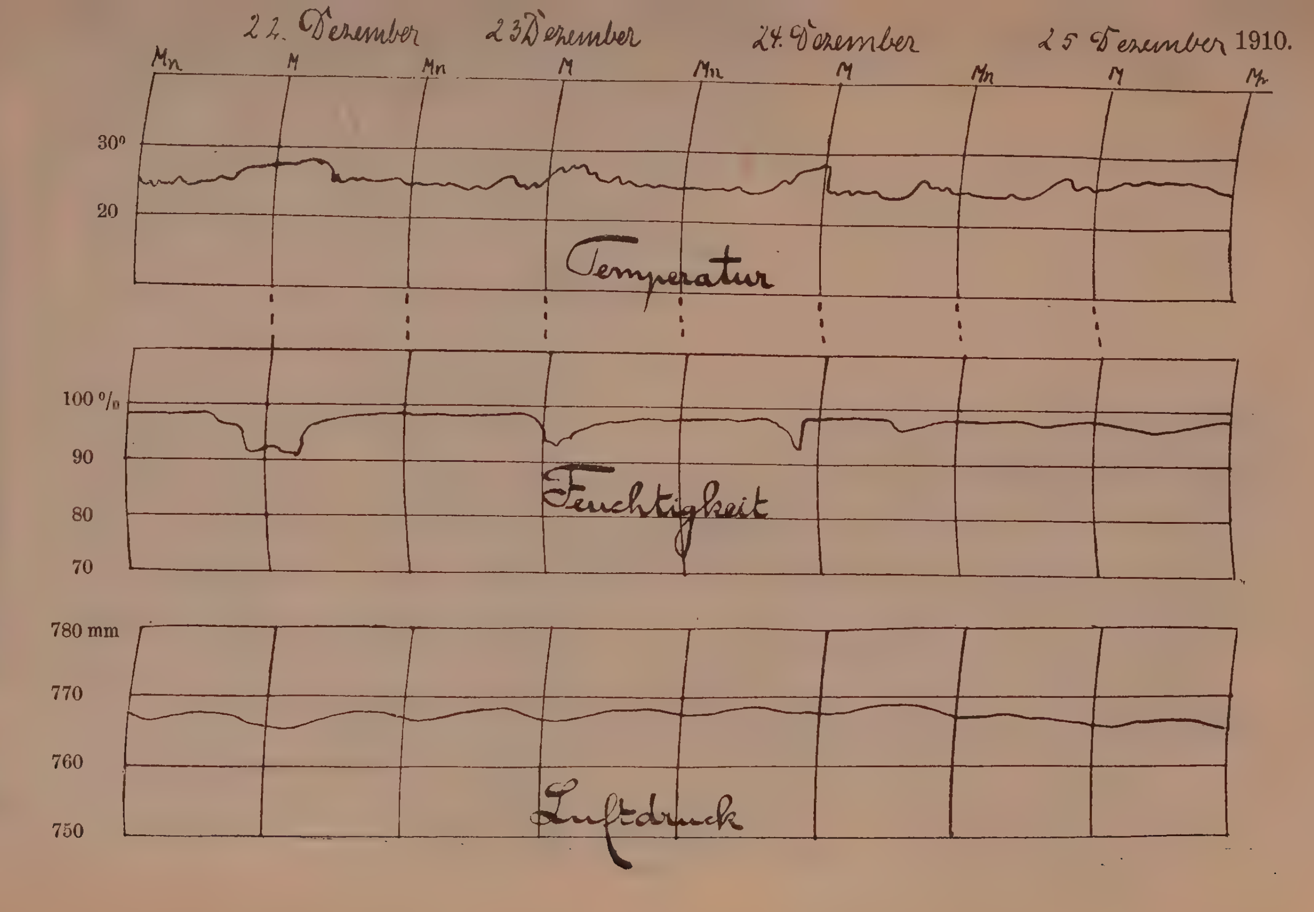
Ebenso die Unregelmäßigkeit der korrespondierenden Werte

in der Regenzeit. Die oft sprunghaft eintretende Abkühlung der Luft (24. Dez. mittags) rührt von Regen her.

Beim Luftdruck ist die regelmäßige tägliche Periode in den Tropen schon länger bekannt, auch die Tatsache, daß sie nicht superponiert über großen unperiodischen oder langperiodischen Schwankungen auftritt, sondern selbständig das Gesamtbild beherrscht. Meinte doch Alexander v. Humboldt im Scherz, daß man in den Tropen seine Uhr nach dem Barometer stellen könne! Hier wäre eine Mitteilung von stündlichen Werten also recht widersinnig.

Aber mag man selbst eine möglichst eingehende Mitteilung der Beobachtungsergebnisse an sich für sehr nützlich halten, so wird man sich in jedem Falle doch gegenwärtig halten müssen, daß der Bearbeiter und Benutzer der Ergebnisse heute unter einer Überlast von Zahlen erdrückt wird; daher muß unter allen Umständen eine präzise, lediglich das wesentlichste behandelnde knappe Publikation gefordert werden, wenn auch über das geeignetste Verfahren der Kürzung, Zusammenfassung und Veranschaulichung noch manche Versuche notwendig sein werden.


14. Juli
15. Juli
16. Juli
17. Juli 1909.
Mn
M
Temperatur
Feuchtigkeit
Luftdruck
30°
20
100 %
90
80
70
770 mm
760
750


22. Dezember
23 Dezember
24. Dezember
25 Dezember 1910.
Mn
M
30°
20
Temperatur
100 %
90
80
70
Feuchtigkeit
780 mm
770
760
750
Luftdruck

Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung.

Von

R. Courant, Göttingen.

Vorgelegt von Herrn Hilbert in der Sitzung vom 7. Februar 1914.

Die zuerst von Osgood ausgesprochene, sodann von Carathéodory und kurz darauf von Osgood und Taylor[1]) bewiesene Tatsache, daß die analytische Funktion einer komplexen Variabeln, welche das Innere eines von einer Jordanschen Kurve begrenzten Bereiches auf das Innere eines Kreises konform abbildet, auch die Ränder beider Gebiete umkehrbar eindeutig und stetig einander zuordnet, läßt sich dahin auffassen, daß die Abbildungsfunktion und ihre Umkehrfunktion im Innern der betreffenden Gebiete gleichmäßig stetig sind. Bei dieser Formulierung bietet sich leicht eine Erweiterung der Tatsache auf den Fall veränderlicher Gebiete dar, woraus sich sodann ein bemerkenswertes, zuerst von

1) Carathéodory, Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis. Math. Ann. Bd. 73. Osgood und Taylor, Conformal Transformations on the boundaries of their regions of definition. Transactions of the American math. Soc. Vol. XIV. No. 2. Man vergleiche ferner das Buch von Study: Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, II, Teubner, 1913, wo zu den Carathéodoryschen parallele Untersuchungen veröffentlicht werden, sowie die Noten von Koebe, Ränderzuordnung bei konformer Abbildung, diese Nachr. 1913, p. 286, und Carathéodory, Zur Ränderzuordnung bei konformer Abbildung, diese Nachr. 1913, p. 509, und den vierten Abschnitt einer in Crelles Journal Bd. 144 erscheinenden Arbeit: Über die Existenztheoreme der Potential- und Funktionentheorie, von mir. Schließlich erschien während der Niederschrift dieser Note in den Comptes rendus de l'Académie des sciences, Paris vom 26. Januar eine Note, in welcher von Herrn Lindelöf ein sehr kurzer und elementarer Beweis des Satzes über die Ränderzuordnung geführt wird.

Carathéodory ausgesprochenes [1]) Theorem über das Verhalten der betreffenden Abbildungsfunktionen auf dem Rande ergibt.

In der vorliegenden Note soll zunächst in § 1 der Satz über gleichmäßige Stetigkeit und damit über die Zuordnung der Ränder für ein Jordansches Gebiet formuliert und in neuer, elementarer und einfacher Art bewiesen werden. Sodann wird in § 2 und § 3 die Erweiterung für den Fall veränderlicher Gebiete vorgenommen. — Die entsprechenden Resultate und Beweismethoden bleiben bestehen, wenn die betrachteten Bereiche nicht mehr einfach, sondern n-fach zusammenhängend sind, und ebenso wenn die beschränkenden Voraussetzungen über die Natur der Begrenzung aufgegeben werden. Alle folgenden Betrachtungen sind von der Voraussetzung des einfachen Zusammenhanges ganz unabhängig. Enthält die Begrenzung mehrfache Punkte oder nicht punktförmige „Primenden“ [2]), so bleibt doch die Beweismethode von § 1 unverändert anwendbar und liefert den allgemeinen Carathéodoryschen Satz über Ränderzuordnung.

Anstatt Abbildungen auf Kreisbereiche zu betrachten, werden wir als Bildbereiche bei den Beweisen der Bequemlichkeit halber Schlitzbereiche nehmen, d. h. solche Bereiche, die aus der ganzen, durch im Endlichen liegende zur reellen Achse parallele Strecken begrenzten Ebene einer komplexen Variabeln $u + iv$ bestehen. Das Innere eines Kreises läßt sich ja ohne weiteres auf die längs einer gegebenen Strecke der reellen Achse aufgeschnittene Ebene konform abbilden, und sogar allgemein [3]) läßt sich jeder schlichte, n-fach zusammenhängende Bereich Ω der $z = x + iy$-Ebene durch eine analytische Funktion $u + iv = f(z)$ der komplexen Varibeln z auf einen solchen Schlitzbereich konform abbilden, und zwar derart, daß dabei $f(z)$ in der Umgebung eines Punktes $O(z = z_0)$ von Ω die Form hat

$$f(z) = \frac{c}{z - z_0} + f^*(z),$$

wo c eine gegebene Konstante bedeutet und $f^*(z)$ in der Umgebung von $z = z_0$ regulär ist und für $z = z_0$ verschwindet. Für

1) Ich verdanke die Kenntnis dieses Satzes einem mündlichen Gespräch mit Herrn Carathéodory, mit dessen Erlaubnis ich hier meinen Beweis publiziere. Herr Carathéodory wird an anderer Stelle seinen Beweis mitteilen.

2) Vgl. Carathéodory, Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, Math. Ann. Bd. 73.

3) Vgl. etwa meine Arbeiten, Über die Anwendung des Dirichletschen Prinzipes auf die Probleme der konformen Abbildung, Math. Ann. Bd. 71, sowie: Über die Methode des Dirichletschen Prinzipes, § 6; Math. Ann. Bd. 72.

das folgende Beweisverfahren ist das Verhalten der Kurven $u =$ const., $v =$ const. in der z-Ebene wesentlich. Diese Kurven müssen offenbar sämtlich, nach geeigneter Richtung verfolgt, in den Punkt O einmünden. Ferner sei die Bemerkung vorausgeschickt, daß das Doppelintegral $\iint |f'(z)|^2 dx dy$ existiert, wenn es über ein Gebiet Ω^0 erstrekt wird, das aus Ω durch Ausschneiden eines beliebig kleinen Kreises um O entsteht. Denn dieses Doppelintegral stellt den Flächeninhalt des Bildes von Ω^0 dar.

§ 1.

Satz I. Es sei Ω ein schlichter, von einer Jordanschen Kurve Γ begrenzter Bereich in der Ebene der komplexen Variabeln $z = x + iy$; es sei $f(z) = u + iv$ die oben definierte Funktion von z, die Ω auf die durch einen geradlinigen, zur u-Achse parallelen Schlitz begrenzte $u + iv$-Ebene abbildet, wobei etwa der Punkt O ($z = 0$) von Ω in den Punkt ∞ übergehen möge. Dann ist $f(z)$ in jedem aus Ω durch Ausschneiden eines beliebig kleinen Kreises um O entstehenden Gebiete Ω^0 gleichmäßig stetig; d.h. es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodaß für irgend zwei Punkte z und z' in Ω^0, für die

$$|z - z'| < \delta$$

gilt, die Ungleichung

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon$$

folgt.

Zum Beweise nehmen wir an, der Satz sei falsch; dann gäbe es eine positive Zahl α und eine Folge von Punktepaaren z_n, z'_n ($n = 1, 2, \ldots$) in Ω^0, derart daß

$$\lim_{n=\infty} |z_n - z'_n| = 0$$

ist, während für alle n

$$(1) \qquad |f(z_n) - f(z'_n)| > 2\alpha$$

gilt. Wir dürfen annehmen, daß die Punkte z_n, z'_n nur einen Häufungspunkt P besitzen — der übrigens wegen der Stetigkeit von $f(z)$ in Ω^0 notwendig auf Γ liegen muß. — Ferner dürfen wir voraussetzen, daß aus (1) für den Realteil $u(z)$ von $f(z)$

$$(2) \qquad |u(z_n) - u(z'_n)| > \alpha$$

folgt, da sonst diese Ungleichung jedenfalls für den Imaginärteil $v(z)$ gelten müßte, was wegen der Konstanz von v am Rande un-

möglich ist und übrigens genau so wie bei $u(z)$ zu einem Widerspruch führen würde.

Um P als Zentrum betrachten wir das Polarkoordinatensystem mit dem radius vector ϱ und der Amplitude ϑ. Für hinreichend kleines $\varrho_0 \leqq R$ wird die Kreislinie $\varrho = \varrho_0$ das Gebiet Ω^0 so durchsetzen, daß dabei O außerhalb dieses Kreises liegt. Unter r verstehen wir im folgenden eine feste, aber beliebig klein wählbare Zahl kleiner als R.

Wir betrachten nun die beiden in Ω liegenden, durch die Punkte z_n bezw. z'_n gehenden Kurven $u = u(z_n)$ und $u = u(z'_n)$, die wir mit C_n bezw. C'_n bezeichnen und verfolgen sie von O aus bis zum Punkte z_n bezw. z'_n. Da z_n, z'_n mit wachsendem n gegen P konvergieren, so liegen diese Punkte für hinreichend großes n im Kreise $\varrho = r$, und die Kurven C_n, C'_n schneiden mithin die Peripherie Π dieses Kreises. Zwischen zwei auf Π einander benachbarten Schnittpunkten von C_n bezw. C'_n mit Π kann auf Π bei hinreichend großem n, etwa $n > n_0$, kein Punkt von Γ liegen, da die Kurven C_n, C'_n in ihrem gesamten betrachteten Verlaufe keinen Punkt von Γ treffen, und da wegen der Einfachheit des Randpunktes P bei hinreichend großem n die Punkte z_n, z'_n sich durch einen beliebig kurzen ganzen in Ω liegenden Streckenzug verbinden lassen.

Daher liegt für $n > n_0$ dasjenige einfach zusammenhängende im Endlichen gelegene Gebiet G_n, das von den Kurven C_n, C'_n bis zu den oben betrachteten Schnittpunkten mit Π einerseits, und den Kreisbogen $\varrho = r$, d. h. Π, und $\varrho = R$ andererseits begrenzt wird, ganz im Innern von Ω^0. Für jedes ϱ_0 zwischen r und R wird also also der Kreis $\varrho = \varrho_0$ das Gebiet G_n derart durchsetzen, daß jedenfalls ein in G_n fallender Teilbogen dieses Kreises existiert, dessen Endpunkte auf C_n bezw. C'_n liegen und der keinen Randpunkt von Ω^0 trifft. Wegen (2) unterscheiden sich die Werte von u_n in diesen beiden Punkten gewiß absolut genommen um mehr als α. Es ist daher

$$\int \frac{\partial u(\varrho_0, \vartheta)}{\partial \vartheta} \, d\vartheta > \alpha,$$

wobei dieses Integral über den in G_n fallenden Teil der Kreislinie $\varrho = \varrho_0$ zu erstrecken ist. Also gilt zufolge der Schwarzschen Ungleichung für denselben Integrationsweg erst recht

$$\alpha^2 < 2\pi \int \left(\frac{\partial u(\varrho_0, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right)^2 d\vartheta.$$

Durch Multiplikation mit $\frac{1}{\varrho_0}$ und Integration nach ϱ_0 zwischen den Grenzen r und R folgt unter Berücksichtigung der Relationen

$$\left\{\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right)^2\right\}\varrho\, d\varrho\, d\vartheta=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy = |f'(z)|^2\,dx\,dy$$

die Ungleichung

$$\alpha^2 \log\frac{R}{r} < 2\pi \iint\limits_{(G_n)} |f'(z)|^2\,dx\,dy. \tag{3}$$

Da hierin die rechte Seite unterhalb einer von n unabhängigen festen Schranke bleibt, während bei festem R für hinreichend großes n der Radius r beliebig klein gewählt werden darf, so erweist sich die Annahme $\alpha > 0$ als widerspruchsvoll, und somit ist Satz I bewiesen.

Als eine unmittelbare Folgerung des Satzes I ergibt sich die Tatsache: Die Funktion $f(z)$ besitzt einen bestimmten Grenzwert, wenn z irgendwie in Ω gegen einen bestimmten Randpunkt rückt; d. h. jedem Punkte von Γ entspricht bei der Abbildung ein bestimmter Punkt des Schlitzes S. Es zeigt sich ferner, daß zwei verschiedenen Punkten von Γ auch zwei verschiedene Punkte des Schlitzes S entsprechen. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würden zwei Kurven C_1, C_2 in Ω^0, die von einem Punkte A in Ω^0 nach zwei verschiedenen Randpunkten P_1, P_2 auf Γ laufen, in der $u+iv$-Ebene zwei Kurven $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ entsprechen, die von einem Punkte $\mathfrak{A}$ ausgehen und in denselben Randpunkt $\mathfrak{P}$ des Schlitzes einmünden. Ist $\mathfrak{G}$ das von $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ eingeschlossene Gebiet $z(u+iv)$ die Umkehrfunktion von $f(z)$, z' ihre Ableitung, so würde die obige Betrachtung das Unendlich-Werden des Integrales $\iint\limits_{(\mathfrak{G})} |z'|^2\,du\,dv$ ergeben, was im Widerspruch zur Endlichkeit des Flächeninhaltes von Ω steht.

Bedenkt man noch, daß die entsprechenden Randpunkte auf Γ und S in gleicher Weise geordnet sein müssen, so kann man die letzten Resultate folgendermaßen zusammenfassen:

Satz II. Bei konformer Abbildung eines einfach zusammenhängenden, von einer Jordanschen Kurve begrenzten Bereiches auf einen Schlitzbereich — und ebenso auf einen Kreisbereich — sind auch die Randpunkte beider Gebiete umkehrbar eindeutig und stetig aufeinander bezogen.

§ 2.

Definition: Es seien Γ_1, Γ_2, Γ_3, ... unendlich viele Jordansche Kurven und es existiere eine Jordansche Kurve Γ, die identisch ist mit der Menge aller Punkte, welche einen mit wachsendem n gegen Null konvergierenden Abstand von Γ_n besitzen. Dann sagen wir, daß die Kurven Γ_n gleichmäßig gegen Γ konvergieren, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Ist P ein Punkt auf Γ und sind P_1, P_2 zwei Punkte innerhalb Γ, deren Abstand von P kleiner als ε ist, so lassen sich für hinreichend großes n die Punkte P_1 und P_2 durch einen ganz innerhalb Γ_n liegenden Streckenzug verbinden, dessen Länge unterhalb einer von n, P_1 und P_2 unabhängigen, mit ε gegen Null konvergierenden Schranke bleibt[1]).

Satz III. Es sei Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n, ... eine Folge von Gebieten in der Ebene der komplexen Variabeln $z = x + iy$, die sämtlich einen festen Kreis K um den Nullpunkt O des Koordinatensystemes enthalten, und die von den Jordanschen Kurven Γ_1, Γ_2, ..., Γ_n, ... begrenzt seien. Es existiere eine Jordansche Kurve Γ, gegen welche die Kurven Γ_n gleichmäßig konvergieren, und Ω sei das von ihr begrenzte, O enthaltende Gebiet.

Es seien $f_1(z)$, $f_2(z)$, ...; $f(z) = f_0(z)$ die Funktionen, die Ω_1, Ω_2, ...; Ω derart auf einen Schlitzbereich abbilden, daß dabei $\lim\limits_{z=0}\left(f_n(z) - \frac{1}{z}\right) = 0$ ist für $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dann sind diese Funktionen in ihren Definitionsbereichen, von einem beliebig kleinen Kreise um O abgesehen, gleichmäßig in n stetig, und es gilt für alle innerhalb und auf dem Rande von Ω gelegenen Punkte, von einem beliebig kleinen festen Kreise um O abgesehen, die Relation

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$$

im Sinne stetiger Konvergenz[2]).

Um den ersten Teil der Behauptung, die in n gleichmäßige Stetigkeit der Funktionen $f_n(z)$, zu beweisen, kann man unter Be-

---

1) Es ist leicht, diese Definition ihrer Beziehung auf das Innere der Kurven zu entkleiden.

2) d. h. es ist für $\lim\limits_{n=\infty} z_n = z$ auch $\lim\limits_{n=\infty} f_n(z_n) = f(z)$, wobei z_n ein in Ω_n liegender Punkt ist.

achtung der gleichmäßigen Konvergenz der Γ_n fast wörtlich so verfahren wie beim entsprechenden Nachweise des Satzes I. Man hat dabei die bekannte und leicht beweisbare Tatsache zu beachten, daß das Integral $\iint\limits_{(\Omega_n^0)} |f_n'(z)|^2 dx\,dy$ unterhalb einer von n unabhängigen Schranke bleibt, wenn es über den aus Ω_n durch Ausschneiden eines festen, beliebig kleinen, Kreises um O entstehenden Bereich Ω_n^0 erstreckt ist. — Wäre nun die Behauptung unrichtig, so gäbe es eine Zahl $\alpha > 0$ und eine Folge von Punktepaaren z_n, z_n', wobei z_n und z_n' in Ω_n^0 liegen, derart daß $\lim\limits_{n=\infty} |z_n - z_n'| = 0$ ist, während für unendlich viele, wir dürfen annehmen alle n

$$|f_n(z_n) - f_n(z_n')| > 2\alpha$$

wird. Ist also $f_n(z) = u_n(z) + i v_n(z)$, so gilt etwa

$$|u_n(z_n) - u_n(z_n')| > \alpha.$$

Sei P ein Häufungspunkt der Punktepaare z_n, z_n'; wir dürfen annehmen, daß er der einzige ist; dann können wir, indem wir um P Polarkoordinaten ϱ, ϑ einführen, genau wie in § 1 schließen. Wegen der vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz der Γ_n können wir nämlich für alle hinreichend großen n ein Gebiet G_n konstruieren, das ganz in Ω_n^0 liegt, von zwei Kreisbögen $\varrho = r$ und $\varrho = R$ einerseits und den Kurven $u_n = u_n(z_n)$, $u_n = u_n(z_n')$ andererseits begrenzt wird, wobei R fest bleibt, während r bei hinreichend großem n beliebig klein gemacht werden kann. Hieraus ergibt sich genau wie im § 1 ein Widerspruch gegen die Beschränktheit der Integrale $\iint\limits_{(G_n)} |f_n'(z)|^2 dx\,dy$.

Aus der so bewiesenen Gleichmäßigkeit der Stetigkeit von $f_n(z)$ folgt nunmehr leicht der zweite Teil der Behauptung, die stetige Konvergenz der $f_n(z)$ gegen $f(z)$. Sei nämlich z_1 ein Punkt in[1] Ω_1, z_2 ein Punkt in Ω_2 u. s. w., $z = \lim z_n$ die — einzige — Häufungsstelle der z_n, die nicht in O liegen möge, so wird behauptet, daß $\lim\limits_{n=\infty} f_n(z_n) = f(z)$ ist.

Zunächst folgt wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der $f_n(z)$ aus der Tatsache, daß v_n auf Γ_n konstant ist, die Möglichkeit, eine im Innern von Ω, und daher für $n > n_0$ auch im Innern von Ω_n verlaufende Kurve C so nahe an Γ zu ziehen, daß auf C für $n > n_0$

1) Das Wort „in" darf hier und im folgenden wegen Satz II „im Innern oder auf dem Rande" bedeuten.

die Schwankung von v_n unterhalb einer beliebig kleinen vorgeschriebenen Schranke bleibt. Also ist für $n > n_0$, $m > n_0$ auf C auch die Schwankung von $v_n - v_m$ beliebig klein. Da $v_n - v_m$ eine innerhalb C reguläre in O verschwindende Potentialfunktion ist, so folgt, daß $v_n - v_m$ für $n > n_0$ $m > n_0$ innerhalb C gleichmäßig beliebig klein ist. Somit ergibt sich die — unter Ausschluß einer beliebig kleinen Umgebung von O für jedes ganz im Innern von Ω gelegene Gebiet gleichmäßige — Konvergenz der Funktionen v_n und daher auch der Funktionen u_n in Ω. Die Funktion

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = \lim_{n=\infty} (u_n + iv_n) = u + iv$$

muß aber wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktionen $f_n(z)$ einen auf Γ konstanten Imaginärteil v besitzen, und daher, weil sie in O dieselbe polare Unstetigkeit hat wie die $f_n(z)$, mit der oben definierten Funktion $f(z)$ identisch sein. Die behauptete Stetigkeitseigenschaft der Konvergenz der $f_n(z)$ gegen $f(z)$ ist nunmehr eine unmittelbare Folge der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktionen $f(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$, ...

Die Beweise und Resultate von § 1 und § 2 gelten unverändert auch für n-fach zusammenhängende Bereiche. Im Falle eines einfach zusammenhängenden Bereiches kann man dem Resultate von § 2 durch Übergang vom Schlitzbereich zum Kreisbereiche unmittelbar die folgende Form geben:

Satz IIIa. Seien $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ... die Funktionen, die Ω_1, Ω_2, ... derart auf den Einheitskreis $|\zeta| \leqq 1$ einer komplexen ζ-Ebene konform abbilden, daß $\varphi_n(0) = 0$, $\varphi_n'(0)$ reell und positiv ist, so sind die Funktionen $\varphi_n(z)$ wie oben in n und z gleichmäßig stetig, es existiert im Sinne stetiger Konvergenz in Ω überall $\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = \varphi(z)$, und $\varphi(z)$ bildet Ω derart auf den Einheitskreis ab, daß $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(0)$ reell und positiv ist.

§ 3.

Satz IV. Es seien $\psi_1(\zeta)$, $\psi_2(\zeta)$, ... $\psi(\zeta)$ die Umkehrfunktionen der obigen Funktionen $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ... $\varphi(z)$, d. h. die Funktionen, die den Kreis $|\zeta| \leqq 1$ auf Ω_1, Ω_2, ... Ω derart abbilden, daß dabei $\psi_n(0) = 0$, $\psi_n'(0)$ reell und

positiv ist u. s. w. Dann konvergieren die Funktionen $\psi_n(\zeta)$ im ganzen Einheitskreise einschließlich des Randes gleichmäßig gegen $\psi(\zeta)$.

Wir führen den Beweis indirekt, indem wir annehmen, die Behauptung sei unzutreffend. Dann gäbe es im Einheitskreise eine Punktfolge $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$, zum Punkt ζ_h eine ganze mit h ins unendliche wachsende Zahl n_h und schließlich eine feste positive Zahl m, sodaß für alle h

$$|\psi_{n_h}(\zeta_h) - \psi(\zeta_h)| > m$$

gilt. Wir dürfen annehmen, daß die Punkte ζ_h nur eine einzige Häufungsstelle ζ_0 besitzen. Sei $\psi_{n_h}(\zeta_h) = z_h$, $\psi(\zeta_h) = z'_h$, so dürfen wir annehmen, daß die Punkte z_h bezw. z'_h je nur eine Häufungsstelle z_0 bezw. z'_0 besitzen. Jedenfalls ist

$$|z_0 - z'_0| \geqq m.$$

Nun ist nach Definition $\zeta_h = \varphi_{n_h}(z_h)$, $\zeta_h = \varphi(z'_h)$. Also ist wegen $\lim\limits_{h=\infty} \zeta_h = \zeta_0$ und der in Satz IIIa ausgesprochenen stetigen Konvergenz der $\varphi_n(z)$

$$\zeta_0 = \lim_{h=\infty} \varphi_{n_h}(z_h) = \varphi(z_0),$$

während wegen der Stetigkeitseigenschaft von $\varphi(z)$

$$\zeta_0 = \lim_{h=\infty} \varphi(z'_h) = \varphi(z'_0)$$

gilt. Da aber nach Satz II durch die Funktion $\varphi(z)$ das Innere und der Rand von Ω und dem Einheitskreise umkehrbar eindeutig auf einander bezogen sind, so ist die Relation $\varphi(z_0) = \varphi(z'_0)$ mit der Relation $|z_0 - z'_0| \geqq m > 0$ nicht vereinbar; unsere Annahme erweist sich also als widerspruchsvoll, und somit ist Satz IV bewiesen.

Ein Verfahren zur Erzwingung spontaner Krystallisation.

Von

G. Tammann.

Vorgelegt in der Sitzung am 7. Februar 1914.

Bekanntlich steht man bei präparativen Arbeiten nicht selten vor der Aufgabe, isotrope, unterkühlte Massen zur Krystallisation zu bringen.

Auch die systematische Untersuchung von schwer krystallisierenden Gläsern, besonders die saurer Silicate, Borate etc., würde wesentlich erleichtert werden, wenn man schneller und sicherer als bisher die Krystallisation in solchen Körpern hervorrufen könnte.

Zu diesem Zweck änderte man bisher die Temperatur der isotropen Masse und suchte sie in ein Temperaturgebiet zu bringen, in dem ihr spontanes Krystallisationsvermögen einen merklichen Wert hat. Da man aber dieses Temperaturgebiet in der Regel nicht kennt, so können solche Versuche zeitraubend werden und resultatlos verlaufen. Man könnte dieselben aber rationeller und daher auch erfolgreicher gestalten, wenn man die Abhängigkeit des spontanen Krystallisationsvermögens von der Temperatur berücksichtigen und sich eines hieraus ergebenden einfachen Kunstgriffes bedienen würde.

Die Bildung einer neuen Phase, gleichgültig welchen Aggregatzustandes, tritt immer nur in einzelnen, verhältnismäßig wenigen Punkten der vorhandenen Masse ein. Die Zahl dieser Punkte ist proportional der vorhandenen Masse und der Zeit und hängt im hohen Maße von der Temperatur und von Beimengungen, aber wenig vom Druck ab.

Die Tatsache, daß neue Phasen immer nur in relativ wenigen Punkten der vorhandenen Phasen entstehen, ist nur atomistisch zu

deuten, und man darf sagen, daß alle hierher gehörenden Beobachtungen uns wohl am direktesten die atomistische Struktur der Materie demonstrieren. Wie molekulare Vorgänge überhaupt den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit unterliegen, so sind auch die mit der Entstehung einer neuen Phase verknüpften Erscheinungen dem Zufall unterworfen, der erst durch eine große Anzahl von Beobachtungen des zu untersuchenden Ereignisses ausgeschaltet werden kann.

Beobachtet man die Zahl der in einer gegebenen unterkühlten Flüssigkeit während einer bestimmten Zeit gebildeten Krystallisationszentren, so findet man, daß vom Schmelzpunkt des chemisch homogenen Körpers an, bezw. von der Temperatur der Sättigung einer Komponente des homogenen Gemenges mehrerer Stoffe an die Zahl der Krystallisationszentren mit sinkender Temperatur erst langsam, dann schnell zunimmt, und dann nach Erreichung eines Maximums abnimmt[1]).

Zur Zählung der Krystallisationszentren wurde früher folgendes Verfahren benutzt. Da die lineare Krystallisationsgeschwindigkeit bei kleineren Werten derselben eine ähnliche Abhängigkeit von der Temperatur wie das spontane Krystallisationsvermögen hat, so wachsen im Unterkühlungsgebiete, in dem die lineare Krystallisationsgeschwindigkeit sehr klein ist, die entstandenen Krystallisationszentren nur sehr langsam, so daß dieselben erst nach Stunden und Tagen wahrgenommen werden können. Daher muß die unterkühlte Flüssigkeit, um in ihr die Zahl der während einer bestimmten Zeit entstandenen Krystallisationszentren zählen zu können, auf eine Temperatur gebracht werden, bei der die lineare Krystallisationsgeschwindigkeit einen merklichen Wert hat, bei der aber das spontane Krystallisationsvermögen sehr klein ist.

Nach diesem Verfahren könnte man das Temperaturintervall maximalen spontanen Krystallisationsvermögens aufsuchen und dann die Krystallisation der zu untersuchenden Masse erzwingen, indem man sie in dieses Temperaturintervall bringt. Dieses Verfahren wäre aber zeitraubend.

Erzeugt man aber in einer Flüssigkeitssäule oder einem Stabe aus dem glasartigen, zu untersuchenden Stoffe ein Temperaturgefälle, innerhalb dessen die Temperatur der maximalen Zahl von Krystallisationszentren liegt, so wird die Krystallisation nach einiger Zeit durch eine Trübung der klaren Masse in der Nähe der Temperatur maximaler Zahl von Krystallisationszentren merkbar. Mit der Zeit schreitet diese Trübung nach beiden Seiten in der

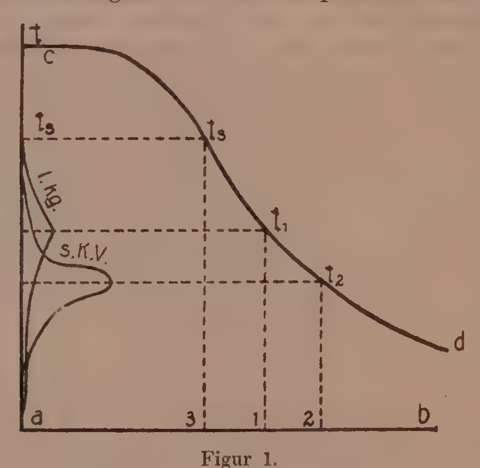
1) Zeitschr. f. phys. Chem. 25 S. 441, 1898.

Flüssigkeitssäule fort, und es können sich auch dem unbewaffneten Auge sichtbare Kryställchen bilden. Wenn die Flüssigkeitssäule in einem Glasrohr enthalten ist, so braucht man nur das Glasrohr an der Stelle, an welcher die Trübung entstanden ist, zu zerschneiden und die unterkühlte Masse, deren Krystallisation erzwungen werden soll, mit den so gewonnenen Krystallen bei einer Temperatur zu impfen, die etwas höher ist als die, welche an der Stelle der Trübung während Wirkung des Temperaturgefälles herrschte. Durch kräftiges Rühren kann bei dieser Temperatur die ganze Masse zur Krystallisation gebracht werden.

Figur 1 soll den Zusammenhang zwischen dem Temperaturgefälle, der linearen Krystallisationsgeschwindigkeit und dem spontanen Krystallisationsvermögen veranschaulichen.

Die Strecke *ab* stellt die Länge der Säule der unterkühlten Flüssigkeit vor. Trägt man die in den Querschnitten dieser Säule herrschenden Temperaturen senkrecht zur Strecke *ab* auf, so gibt die Kurve *cd* die Änderung der Temperatur in der am einen Ende erwärmten, am anderen Ende bei Zimmertemperatur erhaltenen Flüssigkeitssäule wieder.

Die Kurve *s. K. V.* stellt die Abhängigkeit des spontanen Krystallisationsvermögens von der Temperatur dar, also die Zahl



Figur 1.

der Krystallisationszentren in der Maßeneinheit pro Zeiteinheit in Abhängigkeit von der Temperatur, und die Kurve *l. Kg* gibt die Temperaturabhängigkeit der linearen Krystallisationsgeschwindigkeit.

Zwischen den Temperaturen der Maxima dieser beiden Kurven wird der Eintritt der Krystallisation durch Auftreten einer Trübung

oder durch Bildung von sichtbaren Krystallen, in der Regel von Sphärolithen, erkennbar, weil zwischen diesen beiden Temperaturen die Bedingungen für das Entstehen und das Wachsen der Krystallisationszentren günstiger sind als außerhalb dieses Temperaturintervalls.

Legt man durch die Maximalpunkte der beiden Kurven *s. K. V.* und *l. Kg* zwei Parallele zur Geraden *ab*, so schneiden diese die Kurve der Temperaturen, *cd*, in den Punkten t_1 und t_2, deren Projektionen auf *ab*, die Punkte 1 und 2 geben. Zwischen den diesen beiden Punkten entsprechenden Querschnitten der Flüssigkeitssäule wird der Eintritt der Krystallisation zuerst sichtbar werden. Von hier aus wird sie sich nach beiden Seiten der Säule hin fortsetzen. Nach höheren Temperaturen hin wird sie an der Stelle 3 der Säule Halt machen, an der die Gleichgewichtstemperatur t_s der gebildeten Krystalle mit der Schmelze herrscht. Nach tieferen Temperaturen hin wird die Grenze zwischen dem klaren Glase und der trüben entglasten Masse nur dann scharf sein, wenn die lineare Krystallisationsgeschwindigkeit bei der betreffenden Temperatur einen merklicheren Wert hat, während die Zahl der Krystallisationszentren nicht sehr groß ist. Wenn aber die umgekehrten Beziehungen bestehen, so wird diese Grenze unscharf, es werden sich an eine porzellanartige Schicht Schichten abnehmender Trübung schließen, die wegen der Kleinheit der Sphärolithe schließlich mit einer tiefblauen Färbung nach dem klaren Glase hin abschließen. Diese blaue Färbung ist besonders schön nach ungleichmäßigem Erhitzen von Röhren aus schwer schmelzbarem Jenenser Glas zu sehen.

Bestimmt man die Temperatur an der Grenze 3 zwischen den Krystallen und der Flüssigkeit, etwa durch ein Thermoelement, so kann man mit einer gewissen Annäherung die Gleichgewichtstemperatur der gebildeten Krystalle und der Flüssigkeit erfahren. Auch die Temperatur, bei der das Glas in der gegebenen Zeit nicht merklich entglast, kann man in derselben Weise erfahren. Für die Ausarbeitung von Zustandsdiagrammen schwer entglasender Gläser, bestehend aus 2 und mehr Komponenten, ist dieses Verfahren der Feststellung der Gleichgewichtstemperaturen offenbar mit Vorteil zu verwenden.

Wenn schließlich die Feststellung der Form der gebildeten Krystallarten, ihre Trennung von einander oder von eingeschlossenen Glasmassen nach irgend einem Spezialverfahren gelingt, so kann durch die Analyse ihre Zusammensetzung bestimmt werden, so daß man dann über alle Daten zur Aufstellung des betreffenden

Zustandsdiagrammes verfügt, wenn die ursprüngliche Zusammensetzung des Glases bekannt ist.

Nicht ohne Bedeutung ist die Art des Temperaturgefälles, welches zur Erzwingung der Krystallisation angelegt wird. Ein starkes Gefälle wird ceteris paribus erheblich ungünstiger sein als ein schwächeres, weil bei jenem die Masse des zu entglasenden Stoffes, die in einem bestimmten Temperaturintervall sich befindet, kleiner ist als bei diesem. Zur Schwächung des Temperaturgefälles würden sich Röhren aus Material von besonders hohem Wärmeleitungsvermögen empfehlen.

Die Anwendbarkeit der Methode sei durch zwei Beispiele belegt.

Ein Gemisch von 66 pCt. B_2O_3 und 34 pCt. Borax ($Na_2B_4O_7$) wurde in ein Platinschiffchen gegossen, das in ein schwer schmelzbares Glasrohr eingeschmolzen wurde, noch bevor es erkaltet war. Das eine Ende des Schiffchens wurde in einem durch eine Bunsenflamme geheizten Öfchen auf 750° erhitzt, während das andere Ende aus dem Öfchen in die freie Luft hinausragte.

Nach 4 Stunden bildete sich ein Sphärolith, der sich im Lauf von 2 Tagen auf etwa 1 cm verlängert hatte. Die Temperatur an seiner Grenze mit dem flüssigen Gemisch betrug etwa 700°. Nach Erkalten des Schiffchens wurde es mit kochendem Wasser behandelt, wobei sich das Glas sehr viel schneller als die krystallisierte Masse löste, die hierbei in feine lange Nadeln zerfiel. Der Schmelzpunkt dieser Nadeln lag bei 688°. Die Analyse ergab einen Gehalt von 10.89 pCt. Na. Ob sich hier ein sehr saures Borat oder ein Mischkrystall von $Na_2B_4O_7$ mit B_2O_3 gebildet hatte, könnte durch eine systematische Untersuchung einer Reihe von Gläsern mit verschiedenem B_2O_3-Gehalt entschieden werden.

Schmilzt man K_2CO_3 und SiO_2 in äquivalenten Mengen zusammen, so vertreibt bei einem Partialdruck des CO_2 von 0.07 Atm. das SiO_2 etwa 95 % des CO_2[1]. Das Gemenge von K_2SiO_3 und K_2CO_3 ist bisher nicht zur Krystallisation gebracht worden, und auch das reine K_2SiO_3 scheint nur in Form eines Glases bekannt zu sein. Im Schiffchen, das partiell auf 750° erhitzt war, machte das Eintreten der Krystallisation sich nach einer Stunde durch Auftreten einer Trübung bemerkbar. Die sehr kleinen Sphärolithe verwandelten sich im Laufe von zwei Tagen zu größeren, durchsichtigen Krystalien, zwischen denen undurchsichtigere Teile von K_2CO_3 zu erkennen waren.

---

1) v. Wittorf, Zeitschrift f. anorg. Chem. 39 S. 186, 1904.

Über analytische Funktionen mit singulärer Linie.

Von

Alfred Haar in Kolozsvár (Klausenburg).

Vorgelegt von Herrn Hilbert in der Sitzung am 7. Februar 1914.

Im Folgenden stelle ich zwei Theoreme über analytische Funktionen mit wesentlich singulärer Linie auf, die — wie mir scheint — zu den Grundlagen der Theorie dieser Funktionen gehören.

Der erste dieser Sätze gestattet eine Art „Zerspaltung" der Singularität, indem er die Möglichkeit der Zerlegung einer Funktion mit singulärer Linie in Addenden gewährleistet, von denen jeder einzelne nur einen Teil der früheren Singularitätenkurve als wesentlich singuläre Linie besitzt. Der zweite Satz hingegen gibt eine kanonische Entwicklung von Funktionen mit wesentlich singulärer Linie, die an jeder Stelle außerhalb dieser Linie gilt, und die in dieser Theorie eine ähnliche Rolle spielt, wie die Potenzreihe in der Theorie der ganzen Funktionen.

Ich beschränke mich in dieser vorläufigen Mitteilung auf den möglichst einfachsten Fall, wo die Singularitäten auf einem analytischen Kurvenstück liegen, und hoffe auf die Anwendungen dieser Sätze an anderer Stelle zurückkommen zu können.

Theorem I. *Sei $F(z)$ eine Funktion der komplexen Veränderlichen z, die außerhalb des doppelpunktlosen analytischen Kurvenstückes k (dessen Endpunkte A_1 und A_2 sein mögen), überall regulär analytisch ist, und es sei B irgend ein innerer Punkt von k; wir bezeichnen die beiden Kurvenstücke A_1B bez. A_2B mit k_1 bez. k_2. Alsdann läßt sich die Funktion $F(z)$ als Summe zweier Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ darstellen*

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z),$$

von denen die erste $F_1(z)$ *überall außerhalb des Kurvenstückes* k_1, *die zweite* $F_2(z)$ *aber überall außerhalb des Kurvenstückes* k_2 *regulär analytisch ist*[1]).

Theorem II. *Sei wiederum* $F(z)$ *eine Funktion der komplexen Veränderlichen* z, *die außerhalb des doppelpunktlosen analytischen Kurvenstückes* k *überall regulär analytisch ist. Alsdann existieren unendlichviele längst der Kurve* k *definierte stetige Funktionen*

$$f_1(\xi), f_2(\xi), f_3(\xi), \ldots, f_n(\xi), \ldots$$

so, daß für jede Stelle z, *die nicht auf der Kurve* k *liegt, die unendliche Reihe*

$$\text{(II)} \quad F(\infty) + \int_{(k)} \frac{df_1(\xi)}{\xi - z} + \int_{(k)} \frac{df_2(\xi)}{(\xi - z)^2} + \cdots + \int_{(k)} \frac{df_n(\xi)}{(\xi - z)^n} + \cdots$$

konvergiert und die Funktion $F(z)$ *darstellt; hierbei sind die Integrale im Stieltjes'schen Sinne genommen.*

Ein Spezialfall dieses allgemeinen Satzes wurde bereits — ungefähr gleichzeitig — von den Herren Pompeiu[2]) und Hellinger[3]) bewiesen, die die weitere Annahme über die Funktion $F(z)$ machen, daß sie in der ganzen Ebene, dem absoluten Betrage nach, unterhalb einer festen Grenze bleibt; sie zeigen, daß in diesem Falle schon die ersten zwei Glieder der Reihe (II)

$$\text{const.} + \int_{(k)} \frac{df(\xi)}{\xi - z}$$

zur Darstellung solcher Funktionen hinreichen. Darüber hinaus bewies Herr Hellinger, daß der letzte Ausdruck auch zur Darstellung solcher Funktionen hinreicht, die in der Umgebung ihrer singulären Linie k von geringerer als erster Ordnung unendlich werden.

Ich erblicke als wesentlichstes Moment in meinem Theorem II eben den Umstand, daß die Natur der Singularität der Funktion $F(z)$ keiner Einschränkung unterworfen ist, und nur angenommen wird, daß sämtliche singuläre Stellen dieser Funktion auf der

1) Wir bemerken, daß wir von der Funktion $F(z)$ weder Eindeutigkeit voraussetzen, noch annehmen müssen, daß k eine wesentlich singuläre Linie dieser Funktion ist (natürlich kann k eine wesentlich singuläre Linie sein). Wir setzen nur voraus, daß $F(z)$ ein solcher Zweig einer analytischen Funktion ist, dessen sämtliche singuläre Stellen auf der Kurve k liegen.

2) Comptes Rendus. 1909.

3) Journal für reine und angewandte Mathematik. 1909.

Kurve k liegen; in diesem allgemeinen Falle kommt man natürlich mit einem endlichen Teil der Reihe nicht aus.

I.

Den Beweis des ersteren der obgenannten Sätze erbringen wir in drei Schritten:

1. Durch den Punkt B der Kurve k ziehen wir eine gerade Linie g, die die Kurve k im Punkte B nicht berührt; es seien C und C' zwei Punkte auf dieser Geraden, die durch den Punkt B von einander getrennt werden und außerdem so nahe an den Punkt B liegen, daß das Geradenstück $\overline{CC'}$ mit der Kurve k außer B keinen anderen Punkt gemein hat.

Wir betrachten nun die Werte, die die gegebene Funktion $F(z)$ auf der Strecke $\overline{CC'}$ annimmt, und konstruieren eine Hülfsfunktion $\omega(z)$, deren einzige singuläre Stelle der Punkt B ist, die an keiner Stelle den Wert Null annimmt, und so beschaffen ist, daß das Produkt

$$|F(z)\,\omega(z)|$$

gegen Null zustrebt, wenn z auf der Geraden g gegen den Punkt B konvergiert.

Die Konstruktion dieser Funktion $\omega(z)$ bietet keine Schwierigkeiten. Man erkennt nämlich unmittelbar, durch Anwendung einer konformen Abbildung, die die Gerade g in die reelle Axe und den Punkt B ins Unendliche wirft, daß diese Konstruktion auf die folgende, in mannigfacher Weise lösbare Aufgabe, zurückgeführt wird:

Gesucht ist eine nirgends verschwindende ganze transcendente Funktion, die für jeden reellen Wert der Veränderlichen dem absoluten Betrage nach größer ausfällt, als eine für alle reellen Werte willkürlich gegebene reelle stetige Funktion an derselben Stelle.

2. Wir betrachten nun die Funktion

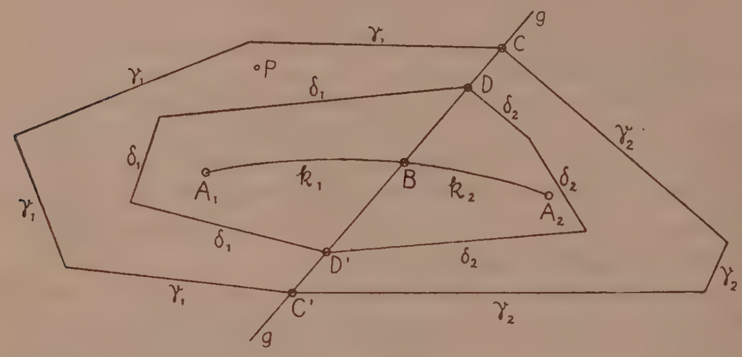
$$G(z) = \omega(z)\,F(z),$$

die ebenfalls außerhalb der Kurve k überall regulär analytisch ist und beweisen unser Theorem I vorab für diese Funktion.

Zu diesem Ende verbinden wir die beiden Punkte C und C' der Geraden g mittels einer regulären Kurve[1]) — etwa eines

1) Darunter verstehe ich eine, sich nicht schneidende, aus endlichvielen analytischen Kurvenstücken aufgebaute Kurve.

Polygonzuges — γ_1 so, daß die aus γ_1 und aus dem Geradenstück $\overline{CC'}$ bestehende geschlossene Kurve das Kurvenstück k_1 umschließt.



Figur 1.

Wir betrachten nun den Ausdruck

$$(1) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{(\gamma_1)} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2i\pi}\int_{C'}^{C} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

und behaupten, daß derselbe außerhalb der geschlossenen Kurve $\overline{CC'}\gamma_1$ eine solche analytische Funktion darstellt, deren analytische Fortsetzung (über die Kurve $\overline{CC'}\gamma_1$ hinaus) nur auf dem Kurvenstück k_1 singuläre Stellen aufweist.

In der Tat, ist z eine Stelle außerhalb der geschlossenen Kurve $\overline{CC'}\gamma_1$, so existieren beide der obgenannten Integrale ($G(\zeta)$ ist ja eine stetige Funktion auf $\overline{CC'}$) und es stellt ihre Summe eine außerhalb dieser geschlossenen Kurve reguläre analytische Funktion dar. Um zu zeigen, daß diese Funktion über diese Kurve hinaus bis an das Kurvenstück k_1 analytisch fortsetzbar ist, verfahren wir folgendermaßen:

Sei P irgendein Punkt innerhalb oder auf der geschlossenen Kurve $\overline{CC'}\gamma_1$, der aber nicht auf k_1 liegt. Wir ziehen sodann eine neue geschlossene reguläre Kurve — etwa wieder einen Polygonzug —, die k_1 umschließend ganz im Inneren der geschlossenen Kurve $\overline{CC'}\gamma_1$ verläuft, den Punkt P im Äußeren hat, und außerdem so beschaffen ist, daß ein Teil ihrer Begrenzung mit einem Stücke $\overline{DD'}$ der Geraden g übereinstimmt.

Bezeichnet nun δ_1 denjenigen Teil dieser Kurve, der von $\overline{DD'}$ verschieden ist — daß also die ganze geschlossene Kurve aus der Strecke DD' und aus der Kurve δ_1 besteht — so betrachten wir den Ausdruck

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(\delta_1)}\frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2i\pi}\int_{D'}^{D}\frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

der nun außerhalb der Kurve $DD'\delta_1$ — also insbesondere im Punkte P — jedenfalls eine analytische Funktion darstellt. Außerdem stimmt diese Funktion im Äußeren der geschlossenen Kurve $CC'\gamma_1$ mit der durch den Ausdruck (1) daselbst definierten analytischen Funktion überein, wie man sich durch Anwendung des Cauchy'schen Integraltheorems auf die geschlossene Kurve $\overline{CD}\,\delta_1\,D'C'\gamma_1$, innerhalb deren $G(z)$ regulär ist, leicht überzeugt.

Daher ist die analytische Fortsetzung der durch den Ausdruck (1) außerhalb $\overline{CC'}\gamma_1$ definierten analytischen Funktion im Punkte P regulär analytisch; also ist diese Funktion in der Tat eine Funktion, die außerhalb des Kurvenstückes k_1 keine Singularitäten aufweist.

Verbinden wir analogerweise die Punkte C und C' durch ein ähnliches Kurvenstück γ_2 so, daß die entstehende geschlossene Kurve $CC'\gamma_2$ das Kurvenstück k_2 umschließt, so sehen wir in derselben Weise, daß der Ausdruck

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(\gamma_2)}\frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \int_{C}^{C'}\frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \tag{2}$$

außerhalb der geschlossenen Kurve $\overline{CC'}\gamma_2$ eine solche analytische Funktion darstellt, deren analytische Fortsetzung nur auf dem Kurvenstück k_2 singuläre Stellen aufweisen kann.

Da aber die Summe der beiden Ausdrücke (1) und (2), außerhalb der durch die Kurvenstücke γ_1 und γ_2 gebildeten geschlossenen Kurve mit der gegebenen Funktion $G(z)$ übereinstimmt, so folgt diese Übereinstimmung für jede Stelle, wo die betrachteten drei Funktionen regulär sind, d. h. überall außerhalb der Kurve k. Mit anderen Worten, wir haben unsre Funktion $G(z)$ in zwei Addenden $G_1(z)$ und $G_2(z)$ zerlegt

$$G(z) = G_1(z) + G_2(z),$$

von denen die erste nur auf k_1, die zweite nur auf k_2 singulär werden kann.

3. Durch Division der letzten Gleichung durch $\omega(z)$, folgt

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z),$$

wobei zur Abkürzung

$$F_1(z) = \frac{G_1(z)}{\omega(z)} \quad \text{und} \quad F_2(z) = \frac{G_2(z)}{\omega(z)}$$

gesetzt ist. Da aber $\omega(z)$ nur die eine singuläre Stelle B — den Punkt, wo die Kurven k_1 und k_2 zusammenstoßen — besitzt, da ferner $\omega(z)$ an jeder Stelle von Null verschieden ist, so folgt, daß $F_1(z)$ außerhalb k_1, und $F_2(z)$ außerhalb k_2 regulär analytisch ist.

Damit ist unser Theorem I bewiesen.

Man sieht auch unmittelbar ein, daß man aus der soeben gewonnenen Zerlegung

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z)$$

alle Zerlegungen der verlangten Art dadurch erhält, daß man zu der Funktion $F_1(z)$ eine beliebige Funktion, die nur an der Stelle B singulär wird, addiert, und dieselbe Funktion von $F_2(z)$ subtrahiert.

II.

1. Unsre zweite Behauptung ist in dem Falle, wo die Kurve k mit dem zwischen -1 und $+1$ gelegenen Teile der reellen Axe zusammenfällt, eine unmittelbare Folge eines von Herrn C. Neumann herrührenden Theorems [1]), das folgendermaßen lautet:

Wir bezeichnen mit $P_n(x)$ das Legendre'sche Polynom n-ter Ordnung, mit $Q_n(x)$ die entsprechende Funktion zweiter Art, die also durch die Formeln

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n};$$

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_n(y)}{x-y}\,dy = \frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{1} \frac{(y^2-1)^n}{(x-y)^{n+1}}\,dy$$

definiert sind. Alsdann gilt die Darstellung

$$\frac{1}{\zeta - z} = P_0(\zeta)\,Q_0(z) + 3\,P_1(\zeta)\,Q_1(z) + 5\,P_2(\zeta)\,Q_2(z) + \cdots$$
$$+ (2n+1)\,P_n(\zeta)\,Q_n(z) + \cdots,$$

1) Vgl. Heine: Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., Bd. I. S. 197.

falls ζ innerhalb z außerhalb derselben Ellipse liegt, deren Brennpunkte mit den Punkten $z = \pm 1$ der komplexen Ebene übereinstimmen.

Bedeutet daher $\bar{F}(z)$ eine Funktion, die außerhalb der Strecke $[-1, +1]$ überall regulär analytisch ist, so schließt man in bekannter Weise, indem man die obige Reihe mit $\bar{F}(\zeta)$ multipliziert und über einen passend gewählten Weg integriert, die Darstellbarkeit der Funktion $\bar{F}(\bar{z})$ durch die folgende Reihe

$$(\mathrm{II}') \quad \bar{F}(\bar{z}) = \frac{1}{2i\pi}\int \bar{F}(\bar{\zeta})\, Q_0(\bar{\zeta})\, d\bar{\zeta} + \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\int \bar{F}(\bar{\zeta})\, P_n(\bar{\zeta})\, d\bar{\zeta} \,.\, Q_n(\bar{z})$$

$$= \text{const.} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{+1}\frac{A_n(y^2-1)^n}{(\bar{z}-y)^{n+1}}\, dy,$$

wobei die Konstante A_n zur Abkürzung für

$$\frac{2n+1}{2i\pi}\int \bar{F}(\bar{\zeta})\, P_n(\bar{\zeta})\, d\bar{\zeta}$$

geschrieben ist. Da aber diese Reihe in jedem, die reelle Strecke $[-1, +1]$ nicht enthaltendem Gebiet gleichmäßig konvergiert und von der verlangten Form ist, so ist unser Theorem für den vorliegenden Spezialfall damit bewiesen.

Der Beweis unsres allgemeinen Theorems II gestaltet sich nun folgendermaßen:

2. Wir bemerken vorab, daß die n-te Kugelfunktion zweiter Art

$$Q_n(\bar{z}) = \frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{1}\frac{(y^2-1)^n}{(\bar{z}-y)^{n+1}}\, dy$$

im Unendlichen von der $(n+1)$-ten Ordnung verschwindet, ferner, daß sie in der durch die Strecke $[-1, +1]$ aufgeschnittenen Ebene überall regulär analytisch ist und nur an den Stellen $\bar{z} = \pm 1$ eine logarithmische Singularität besitzt. Daraus folgt, daß zu jeder noch so kleinen positiven Zahl δ eine Konstante C_n derart existiert, daß für jede Stelle $\bar{z}$ der komplexen Ebene die Ungleichung

$$|Q_n(\bar{z})| < \frac{C_n}{\bar{r}^{\delta}}$$

besteht, wobei $\bar{r}$ die Entfernung des Punktes $\bar{z}$ von der Strecke $[-1, +1]$ bedeutet.

3. Um nun für unsre v o r g e l e g t e F u n k t i o n $F(z)$, d i e a u ß e r h a l b d e r a n a l y t i s c h e n K u r v e k ü b e r a l l r e g u l ä r

analytisch ist, die entsprechende Darstellung zu gewinnen; bilden wir konform die, durch die Kurve k aufgeschnittene z Ebene, auf die, durch die Strecke $[-1, +1]$ aufgeschnittene $\bar{z}$ Ebene ab, wobei wir annehmen, daß die beiden unendlich fernen Punkte in einander übergehen. Es seien

$$z = \varphi(\bar{z}) \text{ bez. } \bar{z} = \psi(z)$$

die korrespondierenden Funktionen, die die Abbildung der $\bar{z}$ Ebene auf die z Ebene, bez. die die Abbildung der z Ebene auf die $\bar{z}$ Ebene vermittelt. Dann ist die Funktion von $\bar{z}$

$$\bar{F}(\bar{z}) = F(\varphi(\bar{z}))$$

überall außerhalb der Strecke $[-1, +1]$ regulär analytisch und läßt sich daher in eine Reihe von der Form (II′) entwickeln, die an jeder solchen Stelle konvergiert. Daher gilt an jeder Stelle z außerhalb der Kurve k für unsre Funktion $F(z)$ die konvergente Entwicklung

$$\text{(II'')} \qquad F(z) = \text{const.} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n Q_n(\psi(z)).$$

Nun verhalten sich aber die Funktionen $Q_n(\psi(z))$ in der Nachbarschaft der Kurve k ähnlich, wie die Funktionen $Q_n(\bar{z})$ in der Nachbarschaft der Strecke $[-1, +1]$. In der Tat, aus den allgemeinen Prinzipien der konformen Abbildung schließt man leicht, in Anbetracht dessen, daß die Kurve k analytisch vorausgesetzt ist, daß die Funktion $\psi(z)$ über die Kurve k hinaus analytisch fortsetzbar ist und daß der Differentialquotient $\left|\frac{d\bar{z}}{dz}\right|$ unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. Daraus folgert man aber ohne Schwierigkeit in Folge der über $Q_n(z)$ geltenden entsprechenden Tatsache, daß $Q_n(\psi(z))$ in der Umgebung der singulären Linie k von geringerer als 1-ter Ordnung unendlich wird. Daraus folgt, nach dem in der Einleitung erwähnten Satze des Herrn Hellinger, daß es längst der Kurve k definierte stetige Funktionen $q_n(\zeta)$ gibt, so, daß der Ausdruck

$$\int_{(k} \frac{dq_n(\zeta)}{z-\zeta}$$

an jeder Stelle außerhalb k mit $Q_n(\psi(z))$ übereinstimmt.

3. Wenden wir schließlich auf das Integral

$$\int_{(k)} \frac{dq_n(\zeta)}{z-\zeta}$$

n-mal Produktintegration an, so geht dieses Integral in ein Integral von der Form

$$\int_{(k)} \frac{dg_n(\zeta)}{(z-\zeta)^{n+1}}$$

über [1]), da die bei der Produktintegration auftretenden Randglieder, wegen dem Umstande, daß $Q_n(\psi(z))$ im Unendlichen von $(n+1)$-ter Ordnung verschwindet, sicherlich hinausfallen müssen.

Es erhält daher die Reihe (II″) die verlangte Form

$$F(z) = \text{const.} + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(k)} \frac{A_n\, dg_n(\zeta)}{(z-\zeta)^{n+1}} = \text{const.} + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(k)} \frac{df_n(\zeta)}{(z-\zeta)^{n+1}}$$

und gibt daher die im Theorem II behauptete Darstellung der Funktion $F(z)$, die überall außerhalb der singulären Linie k gilt.

1) Die Funktion $g_n(\zeta)$ wird durch n-malige Integration aus der Funktion $q_n(\zeta)$ abgeleitet, und ist daher sicherlich eine stetige Funktion.

Ueber Erdbebenwellen.

VII A. Beobachtungen an Registrierungen von Fernbeben in Göttingen und Folgerungen über die Konstitution des Erdkörpers.

Von

B. Gutenberg.

Vorgelegt von E. Wiechert in der Sitzung vom 20. Juli 1912.

Mit 12 Figuren im Text und 1 Tafel.

§ 1. Einleitung.

Diese Abhandlung bildet die Fortsetzung der Arbeiten über Erdbebenwellen von Wiechert, Zoeppritz, Geiger und Gutenberg[1]), die ebenfalls in diesen Nachrichten erschienen sind, und die weiterhin als „Erdbebenwellen I, II, III, IV, V, VI" zitiert werden sollen.

Inhalt von I: Theorie der Ausbreitung der Erdbebenwellen.

„ „ II: Empirisch gewonnene Laufzeitfunktionen der 1. und 2. Vorläufer bis zu 13000 km Herddistanz, und Sinus des Einfallswinkels i als Funktion der Herddistanz.

---

1) E. Wiechert und K. Zoeppritz, Ueber Erdbebenwellen I und II, Göttinger Nachr., math.-phys. Kl., 1907.

K. Zoeppritz und L. Geiger, Ueber Erdbebenwellen III, ebenda 1909.

E. Wiechert, Ueber Erdbebenwellen IV, ebenda (im Druck).

K. Zoeppritz, L. Geiger und B. Gutenberg, Ueber Erdbebenwellen V, ebenda 1912.

L. Geiger und B. Gutenberg, Über Erdbebenwellen VI, ebenda 1912.

Inhalt von III: Berechnung von Weg und Geschwindigkeit der Vorläufer. Die Poissonsche Konstante im Erdinnern.
„ „ IV: Herglotzsche Methode zur Strahlenberechnung. Referenzfunktion.
„ „ V: Konstitution des Erdinnern, erschlossen aus der Intensität longitudinaler Erdbebenwellen. Erdbebentypen.
„ „ VI: Konstitution des Erdinnern, erschlossen aus der Intensität longitudinaler und transversaler Erdbebenwellen. Beobachtungen über den Schwingungswinkel der 2. Vorläufer und über die Perioden der Vorläufer. Neue Laufzeitfunktionen.

Dieser vorliegende VII. Teil bildet die direkte Fortsetzung der Teile V und VI und setzt teilweise deren Kenntnis voraus. In ihm werden Beobachtungen über die Laufzeiten verschiedener Erdbebenwellen und die Intensitätsverhältnisse longitudinaler Erdbebenwellen mitgeteilt. Es wird gezeigt, daß man für longitudinale und transversale Wellen für große Herddistanzen zwei einander ähnliche Geschwindigkeitsverteilungen als Funktion der Tiefe annehmen kann, die sich sowohl mit den beobachteten Intensitätsverhältnissen als auch mit den beobachteten Laufzeiten vertragen. Es ergibt sich eine neue, sehr stark ausgeprägte Unstetigkeitsfläche im Erdinnern. Schließlich werden die Perioden der ersten Vorläufer bei Beben aus sehr großer Herddistanz untersucht.

§ 2. Symbole.

Symbole, die sich auf Longitudinalwellen beziehen, werden durch lateinische, solche, die sich auf Transversalwellen beziehen, durch deutsche Buchstaben bezeichnet, und zwar setzen wir

Energie = E resp. $\mathfrak{E}$,
Amplitude = A resp. $\mathfrak{A}$,
Geschwindigkeit = V resp. $\mathfrak{V}$.

Strahlebene = Ebene durch Herd, Erdmittelpunkt, Station.

Schwingungswinkel β = Winkel zwischen Strahlebene und Schwingungsebene einer Transversalwelle.

Winkel zwischen Strahl und der Normalen = i resp. $\mathfrak{i}$.

Bodenverrückungen = u, v, w resp. $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$, wobei

$u, \mathfrak{u}$ = horizontale Komponente in der Strahlebene
$v, \mathfrak{v}$ = „ „ quer zur Strahlebene
$w, \mathfrak{w}$ = vertikale „ ist.

Vorläufer: Longitudinalwellen werden mit P, Transversalwellen mit S bezeichnet. Bei reflektierten und gebrochenen Wellen werden diese Symbole in der zeitlichen Reihenfolge der einzelnen Bögen gesetzt, gebrochene Wellen erhalten einen Strich über den Symbolen. Z. B. heißt PPP eine zweimal reflektierte Longitudinalwelle, $S\overline{P}\overline{S}$ eine zweimal gebrochene Welle, die zuerst transversal, dann longitudinal und zuletzt wieder transversal schwingt. Solche Wellen mit wechselndem Charakter heißen Wechselwellen. Symbole, die sich auf solche Vorläufer beziehen, erhalten nötigenfalls als unteren Index das Symbol dieser Welle: z. B. i_{PS}. Ein weiterer Index kann dazu verwandt werden, die Grenzfläche ihrer Lage nach zu charakterisieren.

Reflexion: Bei einer Reflexion erhalten die Symbole den unteren Index *i*, *r*, *f*, je nachdem die einfallende (incidens), reflektierte (reflecta) oder die gebrochene (fracta) Welle gemeint ist. Symbole, die sich auf die *n*-te Reflexion an der Grenzfläche beziehen, erhalten den oberen eingeklammerten Index (n), z. B. $(\mathfrak{E}_r)^{(2)}_{SPS}$ bedeutet die transversal reflektierte Energie einer Wechselwelle SPS bei der 2. Reflexion.

§ 3. Über die Herdzeiten der benutzten Beben und die Distanzen ihrer Herde von Göttingen.

In Erdbebenwellen V und VI hat es sich gezeigt, daß es vorteilhaft ist, nur Beben mit gut ausgeprägten Registrierungen zu Untersuchungen zu benutzen. Bei den in der vorliegenden Arbeit verwandten Beben trat als weitere Forderung noch hinzu, daß die Distanz des Epizentrums von Göttingen ziemlich genau bekannt sein mußte, da bei der Bestimmung der Laufzeiten, die in § 4 angegeben ist, ein Fehler in der Distanz um 3° schon recht erhebliche Fehler in der Laufzeit (bis 20 sec.) bewirken kann. Es wurden deshalb nur solche Beben ausgemessen, deren Herddistanz auf 2°, in Ausnahmefällen, die in Tabelle 1 durch ein ? gekennzeichnet sind, auf 3° sicher schien. Zunächst wurden solche Beben bevorzugt, deren Herd durch sichere makroseismische Nachrichten bekannt ist; dann wurden jedoch auch solche Beben benutzt, deren Epizentrum aus Laufzeitbeobachtungen mehrerer Stationen mit guten Zeitangaben hinreichend genau bestimmbar schien. In Tabelle 1 geben die ersten beiden Spalten Nr. und Datum des Bebens, die 3. Spalte enthält Angaben über makroseismische Beobachtungen des Bebens, über Distanzen, die aus der Differenz der Eintrittszeiten von P und S an Stationen aus der Nähe des Herdes (bis 80° Distanz) berechnet sind, und schließlich Angaben über die

Tabelle 1.

Herd und Herdzeit der benutzten Beben und ihre Distanz von Göttingen.

Nr.	Datum		Angenommene Herdzeit Min.	Angenommene Distanz °
		1904		
1	19. März	Gefühlt in Vallemar (Chile). Herdzeit aus Porto-Rico: $27^m,7$.	27,7	108
2	8. August	Gefühlt bei Wellington (Neu-Seeland). Herdzeiten aus: Wellington $50^m,3$, Batavia $50^m,2$ Perth 50,0, Manila 50,3.	50,2	171
		1905		
3	22. Januar	Distanz aus T_S-T_P: Batavia 22^0. Zikawei $17^1/_2{}^0$. Tiflis 76^0. Distanz von Göttingen nach Katalog: 96^0. Herdzeiten: Manila $45^m,5$, Batavia $43^m,1$ Zikawei 43,4, Irkutsk 44,3 Tiflis 43,6.	43,6	98
4	4/5. März	Distanz nach Katalog: 121^0. Die aus T_S-T_P berechneten Distanzen einiger Stationen stimmen mit dem im Katalog angenommenen Herd. Herdzeiten: Manila $15^m,5$, Perth $16^m,2$, Honolulu 17,5, Irkutsk 17,1 Taškent 16,8, Kodaîkanal 16,7 Tokyo 17,5, Batavia 17,2.	17,0	121
5	19. April	Distanz nach Katalog: 160^0. Distanz aus T_S-T_P: Herdzeit: Apia 9^0 $31^m,8$ Perth 65^0 30,7 Manila 76^0 30,8 Batavia 80^0 31,0.	31,2	153
6	12. Juni	Distanz nach Katalog: 128^0. Distanz aus T_S-T_P für Batavia: 60^0? Herdzeiten (nach den Distanzen im Katalog): Apia $15^m,8$, Honolulu $14^m,0$ Perth 14,7 Christchurch 14,0 Batavia 15,6.	15,0	122
7	14. Juni	Distanz nach Katalog: 157^0. Aus T_S-T_P berechnete Distanzen von Apia und Honolulu stimmen mit Katalog. Herdzeiten: Apia $29^m,1$, Christchurch $31^m,0$ Honolulu 30,0.	30,0	157
8	17. Juli	Distanz nach Katalog: 147^0. Als Distanz ergibt sich aus T_S-T_P für Apia $16^1/_2{}^0$, für Batavia 61^0. Herdzeiten: Apia $23^m,6$, Christchurch $24^m,6$, Batavia $23^m,2$	23,6	144
9	29. Sept.	Distanz nach Katalog: 114^0. Distanzen aus T_S-T_P: Apia $58^1/_2{}^0$, Irkutsk $58^1/_2{}^0$ Batavia $20^1/_2{}^0$, Krasnojarsk $69^1/_2{}^0$ Herdzeiten: Batavia $51^m,4$, Irkutsk $51^m,0$ Manila 50,7 Taškent 51,5 Zikawei 50,7 Honolulu 51,7 Apia 52,0.	51,3	114

Tabelle 1 (Fortsetzung).

Nr.	Datum	1906	Angenommene Herdzeit Min.	Angenommene Distanz °
10	31. Januar	Zerstörend in Columbien. Herdzeiten: Quito $35^{m},7$, Washington $35^{m},8$ Cheltenham 36,0, Honolulu 36,9 Baltimore 36,0.	36,0	90
11	1. Februar	Distanz nach Katalog: 139°. Herdzeiten: Honolulu $24^{m},3$, Christchurch $23^{m},7$ Manila 23,2, Batavia 28,1 Perth 24,4 bei Annahme des Epizentrums $\varphi = 10^{0}$ S., $\lambda = 170^{0}$ E. Die aus den im Katalog angegebenen Distanzen berechneten Herdzeiten differieren wesentlich stärker (außer Batavia).	24,0	136
12	19. Februar	Distanz nach Katalog: 135°. Distanz von Apia aus T_S-T_P: 28°. Herdzeiten: Apia $59^{m},5$, Honolulu $59^{m},2$ Osaka 59,4, Manila 59,3 Christchurch 60,7, Batavia 59,8.	59,5	135
13	28. März	Distanz nach Katalog: 147°. Distanz von Apia aus T_S-T_P: 19°. Herdzeiten: Apia $5^{m},1$, Batavia $7^{m},6$, Zikawei $4^{m},3$.	5,1	147
14	10. April	Distanz nach Katalog 94°. Die aus T_S-T_P berechneten Distanzen stimmen nicht mit den im Katalog angegebenen. Herdzeiten: Victoria $21^{m},5$, Toronto $21^{m},8$ Quito 22,6, Honolulu 22,9 Porto Rico 22,3, Apia 23,2.	22,5	96
15	14. April	Gefühlt in Tanna (Neue Hebriden). Herdzeiten: Apia $57^{m},4$, Perth $57^{m},2$, Honolulu $57^{m},9$ Manila 57,6, Tokyo 57,6, Osaka 57,6 Batavia 57,5.	57,5	147
16	25. April	Gefühlt im Süden der Philippinen. Herdzeiten: Manila $34^{m},4$, Batavia $34^{m},3$, Osaka 35,5, Taškent 33,4 Tiflis 34,4, Honolulu 34,4.	34,4	101
17	5. Mai	Gefühlt in Arica (Nordchile). Herdzeiten: Porto Rico $21^{m},0$, Tacubaya $20^{m},6$.	20,8	101
18	1. Juni	Distanz nach Katalog: $116^{1}/_{2}{}^{0}$. Distanzen aus T_S-T_P: Zikawei 35°, Apia 50°, Honolulu 65° Irkutsk $60^{1}/_{2}{}^{0}$, Taškent $79^{1}/_{2}{}^{0}$. Herdzeiten (nach Katalog): Manila $29^{m},6$, Christchurch $30^{m},8$ Osaka 30,8, Honolulu 31,2 Batavia 30,0, Irkutsk 29,8 Zikawei 30,3, Taškent 29,4 Apia 31,0.	30,2	116
19	26. August	Gefühlt in Neu-Guinea. Distanz aus T_S-T_P: Osaka 36°, Zikawei 45° Perth 40°, Irkutsk $61^{1}/_{2}{}^{0}$. Herdzeiten (nach Katalog): Manila $59^{m},2$, Osaka $60^{m},5$ Perth 59,9, Batavia 60,3 Zikawei 59,2, Irkutsk 60,5.	60,0	121

Tabelle 1 (Fortsetzung).

Nr.	Datum	1906 (Fortsetzung)	Angenommene Herdzeit Min.	Angenommene Distanz °
20	30. August	Gefühlt in Tacna und Arica (Nordchile). Herdzeiten: Porto Riko 37^m,7, Tacubaya 38^m,2 Cheltenham 38,1, Baltimore 37,8.	38,0	101
21	6. Sept.	Distanz nach Katalog: 150°. Distanz von Apia aus T_S-T_P: 10¼°. Herdzeiten: Apia 58^m,5, Batavia 57^m,7.	58,1	148
22	14. Sept.	Gefühlt auf Bismarckarchipel und Kaiser-Wilhelmsland. Herdzeiten: Apia 3^m,9, Sydney 4^m,4, Manila 4^m,3 Osaka 4,6, Batavia 4,5, Zikawei 4,5.	4,4	121
23	2. Okt., 2^h	Distanz nach Katalog: 121°. Distanz, berechnet aus T_S-T_P: Perth 39°, Apia 42°. Herdzeiten: Manila 51^m,3, Osaka 51^m,7 Batavia 51,4, Apia 51,0 Christchurch 51,3, Irkutsk 51,3 Perth 51,7, Zikawei 50,9 Honolulu 51,5.	51,3	121
24	14. Nov.	Distanz nach Katalog: 150°. Distanzen aus T_S-T_P: Apia 18°, Sydney 23°. Herdzeiten (nach Katalog): Apia 37^m,0, Manila 36^m,7 Sydney 37,7, Batavia 37,5.	37,2	150
25	19. Nov.	Gefühlt an der Küste Australiens von Albany bis zur Sharks Bay. Herdzeiten: Sydney 16^m,1, Tokyo 16^m,7 Taškent 18,2, Batavia 16,1 Manila 16,8, Osaka 17,0 Zikawei 16,9, Apia 18,1.	17,0	118
26	18. Dez.	Auf den Tonga-Inseln gefühlt. Herdzeiten: Perth 59,^{m}3, Manila 58^m,9 Batavia 58^m,8.	59,0	147
27	19. Dez.	Gefühlt in Vavau (Tonga). Herdzeiten: Apia 14^m,7, Honolulu 14^m,5 Manila 14,1, Batavia 14,1.	14,3	147
		1907		
28	2. Januar	In Tonga gefühlt. Distanz von Apia aus T_S-T_P: 8°. Herdzeit nach Apia 55^m,5.	55,5	150
29	31. März	In Tonga gefühlt. Distanzen aus T_S-T_P: Apia 6°, Manila 66½°. Herdzeiten: Apia 0^m,0, Manila 0^m,7.	0,4	145
30	15. April	Chilpancingo (Mexiko) zerstört. In „Erdbebenwellen V“ als Nr. 23.		87½
31	31. Mai	In Tonga gefühlt. Distanz aus T_S-T_P von Apia 6°. Herdzeit aus Apia 43^m,0.	43,0	147
32	1. Juni	Gefühlt in Guayaquil (Ecuador).		92
33	22. Sept.	Gefühlt in Koshun (Formosa).		84
34	15. Dez.	Distanzen aus T_S-T_P: Zikawei 37°, Apia 22°, Tiflis 85°. Herdzeiten: Zikawei 34^m,9, Apia 34^m,4. Alle Angaben sind unsicher.	34,5	120

Tabelle 1 (Fortsetzung).

Nr.	Datum	1908	Angenommene Herdzeit Min.	Angenommene Distanz °
35	15. März	Distanz von Apia aus T_S-T_P: 13°. Herd nord-südlich von Apia. Herdzeit nach Apia: $8^m,7$.	8,7	156
36	26/27. März	Chilapo in Mexiko zerstört. In „Erdbebenwellen V" als Nr. 37.		87½
37	27. März	In Mexiko gefühlt. In „Erdbebenwellen V" als Nr. 38.		86
38	5. Mai	Im NE von Celebes gefühlt. Distanzen aus T_S-T_P: Manila 10½°, Zikawei 28°. Apia 64°. Herdzeiten: Manila $18^m,7$, Zikawei $18^m,4$, Apia $17^m,5$.	18,2	104
39	20. Oktober	In Manila gefühlt. Herdzeit nach Manila ($\varDelta = 1°$): 40^m.	40	91½
40	11. Nov.	Herd im Süden der Panay-Insel (Philippinen). Distanz von Manila aus T_S-T_P: 5°.		95
		1909		
41	22. Februar	In Apia sind keine Vorläufer registriert.		146
42	13. März	In „Erdbebenwellen V" als Nr. 49. Distanzen aus T_S-T_P: Manila 30°, Tsingtau 21°, Tiflis 76°. Herdzeiten: Manila $28^m,0$, Tsingtau $25^m,6$, Tiflis $28^m,6$.	28,3	86
43	10. April	Herd ca. 200 km südlich von Apia. Herdzeit nach Apia ($\varDelta = 3°$): $27^m,3$.	27,3	147
44	3. Juni	In Singapore gefühlt.		92
45	8. Juni	In Copiapio (Chile) gefühlt.		109
46	30. Juli	In Chilpancingo (Mexiko) gefühlt. In „Erdbebenwellen V" als Nr. 51.		87½
47	31. Juli	In Chilpancingo gefühlt.		87½
48	7. August	Distanzen aus T_S-T_P: Apia 10°, Sydney 30°. Herdzeit aus Sydney $49^m,5$.	49,5	148
49	14. August	Gefühlt in Centraljapan. In „Erdbebenwellen V" als Nr. 52.		80
50	18. August	Distanz aus T_S-T_P: Apia 22°, Sydney (21°), Batavia 63°. Herdzeit: Apia $37^m,5$, Sydney ($39^m,2$), Batavia $39^m,3$.	39,0	145
51	31. Oktober	Schwach gefühlt im westl. Mexiko. Distanz aus T_S-T_P: Ottawa 35°, Mexiko 3°. Herdzeiten: Ottawa (23^m), Mexiko $23^m,2$. In „Erdbebenwellen V" als Nr. 55.	23,2	89
52	21. Nov.	Im nördl. Formosa zerstörend.		82
53	9. Dez., 15^h	Distanz aus T_S-T_P: Sydney 26°, Batavia 56°. Herdzeit: Sydney $33^m,7$, Batavia $33^m,5$.	33,6	135
54	9. Dez., 23^h	Gefühlt in Guam (Ladronen). Distanz aus T_S-T_P: Tsingtau 29°, Batavia (39°), Sydney 50°. Herdzeit: Tsingtau $28^m,9$, Batavia $29^m,8$, Sydney $28^m,0$.	29,0	104

Tabelle 1 (Fortsetzung).

Nr.	Datum	1910	Angenommene Herdzeit Min.	Angenommene Distanz °
55	30. Januar	Herd nahe der Macquari-Insel. Distanz von Sydney aus Ts-Tp: 21°. Herdzeit nach Sydney: 45m,4.	45,4	164
56	4. Febr. 14h	Distanz aus Ts-Tp: Sydney Apia Tsingtau 21° 19° 74° — Herdzeit: Sydney Apia Tsingtau 60m,0 59m,2 59m,9	59,7	148
57	4. „ 15½h	21½° 16½° — 40,2 40,2	40,2	148
58	4. „ 17½h	21½° 17½° 76½° — 36,7 36,3 36,4	36,5	148
59	4. „ 18½h	22° 16° 78° — 32,7 32,6 32,4	32,6	148
60	30. März	21° 19° 76° — 55,7 56,0 53,2 Manila 60° (eL des Berichtes als S angen.) — Manila 55m,6.	55,7	148
61	8. April	Für Apia: Distanz aus Ts-Tp 4°. Herdzeit 34m,0.	34,0	147
62	12. April	Zerstörend im nördl. Formosa. In „Erdbebenwellen Va" als Nr. 58. Distanz aus Ts-Tp: Zikawei 6°, Tiflis 65°.		81½
63	1. Mai	Distanz aus Ts-Tp: Sydney 22°, Tsingtau 75°, Manila 57°. Herdzeit: Sydney 30m,2, Tsingtau 30m,1, Manila 30m,9. Bei Manila wurde eL des Berichtes als S angenommen.	30,3	145
64	31. Mai	Gefühlt in Guerrero (Mexiko). In „Erdbebenwellen Va" als Nr. 60. Distanz von Mexiko aus Ts-Tp: 3°.		88
65	1. Juni 6h	Distanz aus Ts-Tp: Sydney 21½°, Tsingtau 75½°, Apia (22°). Herdzeit: Sydney 55m,2, Tsingtau 55m,0, Apia 55m,0.	55,1	146
66	1. Juni 7h	Distanz aus Ts-Tp: Sydney 21°, Tsingtau 74½°, Manila 57°. Herdzeit: Sydney 48m,0, Tsingtau 47m,8, Manila 48m,1. Bei Manila wurde eL des Berichtes als S angenommen.	48,0	145
67	16. Juni	Distanz aus Ts-Tp: Sydney 21°, Tsingtau 74½°, Zikawei 68°. Herdzeit: Sydney 30m,5, Tsingtau 30m,1, Zikawei 30m,3. Bei Tsingtau und Zikawei wurde eL des Berichtes als S angenommen.	30,3	145
68	29. Juni 11h	Distanz aus Ts-Tp: Apia (25[illegible]), Sydney (30°), Tsingtau (84°). Herdzeit: Apia (43m,6), Sydney (44m,5), Tsingtau (45m,5). Alle Angaben sind unsicher. Bei Apia wurde ein Zeitversehen von 5 Stunden angenommen.	44,5	162?
69	29. Juni 14h	Distanz aus Ts-Tp: Apia (24°), Sydney (30½°), Tsingtau (8[illegible]°). Herdzeit: Apia (16m,0), Sydney (16m,9), Tsingtau (17m,0). Alle Angaben sind unsicher. Bei Apia wurde ein Zeitversehen von 4 Stunden angenommen.	16,9	162?

Tabelle 1 (Fortsetzung).

Nr.	Datum	1910 (Fortsetzung)	Angenommene Herdzeit (Min.)	Angenommene Distanz (°)
70	29. Juli	Gefühlt in Neu-Guinea, 5° s. Br., 139 [illegible]° östl. Länge. Distanz aus T_S-T_P: Manila 28°, Tsingtau 45°, Apia 50°. Herdzeit: Manila $26^m,4$, Tsingtau $26^m,5$, Apia $25^m,9$.	26,4	118
71	1. Sept. 1^h	Gefühlt in Formosa. Distanz aus T_S-T_P: Manila 8°, Tsingtau 15° Zikawei [illegible], Tiflis [illegible] Herdzeit: Manila $44^m,9$, Tsingtau $43^m,4$ Zikawei 44,8 Tiflis 45,5.	44,8	83
72	24. Sept. 4^h	Gefühlt in Oxaca (Mexiko). In „Erdbebenwellen V^a als Nr. 63. Distanz von Mexiko aus T_S-T_P: 5°.		85
73	10. Dez.	Distanz aus T_S-T_P: Apia 26°, Zikawei 57° Manila 50°, Tsingtau 61° Herdzeit: Apia $26^m,3$, Zikawei $26^m,4$ Manila 26,2 Tsingtau 26,4.	26,3	133?
		1911		
74	10. April	Gefühlt in Columbien. In „Erdbebenwellen V^a als Nr. 67. Distanz aus T_S-T_P: Ottawa $35\frac{1}{2}$°, St. Louis $32\frac{1}{2}$°. Herdzeit: Ottawa $42^m,1$, St. Louis $42^m,3$.	42,2	80
75	6. Juni	Zerstörend in Mexiko. In „Erdbebenwellen V^a als Nr. 70.		87
76	15. Juni	Gefühlt in Süd-Japan. In „Erdbebenwellen V^a als Nr. 71.		81
77	12. Juli	Gefühlt am Agusanflusse in Ost-Mindanao (Philippinen). Distanz aus T_S-T_P: Manila 6°, Tsingtau 28°, Zikawei 24°. Herdzeit: Manila $8^m,2$, Tsingtau $7^m,4$, Zikawei $7^m,2$.	7,3	98
78	16. Dez.	In Mexiko gefühlt. Distanz aus T_S-T_P: Ottawa 34°, St. Louis 24°. Herdzeit: Ottawa $14^m,3$, St. Louis $13^m,9$.	14,1	57

Herdzeit. Die Herdzeit wurde gefunden als Differenz der Eintrittszeit von P in den Stationen aus der Nähe des Herdes und der Laufzeit von P, die für die Distanz der betr. Station der Laufzeitfunktion entnommen wurde. Bei Beben aus den Jahren 1904 bis 1906 enthält die Tabelle 1 auch die Herddistanz von Göttingen, wie sie sich in den Katalogen der Zentralstation in

Straßburg [1]) findet. Diesen Katalogen wurden auch die Angaben über die Eintrittszeiten an den verschiedenen Stationen entnommen, sowie die Herddistanzen für die Berechnung der Herdzeiten, falls in der vorliegenden Arbeit der gleiche Herd wie im betr. Katalog angenommen wurde. In den übrigen Fällen wurde der Berechnung der Herdzeit für jede Station je die Distanz zugrunde gelegt, die sich aus der Laufzeitdifferenz von S und P ergab. Die beiden letzten Spalten der Tabelle 1 enthalten die schließlich angenommene Herdzeit des Bebens und die angenommene Entfernung des Epizentrums von Göttingen.

Die makroseismischen Angaben über die Beben rühren in den Jahren 1904/06 aus den zitierten Katalogen her. Es betrifft dies die Nr. 1, 2 von 1904 und 10, 15—17, 19, 20, 22, 25—27 von 1906. Die Angaben über die mexikanischen Beben Nr. 30, 36, 37, 46, 47, 51, 64, 72 sind den „Parergones del Instituto Geologico de Mexiko", die Angaben über die Tongabeben Nr. 28, 29, 31, 43 den „Wochenberichten von Apia" entnommen. Auf direkten Zeitungsnachrichten beruhen die makroseismischen Angaben bei Nr. 32, 33, 49, 75, 76, 78. Für Nr. 38, 44, 52, 62, 71 wurden die „Makroseismischen Nachrichten der Kais. Hauptstation" bezw. die „Monatliche Übersicht der an der Kais. Hauptstation für Erdbebenforschung in Straßburg i/E. bekannt gewordenen Erdbeben" benutzt. Sehr wertvoll waren auch die makroseismischen Mitteilungen in dem „Seismological Bulletin", von Manila, die bei den Beben Nr. 39, 40, 54, 77 verwandt wurden. Schließlich sind entnommen die Angaben über Nr. 45 dem „Boletin del Servicio Sismológico de Chile" des Grafen Montessus de Ballore, über Nr. 55 den „Seismological Bulletins" des „Riverview College observatory" in Sydney, über Nr. 70 den „Vulkanische Verschijnselen en aardbevingen in den Oost-Indischen Archipel" und über Nr. 74 dem „Jesuit Seismological service record of the earthquake Station, St. Louis University".

Es wurden für die vorliegende Arbeit nur Beben mit Distanzen über 80^0 ausgemessen und zwar aus dem Zeitraum 1. Januar 1904 bis 30. Juni 1912. Es erwiesen sich 78 Beben als brauchbar. Beim Betrachten der Tabelle 1 fällt sofort die ungleichmäßige Verteilung in den verschiedenen Jahren auf. Aus dem Jahre 1904

---

1) Katalog der im Jahre 1904 registrierten seismischen Störungen. Zusammengestellt von Elmar Rosenthal. Veröffentlichungen des Zentralbüros der intern. seismologischen Assoziation.

Desgl. 1905, II. Teil, von Siegmund Szirtes.

Desgl. 1906, II. Teil, von Siegmund Szirtes.

sind nur 2 Beben vorhanden. Dies rührt einmal daher, daß bei vielen Beben dieses Jahres die nicht sehr genauen Zeitangaben mancher Stationen sowie die vorwiegende Benutzung langsam registrierender Apparate keine genaue Bestimmung der Eintrittszeiten von P und S ermöglichten, dann aber auch von dem Fehlen eines Vertikalpendels in Göttingen; bei Fernbeben ist die Vertikalkomponente von P wesentlich stärker als die horizontale und bei vielen Beben konnte überhaupt nur die Vertikalkomponente benutzt werden; da das Vertikalseismometer in Göttingen erst im Herbst 1905 aufgestellt wurde, mußten bis dahin verschiedene stärkere Fernbeben unberücksichtigt bleiben. Das Jahr 1906 brachte mit 18 Beben gutes Material, darunter mehrere Tongabeben, die sich im allgemeinen durch scharfe, schnell verklingende P-Einsätze und deutliches PP auszeichnen. 1907 und 1908 hatten weniger brauchbare Beben; zum Teil liegt das daran, daß der internationale Katalog für diese Jahre noch nicht erschienen ist, andererseits aber nur wenige Stationen Berichte dieser Jahre an die übrigen Erdbebenstationen versandt haben, so daß vielfach Erdbeben wegen der Unmöglichkeit, das Epizentrum zu bestimmen, nicht benutzt werden konnten. In den Jahren 1907/09 fanden mehrere mexikanische Beben statt, deren Registrierungen meist sehr wertvoll für Untersuchungen über Vorläufer sind, da diese bei den mexikanischen Beben sehr scharf ausgeprägt zu sein pflegen. Die meisten brauchbaren Beben, 19, lieferte das Jahr 1910; unter diesen finden sich allein 9 Beben, deren Herd südwestlich der Neuen Hebriden in der Nähe von Neu-Kaledonien lag. Diese Beben, von denen 4 am 2. Februar, 2 am 1. Juni stattfanden, haben wie die Tongabeben einen plötzlichen heftigen Einsatz von P, besonders in der Vertikalkomponente, unterscheiden sich aber von jenen durch das langsame Abnehmen der Stöße; die mit P einsetzende Bewegung erschwert durch ihre lange Dauer außerordentlich das Auffinden von PP, dessen Auftauchen meist überhaupt nur in den Horizontalkomponenten zu sehen ist. Für die Bestimmung der Herde im Stillen Ozean erwiesen sich die Berichte von Apia, Manila, Sydney, Tsingtau und Zikawei als besonders wertvoll. Bei Manila war es mehrfach nötig, den im Bericht unter „eL“ angegebenen Einsatz als S anzusprechen, da sonst Widersprüche entstanden wären. Zeitversehen von Minuten wurden nicht angenommen, da dies stets mit Willkür verbunden ist. Dagegen scheint bei den beiden Beben am 29. Juni 1910 in Apia ein Zeitversehen von 5 bezw. 4 Stunden vorzuliegen. Ein Einblick in die Diagramme zeigte in der Tat, daß sich beim Durchzählen der

Stundenmarken am Schlusse des Streifens eine Differenz von 5 Stunden gegen die angeschriebene Zeit ergab. Außerordentlich arm an Fernbeben erwiesen sich das Jahr 1911 und die erste Hälfte von 1912. Vom 1. Januar bis 30. Juni 1912 war überhaupt kein Beben brauchbar.

Eine Reihe der hier angegebenen Beben ist bereits in Erdbebenwellen V und VI untersucht worden; bei diesen wurden alle Messungen neu ausgeführt, doch ist stets angegeben, unter welcher Nr. sie in Erdbebenwellen V zu finden sind.

§ 4. Beobachtete Laufzeiten bei Fernbeben.

Bei allen in § 3 angegebenen Beben wurden zunächst die Eintrittszeiten aller im Gebiete der Vorläufer liegenden deutlichen Einsätze bestimmt. Mit Hilfe der in Tabelle 1 angenommenen Herdzeiten und bekannter Laufzeit von PP kann der Zeitpunkt berechnet werden, an dem PP zu erwarten ist. Als Laufzeit von PP in der Distanz Δ kann in guter Annäherung die doppelte Laufzeit von P in der halben Distanz gesetzt werden. Für Tabelle 2 wurde auf diese Weise zunächst unter Benutzung der in Erdbebenwellen VI angegebenen Laufzeiten die vermutliche Eintrittszeit von PP berechnet. Die hierbei gefundenen Werte sind in der 10. Spalte enthalten. Dann wurden die beobachteten Eintrittszeiten so in die Spalten 4 bis 9 verteilt, daß in die 5. Spalte die Eintrittszeit des Einsatzes gesetzt wurde, dessen Eintreffen dem berechneten Werte der Eintrittszeit von PP am nächsten kam. Die folgenden Spalten erhielten die Zeitangaben der auf PP folgenden Wellen, während stets der erste Einsatz des Bebens, sofern er vor PP lag, in die 4. Spalte als Eintrittszeit von P gesetzt wurde; es brauchte deshalb dieser erste Einsatz durchaus nicht der direkten longitudinalen Welle anzugehören, sondern es kann sich recht wohl auch um andere (etwa gebeugte) Wellen handeln. Befanden sich Einsätze zwischen P und PP, so ist unter „Bemerkungen" angegeben, um wieviel Minuten oder Sekunden diese Einsätze nach P auftraten (z. B. bei No. 2). War der Einsatz einer Welle unscharf, so steht die betr. Angabe in Klammern. Alle Messungen wurden möglichst auf Sekunden ausgeführt, dann aber auf Dezimalen von Minuten (also auf ± 3 sec) abgerundet, da das Eintreffen von PP bei Beben aus großen Distanzen fast nie genauer festzustellen ist. Die Stunden wurden als belanglos weggelassen.

Tabelle 2.

Beobachtete Eintrittszeiten der ausgeprägten Einsätze.

Δ	Komponente	Beobachtete Eintrittszeit von P	PP	i_1	i_2	i_3	i_4	Berechnete Eintrittszeit von PP	Eintrittzeit PP ber. - PP beob.	Gewicht für die vorige Spalte	Bemerkungen. (B = „durch Bodenunruhe gestört")
°		Min	Min	Min	Min	Min	Min	Min	Min		
108	EW		47,0	49,5	53,4	56,4	1,7	47,0	0,0	1	B.
171	EW	10,6	15,6	20,1	22,1	26,0					Weitere Einsätze 24 sec und 74 sec nach P. Die berechnete Eintrittszeit v. PPP = beob. Eintrittszeit v. i_1.
	NS	10,6	15,6	20,2	22,1	26,0	36,0				
98	EW		(1,6)	3,9	8,0	10,0					B.
	NS	(57,4)	1,3	3,9	8,0	10,0		1,5	+0,2	1	
121	NS		37,9	(40,8)	42,8	47,7		37,9	0,0	2	
153	EW	51,3	(55,3)	58,5	5,0	7,5	14,3				B.
	NS	51,5		58,3				55,5	+0,2	1	
122	EW		37,0	39,8	(53,0)						
	NS		37,0					36,0	−1,0	1	
157	EW	49,4	53,8	7,0	(13,5)						
	NS	(49,6)	53,8	7,0	(14,0)			54,7	+0,9	1	
144	EW	43,1	(46,5)								
	NS	43,1	(46,5)					47,0	+0,5	1	
114	Z	(7,0)	10,8	(13,3)				11,3	+0,5	2	
90	Z	49,1	(52,8)								
	EW	49,1		0,5	(5,8)						
	NS		(52,6)	0,5	(5,8)			53,1	+0,4	2	
136	Z	43,9	46,0	49,4		57,5					B.
	NS						6,3				
	EW				53,7		6,0	46,8	+0,8	1	
135	Z	(19,2)	21,6								B.
	NS			22,7							
	EW			22,7	(34,8)	(39,0)		21,9	+0,3	2	
147	Z	24,5	(27,7)					28,8	+1,1	1	B.
96	Z	35,6	39,1	(41,1)							B. Distanz unsicher.
	NS		39,1	(41,6)	(46,4)						
	EW		39,1		(46,4)	48,4	53,8	42,5	+1,2	1	
147	Z	17,2	20,7	24,0							
	NS	17,2		24,0	(31,0)						
	EW	17,2	20,7	23,9	(31,0)			20,9	+0,2	3	
101	Z	48,6	52,7	(55,7)				52,8	+0,1	3	B. *i* 37 sec nach P.
101	Z	34,7	38,7	(41,4)							*i* 37 sec nach P.
	EW				45,2			39,2	+0,5	1	
116	EW		50,3	53,2	(56,3)	58,2	0,5				B.
	NS		50,4	53,2	(56,3)	(58,2)	0,5	50,5	+0,1	1	
121	Z	(20,5)	21,1	(23,7)							B.
	EW		21,1	(23,6)	30,8	32,8					
	NS		21,1	(23,6)	30,9			20,9	−0,2	2	
101	EW	52,4	56,3		3,3	5,3					
	NS	52,3			3,3						
	Z	52,4	56,5	59,0				56,4	0,0	2	

Tabelle 2. Fortsetzung.

No.	Δ	Komponente	Beobachtete Eintrittszeit von						Beobachtete Eintrittszeit von PP	Eintrittszeit PP ber. - PP beob.	Gewicht für die vorige Spalte	Bemerkungen. (B = „durch Bodenunruhe gestört“).
			P	PP	i_1	i_2	i_3	i_4				
	°		Min	Min	Min	Min	Min	Min	Min	Min		
21	148	Z	17,8	21,6	(25,0)							i 49 sec nach P.
		NS	17,8	21,6	(25,0)	(32,5)	(36,5)					
		EW					(36,5)		21,9	+0,3	1	
22	121	EW		25,3	(28,0)	37,3	42,3					
		NS		25,3		37,3	41,7					
		Z	23,5	25,4					25,3	0,0	3	
23	121	EW		12,3	15,3	23,2	29,2					
		NS		12,3		23,2	29,2					
		Z	10,5	12,4	(15,3)				12,2	—0,1	2	
24	150	Z	57,2	1,2								Einsätze 69 sec und 12m nach P.
		EW		1,2								
		NS		1,3	(11,7)	(13,7)			1,2	0,0	2	
25	118	EW		37,7		47,2	48,6	53,7				B. Zwischen eP und P wiederholt Einsätze, fe ner in EW ein Einsa um 58m,7.
		NS				45,4		53,6				
		Z	36,5	37,6	(40,2)				37,6	0,0	2	
26	147	Z	19,0									
		NS		(22,7)					22,7	0,0	2	
27	147	Z	34,2									i 40 sec nach P.
		EW	34,2	(38,0)								
		NS	34,2	(38,0)					38,0	0,0	2	
28	150	Z	15,7	(19,2)								B. Einsätze 22 sec u 60 sec nach P.
		NS	15,7	(19,4)								
		EW	15,7		29,5				19,4	+0,1	2	
29	145	Z	19,5	22,6								B.
		NS	19,5	22,8								
		EW	19,5						24,0	+1,3	1	
30	87½	Z	21,0	24,6								Weitere Einsätze in EW 38m,0 und um 41m,9.
		NS	21,0									
		EW	21,0	24,5	26,9	31,9	32,4	33,1				
31	147	Z	2,4	(6,4)	7,3							i 1m,6 nach P.
		NS	2,5	(6,5)	7,2	16,3	17,2	21,3	6,7	+0,3	2	
32	92	Z	53,4	57,2								
		EW	53,4	56,9	59,7	4,0	4,5	5,4				
		NS				4,2						
33	84	Z	19,8	23,2								
		EW	19,8	23,2	30,6	33,8						
		NS			30,1		48,1					
34	120	Z		55,1								B. Distanz unsicher. W tere Einsätze um 11 und 15m,9.
		EW		55,1	57,0	0,8		6,6				
		NS		55,1			5,0		55,2	+0,1	1	
35	156	Z	28,2	32,2								i 36 sec nach P.
		EW	28,2	32,4	35,8	41,2						
		NS	28,2	32,2			42,5	53,0	33,2	+0,9	1	
36	87½	Z	16,2	19,7	27,0	28,0						
		NS	16,2	19,7	26,8	28,1	28,8	32,9				
		EW	16,2	19,7	26,9	28,1		32,9				

Tabelle 2. Fortsetzung.

Δ	Komponente	Beobachtete Eintrittszeit von P	PP	i_1	i_2	i_3	i_4	Berechnete Eintrittszeit von PP	Eintrittszeit PP ber. - PP beob.	Gewicht für die vorige Spalte	Bemerkungen. (B = „durch Bodenunruhe gestört“).
°		Min	Min	Min	Min	Min	Min	Min	Min.		
86	Z	0,2	3,6	5,7							
	NS	0,2	3,6		10,7						
	EW	0,2	3,6	5,7	10,7						
104	Z	(31,8)	(36,1)	38,4	35,0						Weiterer Einsatz in NS um 55^{m},5.
	NS		(36,1)			43,6					
	EW	(31,8)	(36,3)	38,5	(35,3)	42,3	51,6	37,0	+0,8	1	
91½	Z	52,5	56,2	59,3							B.
	EW	52,4				4,5					
	NS		56,3	59,3	(3,7)			57,3	+1,0	1	
95	Z	32,1	36,0		44,8						B.
	EW	32,2	36,0	43,4	44,7	49,8	53,8				
	NS	32,2	36,1	43,3							
146	Z	40,4	(43,6)	45,4	55,0						i 2^{m},3 nach P. Deutung der Einsätze unsicher.
	EW	40,4			54,4	1,8					
	NS	40,4			54,4						
86	Z	41,5	44,7	(46,9)							
	EW	41,5	44,8		51,8	57,8					
	NS	41,5	44,8	(47,1)	51,7			44,9	+0,1	2	
147	Z	46,7	50,6	(48,4)							i 0^{m},9 nach P.
	EW	46,8			(50,2)						
	NS	46,8				56,8	1,4	50,7	+0,1	2	
92	Z	53,8	(57,4)	1,5		(5,0)					
	EW	53,9	(57,6)		4,5	4,9	11,7				
	NS					4,9					
109	Z	0,8	(5,0)								P fällt in die Stundenmarke.
	EW	0,8			3,7	11,3	14,5				
	NS	0,8		(7,7)	(3,7)	(11,5)	14,5				
87½	Z	4,7	8,2	10,4							
	NS	4,7	8,2			15,4	15,7				
	EW	4,7	8,2	10,4	11,5	15,4	15,7				
87½	Z	31,7	35,2	(37,4)							Die Horizontalkomponenten sind durch No. 46 überlagert.
	EW		35,2		42,9	48,9					
148	Z	8,3	11,6	(14,0)							
	NS	(8,5)	11,6	13,8				13,3	+1,7	1	
80	Z	43,2	46,3								
	NS	43,2	46,3	53,3							
	EW	43,2		53,2							
145	Z	59,2	2,5								
	EW	59.2	(2,5)								
	NS	59,2	2,5	(5,8)	9,3	14,8		3,0	+0,5	1	
89	Z	36,1	39,7								Weitere Einsätze um 48^{m},2 und 53^{m},1.
	EW	36,1	39,6	41,7	44,5	46,7	47,1				
	NS	36,2	(39,8)				47,2	40,1	+0,4	2	
82	Z	48,3	51,5								
	EW	48,3	51,5	58,6							
135	NS		55,5	56,7							B.
	EW		55,6	56,7	57,7	(0,4)					
	Z	(53,2)	55,5					56,0	+0,5	2	

Tabelle 2. Fortsetzung.

No.	Δ °	Komponente	Beobachtete Eintrittszeit von P Min	PP Min	i_1 Min	i_2 Min	i_3 Min	i_4 Min	Berechnete Eintrittszeit von PP Min	Eintrittszeit PP ber. - PP beob. Min	Gewicht für die vorige Spalte	Bemerkungen. (B = „durch Bodenunruhe gestört").
54	104	Z	43,3	47,5								B.
		EW		47,3	53,4	54,9	(56,7)					
		NS		47,5	53,4	54,9			48,0	+0,5	1	
55	164	Z	5,6	(10,5)	18,0							B.
		EW		10,5	18,2	(30,4)	31,2					
		NS				30,4		36,9	10,6	+0,1	2	
56	148	Z	19,9	(23,2)					23,5	+0,3	2	In den Horizontalkompo-
57	148	Z	0,1	(3,3)					4,0	+0,7	2	nenten überlagern di
58	148	Z	56,5	(60,0)					60,3	+0,3	2	Beben einander.
59	148	Z	52,6	(56,0)					56,4	+0,4	2	
60	148	Z	15,4	18,8		29,3						
		EW	15,5	18,9								
		NS	15,4	18,9	26,8		31,3		19,5	+0,6	2	
61	147	Z	53,7	57,5								*i* 20 sec nach P.
		EW	53,8	57,5		15,8						
		NS	53,8	57,4	(7,7)		(17,0)		57,7	+0,2	2	
62	81½	Z	34,5	37,7	39,6		44,6					
		EW	34,4	37,7		42,7	44,6	45,5				
		NS	34,4				44,6	45,7				
63	145	Z	50,2	(53,6)								*i* 15 sec nach P.
		EW	50,2	(53,7)								
		NS	50,2	(53,6)	(58,3)				53,8	+0,2	2	
64	88	Z	8,4	11,8								
		EW	8,4	11,8	19,0	20,2						
		NS	8,6	11,8	19,0							
65	146	Z	15,1	(18,9)								
		EW	15,1									
		NS	15,1	(18,9)	22,2	(29,2)			18,7	—0,2	2	
66	145	Z	7,8									Überlagert von No. 65.
		EW	7,8	(11,5)								
		NS	7,8						11,5	0,0	2	
67	145	Z	50,1	(53,4)								Weitere Einsätze um 3^m,
		EW	50,1	(53,4)	54,2			1,3				und 6^m,0.
		NS	50,1	(53,4)		56,4	58,3	0,8	53,8	+0,4	2	
68	162	Z	5,0	9,3	14,8	20,3						Distanz unsicher.
		EW	5,0									
		NS	5,0	(9,0)		20,3			9,5	+0,2	1	
69	162	Z	37,5	41,7								Distanz unsicher.
		NS	37,5	41,8					42,0	+0,2	1	
70	118	Z	45,3	46,8	49,0							Weiterer Einsatz in alle
		EW		46,8		50,0						Komponenten um 59^m,
		NS		46,8			52,5	54,7	46,9	+0,1	2	
71	83	Z	57,4	0,8								PP fällt in die Stunden
		EW	57,5	0,8	7,7	8,7						marke.
		NS	57,5	0,8	7,7	8,7			1,0	+0,2	1	
72	85	Z	45,3	48,7								B.
		EW	45,4	48,8	55,9		1,8					
		NS	45,4		55,9	57,1	1,8					

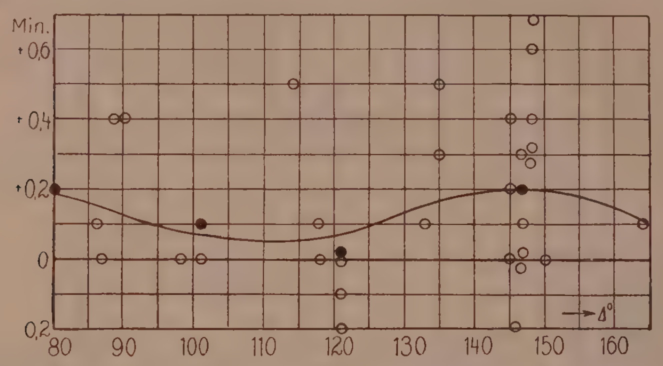
Tabelle 2. Fortsetzung.

Δ	Komponente	Beobachtete Eintrittszeit von						Berechnete Eintrittszeit von PP	Eintrittszeit PP ber. - PP beob.	Gewicht für die vorige Spalte	Bemerkungen. (B = „durch Bodenunruhe gestört“).
		P	PP	i_1	i_2	i_3	i_4				
°		Min	Min	Min	Min	Min	Min	Min	Min		
133	Z	(46,0)	48,4	49,4		1,4					B. Distanz auf ca. 3° unsicher.
	EW		48,4	49,4	51,4		6,3				
	NS		48,4	49,4	51,4			48,5	+0,1	2	
80	Z	54,3									
	EW	54,3	57,7	4,4							
	NS	(54,5)	.	4,4				57,9	+0,2	3	
87	Z	15,6	19,4								
	EW	15,6	19,3	26,4							
	NS	15,6	19,3	26,5							
81	Z	38,2		42,2							Die Wellen überlagern einander.
	EW	38,2	41,6	42,0	48,4						
	NS	38,2	41,6	42,0	48,4						
98	Z	21,3	25,3								
	EW	21,3	25,3	27,7	29,3	32,6					
	NS	21,3	25,3			32,5		25,3	0,0	2	
87	Z	27,4	30,8								B.
	EW	27,3	30,8	34,2	38,0	38,6	40,1				
	NS	27,3	30,9		38,0	38,6		30,8	0,0	2	

Die Verwertung der in Tabelle 2 zusammengestellten Messungen kann auf 2 Weisen geschehen: Entweder man bildet direkt die Differenzen der beobachteten Eintrittszeiten gegen die angenommenen Herdzeiten, erhält also direkt Laufzeiten, oder man verschafft sich gut angenäherte Laufzeiten einer Welle, trägt von diesen aus die Differenzen der beobachteten Einsätze gegen den beobachteten Einsatz der zugrundegelegten Welle auf und untersucht dann die Fehler der Laufzeiten, von denen man ausging. Dieser zweite Weg ist entschieden dem ersten vorzuziehen, da die Herdzeit meist sehr unsicher ist. Im vorliegenden Falle wurde die Eintrittszeit von PP bis $\Delta = 164^0$ unter der Annahme, daß $(T_{PP})_{\Delta} = 2\,(T_P)_{\frac{\Delta}{2}}$, zugrundegelegt, bei $\Delta > 164^0$ (No. 2) die Eintrittszeit von PPP, da nach Erdbebenwellen VI die Laufzeit von P nur bis $\Delta = 82^0$ bekannt war.

Es fragt sich nun, wie groß ist der Fehler der angenommenen Laufzeit von PP? Um dies zu untersuchen, wurde in Tabelle 2 die Differenz berechnete — beobachtete Laufzeit von PP gebildet; je nach der Güte der benutzten Herdzeit und der beobachteten Eintrittszeit von PP erhielten diese Differenzen ein Gewicht

1, 2 oder 3. Die Differenzen mit Gewicht 2 und 3 sind in Figur 1 eingezeichnet. Man sieht sofort, daß sie im allgemeinen positiv sind, d. h. PP traf früher ein, als die Rechnung ergibt, vielleicht

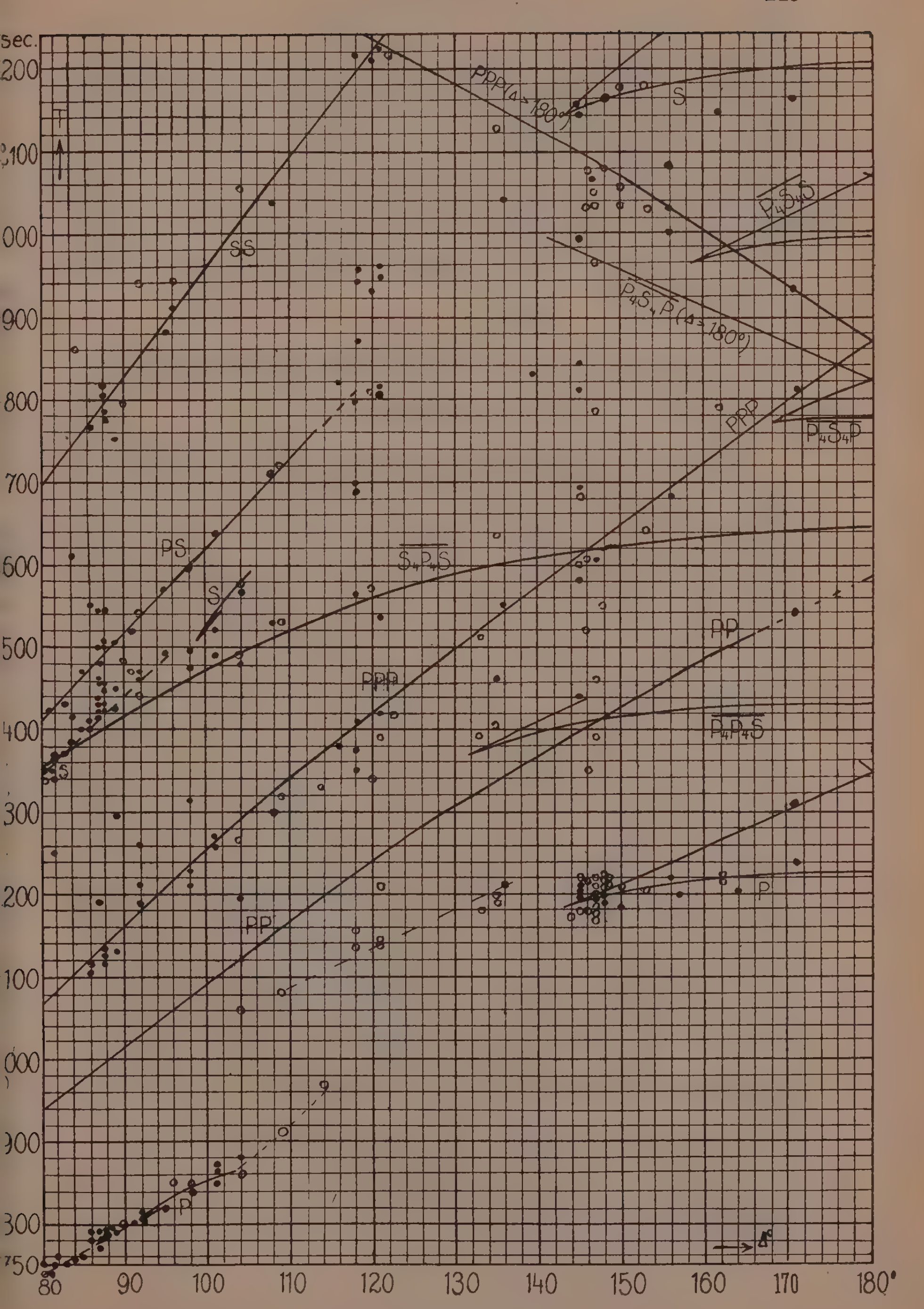


Figur 1. Berechnete Eintrittszeit von PP minus beobachtete Eintrittszeit von PP als Funktion der Herddistanz.

weil die Eintrittszeit von P für die halbe Entfernung nicht genau war, vielleicht, weil PP nicht an der Erdoberfläche reflektiert wird. Die Differenz, die im allgemeinen ca. 10 Sekunden beträgt, ist von den berechneten Laufzeiten von PP zu subtrahieren. Nimmt man bei Einfall der Wellen unter $i = 25^0$ als Differenz 12 sec an, verursacht durch Reflexion von PP an einer tieferen Schicht, so ergibt sich, falls man die Geschwindigkeit der P-Wellen nahe der Erdoberfläche zu 7,2 km/sec annimmt, als Tiefe dieser Schicht ca. 40 km. Auch die geographische Breite der Reflexionsstelle kann schon Einfluß auf das Eintreffen von PP haben; die Maximaldifferenz ist für $\varDelta = 180^0$ ($i_{PP} = 19^0$ angenommen) ca. 6 sec.

Aus Figur 1 ersieht man, wie groß die Streuung der Werte für die Laufzeiten wäre, wenn man diese direkt aus den Herdzeiten und den beobachteten Eintrittszeiten ermittelte, und zwar bei den Beben mit den besten Herdzeiten!

Um die Laufzeiten der verschiedenen beobachteten Wellen zu erhalten, wurde in Figur 2 die berechnete Laufzeit von PP minus der in Figur 1 ermittelten Differenz eingetragen. Von dieser Kurve aus wurden dann die Differenzen der Eintrittszeiten von PP und P nach unten, von PP einerseits und i_1, i_2, ... andererseits nach oben abgetragen. Waren die Distanz des Epizentrums von Göttingen oder die Eintrittszeit von PP unsicher, so erhielten alle Einsätze des Bebens kleine offene Kreise, ebenso alle unsicheren



Figur 2. Beobachtete und berechnete Laufzeiten.

Einsätze der übrigen Beben. In den Fällen, in denen die Abscisse und Ordinate der betr. Beobachtung sicher schien, erhielt diese in der Figur 2 einen ausgefüllten Kreis. Man sieht, daß die als sicher bezeichneten Beobachtungen bei P nur geringe Streuung besitzen; bei den übrigen Wellen geht oft der eigentliche erste Einsatz verloren, sodaß ein sicher scheinender Impuls doch erst die zweite Welle sein kann. Die in Figur 2 ausgezogenen Kurven sind berechnet, sollen also keine Ausgleichskurven sein; sie werden in § 6 besprochen werden. Dagegen sind gestrichelte Kurven Ausgleichskurven.

§ 5. Beobachtung des Bodenverrückungsverhältnisses $\frac{u_{PP}}{u_P}$ und Diskussion.

An allen Beben mit meßbarem P- und PP-Einsatz der Tabelle 1 wurden die Amplituden von P und PP im Diagramm gemessen, und zwar wurde je das Maximum der betr. Phase benutzt. Ein ? bedeutet, daß die Messung nicht hinreichend genau oder überhaupt nicht ausführbar war, ein —, daß die Phase nicht merklich hervortritt. Wie in Erdbebenwellen V S. 175 ff. angegeben ist, genügt es bei der Bestimmung des Bodenverrückungsverhältnisses von PP : P, wenn man direkt das Verhältnis der in mm gemessenen Seismogrammamplituden bildet. Tabelle 3 enthält die gemessenen Diagrammamplituden von P und PP in mm, sowie deren Verhältnisse für alle 3 Komponenten. Wir erhalten also hierdurch direkt das Verhältnis der entsprechenden Bodenverrückungen. Aus den Messungen in der EW- und NS-Komponente wurde ein als „Horizontalkomponente“ bezeichnetes Mittel gebildet unter Berücksichtigung der Gewichte der betr. Messungen; nach Erdbebenwellen V (31) ist dies erlaubt. Die so erhaltenen Verhältnisse für die Horizontal- und Vertikalkomponente erhielten je ein Gewicht 1 (meßbar), 2 (gut meßbar) oder 3 (sehr gut meßbar).

Die in Tabelle 3 angegebenen Werte des vertikalen und horizontalen Verhältnisses können nicht ohne weiteres zusammen in eine Figur eingetragen werden. Bezeichnet p das Verhältnis der Horizontalverrückungen $\left(\frac{u_{PP}}{u_P}\right)$, q das Verhältnis der Vertikalverrückungen $\left(\frac{w_{PP}}{w_P}\right)$, $\bar{i}_P$ und $\bar{i}_{PP}$ den scheinbaren Einfallswinkel der P bezw. PP-Wellen in der benutzten Distanz, so ist nach Erdbebenwellen V (9):

Tabelle 3.

Beobachtete Bodenverrückungen.

No.	Δ °	P in mm			PP in mm			PP : P				Gewicht	
		Z	EW	NS	Z	EW	NS	EW	NS	Hor	Z	Hor	Z
1	108	?	—	—	?	0,4	?	∞	?	∞	?	3	?
2	171	?	0,1	0,1	?	0,1	0,1	1	1	1	?	1	?
3	98	?	0,4	?	?	1,2	0,4	3	?	3	?	1	?
4	121	?	—	—	?	?	0,25	?	∞	∞	?	3	?
5	153	?	0,05	?	?	0,1	?	2	?	2	?	1	?
6	122	?	—	—	?	0,4	0,4	∞	∞	∞	?	3	?
7	157	?	0,07	0,05	?	0,1	0,05	1,4	1	1,3	?	2	?
8	144	?	0,5	0,45	?	0,2	0,2	0,40	0,37	0,37	?	2	?
9	114	0,05	?	?	0,5	?	?	?	?	?	10	?	2
10	90	2,0	0,95	0,35	6,0	7,0	2,0	7,5	5,7	6,8	3,0	2	2
11	136	(0,5)	?	?	0,7	?	?	?	?	?	(1,4)	?	2
13	147	0,35	?	?	0,15	?	?	?	?	?	0,43	?	2
14	96	0,45	0,1	0,1	0,45	0,4	0,35	4,0	3,5	3,7	1,0	1	1
15	147	2,0	0,45	0,7	0,5	0,25	0,45	0,55	0,64	0,60	0,25	2	3
16	101	0,05	?	?	0,05	?	?	?	?	?	1	?	1
17	101	0,15	?	?	0,1	?	?	?	?	?	0,7	?	1
18	116	?	—	—	?	0,55	0,35	∞	∞	∞	?	2	?
19	121	—	—	—	0,15	0,55	0,35	∞	∞	∞	∞	2	2
20	101	0,3	0,12	0,07	0,35	0,35	0,15	2,9	2,1	2,7	1,2	2	2
21	148	0,6	0,15	0,15	0,35	0,15	0,25	1,0	1,7	1,5	0,6	2	3
23	121	—	?	?	0,1	?	?	?	?	?	∞	?	2
24	150	0,07	0,03	0,05	0,2	0,15	0,4	5,0	8,0	7,0	3,0	2	2
25	118	—	?	?	0,7	?	?	?	?	?	∞	?	3
26	147	0,6	?	0,15	0,07	?	0,1	?	0,7	0,7	0,12	1	1
27	147	1,7	0,45	1,2	0,4	0,35	0,7	0,78	0,58	0,68	0,24	2	1
28	150	3,0	?	1,7	0,55	?	1,0	?	0,6	0,6	0,18	2	2
29	145	3,6	0,55	0,6	0,5	0,2	0,3	0,4	0,5	0,45	0,15	2	3
30	87½	3,6	3,4	1,6	3,5	6,6	3,1	1,94	1,94	1,94	1,0	3	3
31	147	1,7	?	0,7	0,3	?	0,2	?	0,3	0,3	0,18	1	3
32	92	0,45	0,4	?	0,2	0,3	?	0,75	?	0,75	0,45	2	2
33	84	0,1	0,07	?	0,05	0,10	?	1,4	?	1,4	0,5	1	1
35	156	0,55	?	0,07	0,17	?	0,15	?	2,1	2,1	0,31	2	3
37	86	0,8	0,6	0,45	0,9	1,45	0,75	2,4	1,7	2,0	1,1	2	2
38	104	0,07	0,05	?	0,6	0,5	?	1,0	?	10	8,5	2	3
39	91½	0,12	?	?	0,07	?	?	?	?	?	0,6	?	1
40	95	0,3	0,1	?	0,2	0,1	?	1,0	?	1,0	0,67	1	3
41	146	4,2	?	?	1,0	?	?	?	?	?	0,24	?	1
42	86	1,1	0,5	1,0	0,9	0,5	0,9	1,0	0,9	0,9	0,8	3	3
43	147	1,0	0,4	0,15	0,5	0,4	0,2	1,0	1,3	1,1	0,5	2	3
44	92	0,45	?	?	0,33	?	?	?	?	?	0,7	?	2

Tabelle 3. Fortsetzung.

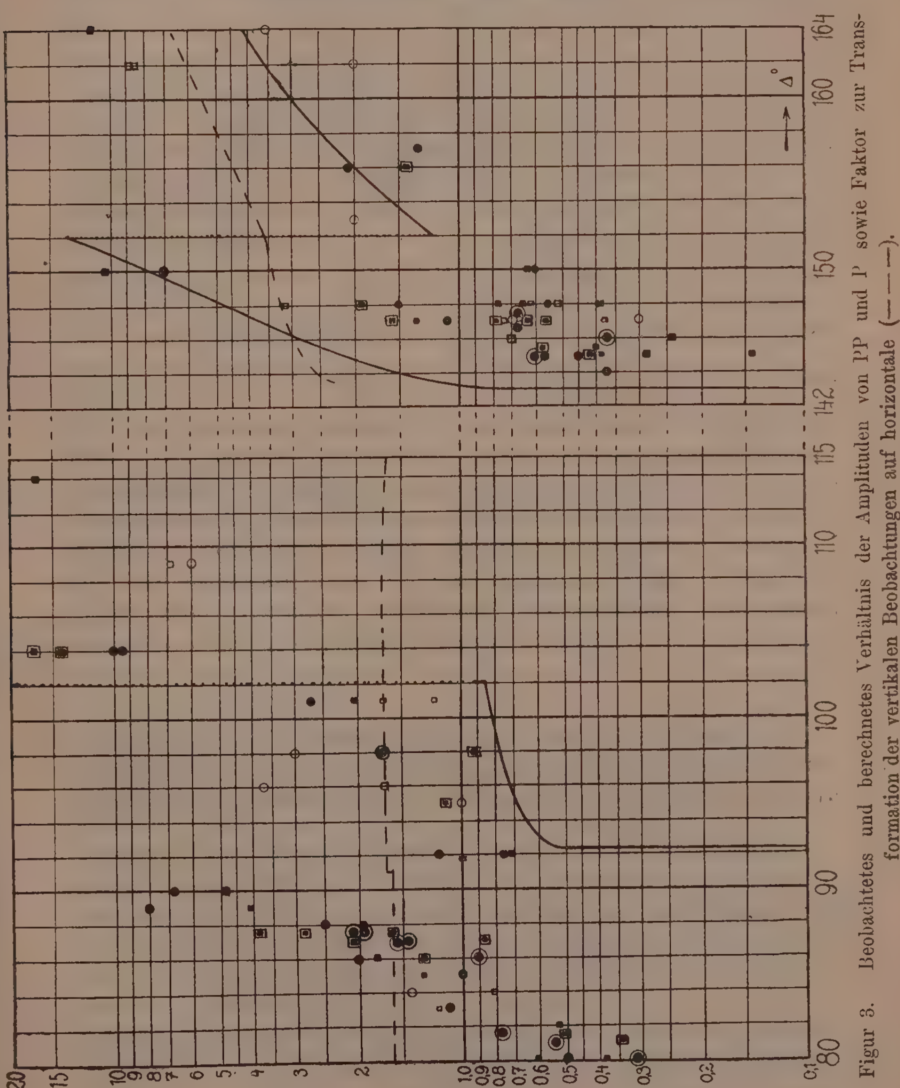
No.	Δ	P in mm			PP in mm			PP : P				Gewicht	
	°	Z	EW	NS	Z	EW	NS	EW	NS	Hor	Z	Hor	Z
45	109	0,03	0,05	0,02	0,12	0,2	0,15	4,0	7,5	6,0	4,0	1	1
46	87½	1,1	1,2	0,55	2,5	2,6	1,1	2,0	2,2	2,1	2,4	3	3
47	87½	0,35	?	?	0,65	?	?	?	?	?	1,8	?	3
48	148	0,1	?	?	0,1	?	?	?	?	?	1,0	?	1
49	80	0,4	?	0,2	0,15	?	0,1	?	0,5	0,5	0,38	2	2
50	145	1,0	?	0,35	0,15	?	0,2	?	0,57	0,55	0,15	2	2
51	89	0,2	0,05	0,05	0,5	0,5	0,25	10	5	8	2,5	2	2
52	82	0,75	?	?	0,25	?	?	?	?	?	0,33	?	2
53	135	(0,07)	(≦ 0,05)	(≦ 0,05)	0,3	0,2	0,35	(≧ 4)	(≧ 7)	(≧ 6)	(4,3)	2	1
54	104	0,15	0,1	?	1,55	1,0	?	10	?	10	10	2	3
55	164	0,20	0,07	?	0,35	0,25	?	3,5	?	3,5	1,7	1	2
56	148	0,85	?	?	0,2	?	?	?	?	?	0,24	?	2
57	148	0,35	?	?	0,07	?	?	?	?	?	0,20	?	1
58	148	0,83	?	?	0,1	?	?	?	?	?	0,12	?	2
59	148	0,45	?	?	0,07	?	?	?	?	?	0,16	?	1
60	148	2,0	1,0	1,0	0,4	0,5	0,55	0,50	0,55	0,55	0,20	2	2
61	147	1,0	0,2	0,35	0,2	0,1	0,25	0,5	0,7	0,65	0,20	2	3
62	81½	5,0	2,7	1,2	1,6	2,0	1,0	0,74	0,82	0,77	0,32	3	3
63	145	1,2	0,4	0,6	0,12	0,1	0,3	0,25	0,50	0,40	0,10	2	2
64	88	0,5	0,3	?	0,6	0,75	?	2,5	?	2,5	1,2	2	2
65	146	1,8	0,55	0,8	0,15	0,2	0,3	0,36	0,37	0,37	0,08	3	2
66	145	2,7	?	?	0,15	?	?	?	?	?	0,05	?	2
67	145	10,5	4,0	4,5	2,2	2,0	3,0	0,50	0,67	0,60	0,21	2	3
68	162	0,05	?	0,05	0,07	?	0,1	?	2,0	2,0	1,4	1	1
69	162	0,05	?	?	0,07	?	?	?	?	?	1,4	?	1
70	118	(0,02)	—	—	0,4	0,2	0,4	∞	∞	∞	20	3	3
71	83	0,2	0,2	0,07	0,15	0,25	0,07	1,2	1,0	1,1	0,75	2	1
72	85	0,55	0,45	?	0,45	0,45	?	1,0	?	1,0	0,82	2	2
74	80	1,05	0,8	?	0,25	0,25	?	0,31	?	0,31	0,24	3	2
75	87	2,35	2,0	1,0	1,3	3,25	1,45	1,62	1,45	1,55	0,55	3	3
76	81	29,5	19,0	11,5	6,5	11,0	5,5	0,58	0,48	0,55	0,22	3	3
77	98	1,5	0,95	0,45	0,8	1,1	1,0	1,2	2,2	1,7	0,55	3	3
78	87	1,0	1,4	0,9	1,25	2,3	1,1	1,65	1,2	1,5	1,25	3	3

$$p = q \cdot \frac{\operatorname{tg} \bar{i}_{PP}}{\operatorname{tg} \bar{i}_{P}}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung lassen sich die Vertikalbeobachtungen (q) auf horizontale (p) transformieren, wenn man $\bar{i}_{PP}$ und i_P kennt.

In unserm Falle wurden zunächst Annahmen über $\bar{i}_{PP}$ und $\bar{i}_P$ gemacht; erst nach genauerer Kenntnis der $i(\Delta)$-Funktion läßt

sich $\bar{i}_p$ für große Distanzen angeben. Für Figur 3 wurde die in § 7 angegebene $i(\Delta)$-Funktion zur Transformation benutzt; der Transformationsfaktor ist in Tabelle 17 zu finden. In Figur 3 sind die Werte der so transformierten vertikalen und die aus Tabelle 3 entnommenen Werte des horizontalen Verhältnisses der



Figur 3. Beobachtetes und berechnetes Verhältnis der Amplituden von PP und P sowie Faktor zur Transformation der vertikalen Beobachtungen auf horizontale (— — —).

Bodenverrückungen in logarithmischem Maßstabe eingetragen. Die Kennzeichnung der Komponente und des Gewichtes erfolgte nach folgendem Schema:

Gewicht	horizontal	vertikal
1	⊙	□
2	●	■
3	◉	▣

Die in Figur 3 eingezeichneten Kurven werden später besprochen.

Die Beobachtungen zeigen folgenden Verlauf: Bei $\Delta = 80^0$ haben wir das untere Ende eines Sprunges, der durch PP verursacht ist (vgl. Erdbebenwellen V S. 186). Bei wachsender Distanz wird $\frac{u_{PP}}{u_P}$ immer größer, bis bei etwas über 90^0 P überhaupt fast unmerklich wird. Bei $\Delta = 92^0$ ist plötzlich wieder $u_{PP} = u_P$, dann nimmt das Verhältnis von $\frac{u_{PP}}{u_P}$ langsam zu, um bei etwa 102^0 plötzlich wieder sehr groß zu werden. Zwischen 114^0 und 136^0 ist überhaupt kein bestimmtes P zu finden. Zwischen $\Delta = 136^0$ und $\Delta = 144^0$ fehlen Beobachtungen. Bei 144^0 ist P außerordentlich stark, nimmt aber bei wachsender Distanz sehr schnell ab. Bei $\Delta = 2 \times 76^0 = 152^0$ ist ein Sprung nach unten durch PP zu erwarten (vgl. Erdbebenwellen V S. 186), der in der Tat vorhanden ist. Von $\Delta = 152^0$ an steigen die beobachteten Werte langsam. Von $\Delta = 165^0$ ab fehlen zuverlässige Beobachtungen.

§ 6. Berechnung der Laufzeiten verschiedener Wellen für sehr grosse Distanzen nach Annahme der Scheitelgeschwindigkeit der P- und S-Wellen als Funktion der Tiefe.

In Erdbebenwellen V und VI konnte zunächst je eine angenäherte sin $i(\Delta)$- bezw. sin i (Δ)-Funktion, die durch Differenzieren der Laufzeitfunktion erhalten worden war, benutzt werden, um die Intensitätsverhältnisse von Vorläufern zu berechnen. Dann konnten mit Hilfe der beobachteten Amplitudenfunktionen die sin $i(\Delta)$- und sin i (Δ)-Funktionen approximiert werden, und aus diesen ergab sich dann nach der von Wiechert ausgebildeten Methode mittelst des Abel-Herglotzschen Satzes die Scheitel-Geschwindigkeit der P- und S-Wellen als Funktion der Tiefe.

Dieser Weg war möglich, da die Geschwindigkeit nirgends mit der Tiefe abnahm.

Es fragt sich nun, ob auch bei größerer Tiefe sich die Geschwindigkeit stetig (d. h. nicht sprungweise) ändert. Schon 1907 wies Wiechert[1]) darauf hin, daß die Vorläufer sehr ferner Beben stark verzögert in Göttingen ankommen, wie dies ja auch aus Figur 2 hervorgeht. Aus Tabelle 3 ersehen wir, daß von $\Delta = 103^0$ ab nur noch sehr schwache P-Wellen auftreten, und daß von 114^0 bis mindestens 136^0, höchstens 144^0 keine eigentliche P-Welle zu finden ist. Bei 144^0 dagegen ist deren Intensität plötzlich wieder außerordentlich groß. Es scheint demnach der Fall vorzuliegen, von dem Wiechert in Erdbebenwellen I Fig. 14 und Fig. 15 II ein Beispiel gibt, daß nämlich die Geschwindigkeit der P-Wellen in der Tiefe stark abnimmt. Dann versagt aber der eingangs dieses Paragraphen erwähnte Weg zur Bestimmung der Scheitelgeschwindigkeit, und man ist genötigt, über diese Annahmen zu machen und solange zu variieren, bis die auf Grund dieser Annahmen berechneten Laufzeiten und Intensitäten den Beobachtungen genügen.

Vervollständigung des Beobachtungsmaterials. Leider fehlt gerade vor dem Auftauchen der heftigen P-Wellen ($\Delta = 144^0$) Beobachtungsmaterial. Es wurden deshalb Beobachtungen an fremden Stationen benutzt, und zwar in zweierlei Weise: Zunächst wurden aus den intern. Katalogen, die von der Zentralstation in Straßburg[2]) für 1904—1906 herausgegeben sind, bei solchen Beben, deren Herd in Tabelle 1 als hinreichend sicher gefunden war, Stationen mit Herddistanzen zwischen 136^0 und 143^0 gesucht und aus der Herdzeit festgestellt, ob P, PP oder ein Einsatz zwischen P und PP ($= e$) als erster Einsatz angegeben ist. Es wurden hierzu nur Stationen benutzt, deren Apparate und Zeitangaben eine genügende Genauigkeit des Resultates zu liefern schienen. Tabelle 4 gibt das Datum des Bebens, den Beobachtungsort, dessen Herddistanz und die Art des ersten Einsatzes. Man sieht, daß einerseits bei einer Entfernung von $\Delta = 141^0$ noch kein P vorhanden war, daß es andererseits bei $136^1/_2{}^0$ schon beobachtet wurde. Es scheint so, als ob ein eigentliches heftiges P erst bei Δ über 141^0 aufträte, daß bei kleinerem Δ vielleicht ein schwacher Einsatz an der Stelle von P zu finden ist.

---

1) E. Wiechert, Die Erdbebenforschung, ihre Hilfsmittel und ihre Resultate für die Geophysik. Vortrag von der 79. Naturforscherversammlung zu Dresden. Phys. Zeitschr. IX, S. 36/47.

2) l. c.

Tabelle 4.

Datum des Bebens	Beobachtungsort	Distanz °	Art des ersten Einsatzes
12. VI. 05	Taškent	139	PP
17. VII. „	Jurjew	140	e zwischen P und PP
31. I. 06	Zikawei	140	PP
19. II. „	Kremsmünster	138	PP
„ „ „	Straßburg	138	P
14. IV. „	Hamburg	142	P
30. VIII. „	Taškent	141	PP
6. XI. „	Jurjew	140	P
„ „ „	Tiflis	140	P
28. „ „	Irkutsk	141	e zwischen P und PP
18. XII. „	Baku	138	PP
„ „ „	Tiflis	141	P
19. „ „	Batum	136½	P
„ „ „	Jurjew	138	P
„ „ „	Baku	138	P
„ „ „	Tiflis	141	P

Tabelle 5.

a) Beben vom 30. Januar 1910.
Herdzeit (vgl. Tab. 1) $3^h 45^m,4$.

Ort	Δ °	Erstes Eintreffen von Wellen
Cairo	138	$4^h\ 8^m,5$
Tiflis	138	$5^m\ 57^s$?
Wien	159	$4^m\ 53^s$
Göttingen	164	$5^m,6$
Hamburg	166	e 7^m

b) Beben vom 16. Juni 1910.
Herdzeit (vgl. Tab. 1) $5^h 30^m,3$.

Ort	Δ °	Erstes Eintreffen von Wellen
Cairo	141½	$6^h\ 49^m,6$
Kritern	143	*i* $49^m\ 54^s$
Jena	145	50 07
Wien	145	P_z intensiv 50 05 ± 1
Göttingen	145	*i* 50 06
Hamburg	145	*i* 50 03

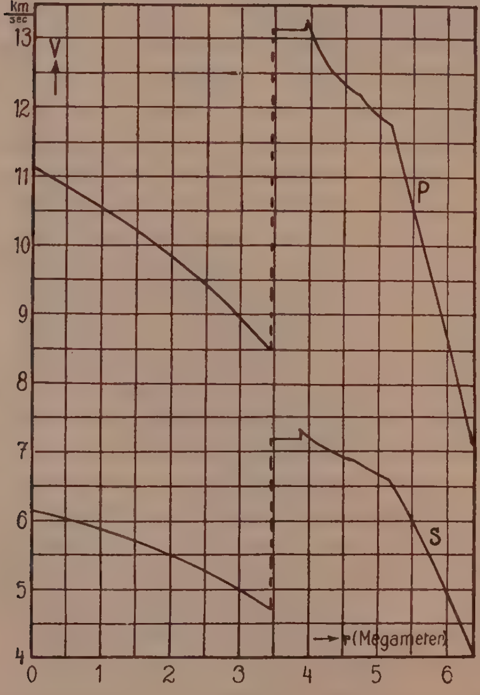
Der zweite Weg ist, daß man bei Beben, deren Distanz von Mitteleuropa etwa 145° ist, das Eintreffen von P an verschiedenen Stationen verfolgt. In Tabelle 5 sind die beiden einzigen Beispiele, bei denen ich genügende Angaben finden konnte, angeführt. Danach scheint das Wiederauftauchen der P-Wellen bei etwa 141—142° stattzufinden; jedenfalls ist, wie Beispiel a) zeigt, bei $\varDelta = 138^0$ noch Schatten der P-Wellen.

Die Scheitelgeschwindigkeit der P-Wellen. Wir müssen nun eine derartige Annahme über die Geschwindigkeit der P-Wellen in großer Tiefe machen, daß sowohl den Laufzeit- als auch den Amplitudenbeobachtungen genügt wird. Wir sehen zunächst, daß die Laufzeitbeobachtungen bis $\varDelta = 110^0$ regelmäßig liegen; andererseits zeigt das Amplitudenverhältnis $\frac{u_{PP}}{u_P}$ bei $\varDelta = 92^0$ einen Sprung nach unten, bei $\varDelta = 102^0$ einen solchen nach oben. Beide Sprünge müssen von P herrühren, da P in der halben Distanz regelmäßig verläuft. Es kann sich jedoch nur um geringe Änderungen der Geschwindigkeit handeln, denn macht man die Annahme, daß die Geschwindigkeit $V = 13{,}30$ km/sec., die sich in Erdbebenwellen V für eine Tiefe von 2440 km ($\varDelta = 76^0$) ergeben hatte, auch in größeren Tiefen vorhanden sei, so kommt man zu Laufzeiten, die den Beobachtungen genügen. Um die Amplitudenbeobachtungen zu erklären, braucht die Geschwindigkeit in 2440 km Tiefe nur 0,15 km/sec. abzunehmen, wie sich in § 7 zeigt. Diese Abnahme kann sprungweise oder stetig erfolgen; der Einfachheit wegen wurde eine sprungweise Änderung und dann konstanter Verlauf angenommen; für die Rechnung für größere Tiefen ist das gleichgiltig; man kann dann sogar 13,30 km/sec. als konstante Geschwindigkeit setzen. Überhaupt ist es, auch bei den früher gefundenen Übergängen, nicht nötig, daß die Geschwindigkeitsänderung plötzlich erfolgt, sondern den Amplitudenbeobachtungen wird auch genügt, wenn man den Übergang auf etwa 50 km verteilt. Die Laufzeitbeobachtungen können über diese Sprünge überhaupt nichts genaues aussagen. Wenn man eine Reihe von Laufzeitbeobachtungen hat, so wird man sie durch eine glatte Kurve ausgleichen und wird auch durch Integration eine glatte $\sin i(\varDelta)$-Funktion und später eine stetige Scheitelgeschwindigkeitsfunktion erhalten; es ist also nicht angängig, aus Laufzeitbeobachtungen zu folgern, daß sich die Geschwindigkeit der Erdbebenwellen in der Tiefe ganz allmählich ändert. — Von $\varDelta = 76^0$ bis $\varDelta = 92^0$ sind die ersten Einsätze wohl als gebeugte P-Wellen aufzufassen; das gleiche gilt für die Einsätze zwischen $\varDelta = 102^0$

und $\varDelta = 142^0$. Um diesen großen Schatten, ferner die Verspätung der P-Wellen bei $\varDelta = 142^0$ und ihre große Intensität beim Wiederauftauchen zu erklären, muß man einen starken Abfall der Ge-

Tabelle 6.
Angenommene Scheitelgeschwindigkeit der P- und S-Wellen.

Radius	V_P	$\mathfrak{V}_S$	Radius	V_P	$\mathfrak{V}_S$
km	km/sec.	km/sec.	km	km/sec.	km/sec.
0	11,10	6,16	3000	9,00	5,00
500	10,88	6,03	3480	8,50	4,72
1000	10,60	5,89		13,15	7,20
1500	10,25	5,70	3880	13,15	7,20
2000	9,90	5,50			7,30
2500	9,48	5,27	3930	13,15	
				13,30	



Figur 4. Geschwindigkeit longitudinaler und transversaler Wellen als Funktion der Tiefe.

schwindigkeit der P-Wellen annehmen. Ich habe 28 verschiedene Annahmen über die Geschwindigkeitsverteilung bei den P-Wellen mit wachsender Tiefe untersucht und fand, daß die in Tabelle 6 wiedergegebene am besten den Beobachtungen genügt. Für die S-Wellen wurde angenommen, daß von einer Tiefe von 2480 km ab ($\varDelta = 81^1/_2{}^0$) die Beziehung besteht $\mathfrak{V}_S : V_P = 1 : 1{,}8$. Figur 4 gibt den ganzen jetzt angenommenen Verlauf der Geschwindigkeit der P- und S-Wellen als Funktion der Tiefe.

Berechnung der Laufzeit- und $\sin i(\varDelta)$-Funktionen. Damit man die Laufzeitfunktion berechnen kann, muß die Laufzeit als Funktion der Distanz sowohl im Mantel (bis $r = 3480$ km) als auch im Kern bekannt sein. Es sind hier folgende Beziehungen, mit deren Hilfe sich die genannten Größen berechnen lassen:

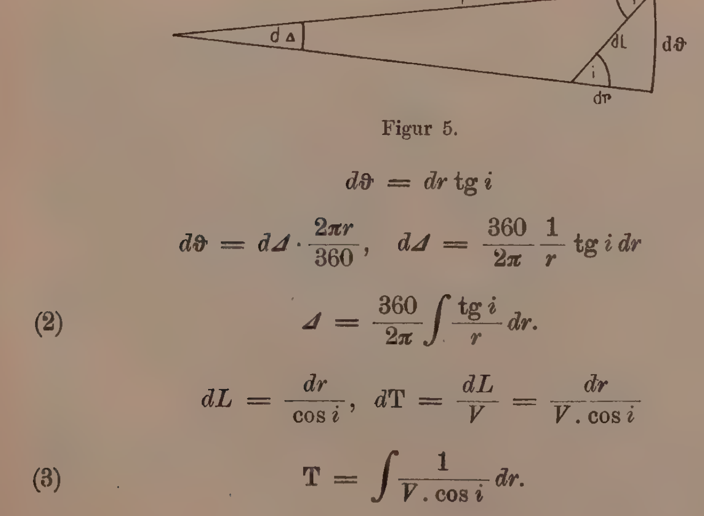
Zunächst gilt die „Strahlgleichung“:

(1) $$\sin i = \frac{V}{r} c;$$

c ist z. B. gegeben durch:

$$c = \frac{r_0}{V_0} \sin i_0.$$

Sie verbindet den Einfallswinklel an einer Stelle, z. B. an der Erdoberfläche, mit dem Einfallswinkel i in der Tiefe r, in der die Geschwindigkeit V vorhanden ist. Nach Figur 5 ist ferner



Figur 5.

$$d\vartheta = dr \operatorname{tg} i$$

$$d\vartheta = d\varDelta \cdot \frac{2\pi r}{360}, \quad d\varDelta = \frac{360}{2\pi} \frac{1}{r} \operatorname{tg} i \, dr$$

(2) $$\varDelta = \frac{360}{2\pi} \int \frac{\operatorname{tg} i}{r} dr.$$

$$dL = \frac{dr}{\cos i}, \quad dT = \frac{dL}{V} = \frac{dr}{V \cdot \cos i}$$

(3) $$T = \int \frac{1}{V \cdot \cos i} dr.$$

Gleichung (2) gestattet, für einzelne Strahlen durch graphisches Integrieren Δ als Funktion von i zu finden. Gleichung (3) analog T als Funktion von i. Ein bestimmter Strahl sei durch i_0 gegeben. Dann liefert (1) den Winkel i als Funktion von r, da $V(r)$ bekannt ist. Es wird nun $\frac{\operatorname{tg} i}{r}$ und $\frac{1}{V \cdot \cos i}$ für eine Reihe von r; V bis zur ersten Sprungstelle ($r = 3930$ km bezw. $\mathfrak{r} = 3880$ km) berechnet, dann durch diese Werte eine Kurve gelegt, die von $r = 6370$ km bis zu $r = 3930$ km bezw. $\mathfrak{r} = 3880$ km graphisch integriert wird. Hat man dies für eine Reihe von Werten durchgeführt, so kann man $\Delta(i)$ und $T(i)$ für den äußersten Mantel zeichnen. Für das kleine Stück bis $r = 3480$ ist V konstant. Es ist nach (1):

$$\frac{\sin i_{3i}}{\sin i_{3f}} = \frac{V_{3i}}{V_{3f}}, \tag{4}$$

wo der Index 3 andeuten soll, daß es sich um die 3. Grenzfläche von außen handelt. Nach Figur 6 gilt für Wellen, die die Grenzfläche 4 nicht erreichen:

$$\Delta_{3-4} = 180^0 - 2\, i_{3f} \tag{5}$$

$$T_{3-4} = \frac{L_{3-4}}{V_{3-4}} = 2 \cdot \frac{r_3}{V_{3-4}} \sin \frac{\Delta_{3-4}}{2}$$

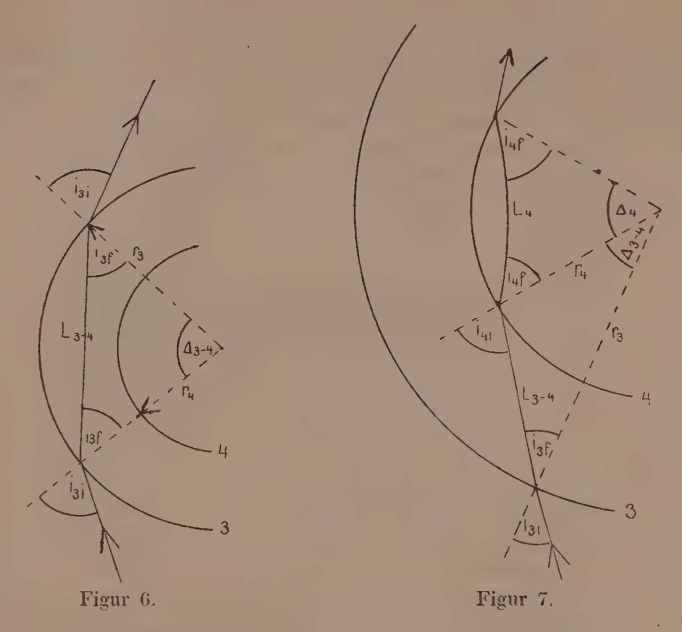
$$T_{3-4} = \frac{2 r_3}{V_{3-4}} \cos i_{3f}. \tag{6}$$

Gleichung (4) liefert i_{3f}, den Einfallswinkel der an 3 gebrochenen Welle, da i_{3i} durch (1) bestimmt ist. i_{3f} könnte auch direkt aus (1) erhalten werden, (5) und (6) liefern Δ_{3-4} und T_{3-4}. Unter Benutzung der Gleichungen (1) bis (6) läßt sich jetzt Δ und T für Wellen, die nur im „Mantel" bis zur Fläche 4 verlaufen, als Funktion von i_0 berechnen. Ist die Distanz Δ, in der die Wellen den Kern 4 streifen, bekannt, so läßt sich der Radius r_4 des Kerns 4 finden. Für die an 4 streifende Welle ist

$$\frac{r_4}{r_3} = \sin i_{3f} = \frac{V_{3-4}}{r_3} \cdot \frac{r_0}{V_0} \cdot \sin i_0$$

$$r_4 = V_{3-4} \cdot \frac{r_0}{V_0} \cdot (\sin i_0)_{\bar{\Delta}}. \tag{7}$$

Da $\sin i_0$ als Funktion von Δ oben berechnet wurde, da ferner $\bar{\Delta}$ für den Grenzstrahl bekannt ist, ist r_4 durch (7) bestimmt. Für Wellen, die in den Kern eintreten, ist nach Figur 7:



Figur 6. Figur 7.

(8) $$\Delta_{3-4} = i_{4i} - i_{3f}$$

$$\frac{L_{3-4}}{r_3} = \frac{\sin \Delta_{3-4}}{\sin i_{4i}}, \quad T_{3-4} = \frac{L_{3-4}}{V_{3-4}}$$

(9) $$T_{3-4} = \frac{r_3}{V_{3-4}} \cdot \frac{\sin \Delta_{3-4}}{\sin i_{4i}}.$$

i_{4i} und i_{3f} sind durch (1) gegeben, also lassen sich auch T_{3-4} und Δ_{3-4} als Funktion von i_0 berechnen. i_{4f} ist ebenfalls durch (1) bestimmt. Δ_4 und T_4 können nach (2) und (3) berechnet werden.

Die Rechnung geschah so, daß zunächst Δ und T bis zur Fläche 3 für alle Strahlen, die über 3 hinausgehen, als Funktion von i_0 nach (1) bis (3) durch Integration berechnet wurde (Tab. 7). Nach (1), (5) und (6) ergibt sich dann $T_{3-4}(i_0)$ und $\Delta_{3-4}(i_0)$ für die Strahlen, die 4 nicht passieren, also auch $T(i_0)$ und $\Delta(i_0)$ für die ganzen Strahlen durch Addition. In Tabelle 7 sind die Rechenresultate für P und S angegeben. r_4 ergab sich nach (7) zu 3480 km für die P-Wellen; für die S-Wellen wurde der gleiche Wert angenommen. Die erhaltenen vollständigen Laufzeitfunktionen für Strahlen, die nicht in den Kern eingedrungen sind, sind in Tabelle 8 angegeben.

Tabelle 7.

Werte von T_{0-3} und Δ_{0-3} im Mantel (0—3) als Funktion des Einfallswinkels i_0, berechnet durch graphisches Integrieren nach (1), (2), (3).

i_0, i_0	longitudinal			transversal		
	i_{3i}	Δ_{0-3}	T_{0-3}	i_{3i}	Δ_{0-3}	T_{0-3}
°	° ′	°	sec.	° ′	°	sec.
19,5	90 0	38,0	363	90 0	40,8	678½
18	68 26	26,8	307	67 58	27,9	567½
16	56 12	20,8	281½	55 54	21,6	518
13	42 41	15,1	255½	42 27	15,6	471½
10	31 40	10,7	243½	31 28	11,1	444½
7	21 36	7,3	235½	21 28	7,6	429½
4	12 7	4,0	232	12 4	4,1	420½
0	0 0	0,0	229	0 0	0,0	416

Tabelle 8.

Laufzeiten von P- und S-Wellen, deren Scheitel zwischen Schicht 3 und Schicht 4 liegt.

a) Laufzeitfunktion für P unter der Annahme $V_{3i} = 13{,}27$ km/sec., $V_{3f} = 13{,}10$ km/sec.

i_0	i_{3f}	Δ_{0-3}	Δ_{3-4}	Δ	T_{0-3}	T_{3-4}	T
°	°	°	°	°	sec.	sec.	sec.
19 28′	80,9	76,0	18,2	94,2	726	94	820
19,4	80,1	73,0	19,8	92,8	700	102	802
19,3	78,8	70,0	22,4	92,4	687	116	803
19,2	77,4	67,2	25,2	92,4	680	130	810
19,1	76,2	65,3	27,6	92,9	673	142	815
19,0	75,0	63,5	30,0	93,5	664	154	819
18,8	72,9	61,0	34,2	95,2	650	175	825
18,6	71,1	58,7	37,8	96,5	641	193	834
18,4	69,5	57,0	41,0	98,0	632	209	841
18,2	67,9	55,2	44,2	99,4	623	224	847
18,0	66,5	53,5	47,0	100,5	614	238	852

b) Laufzeitfunktion für P unter der Annahme $V_{3i} = V_{3f} = 13{,}30$ km/sec.

i_0	i_{3f}	Δ_{0-3}	Δ_{3-4}	Δ	T_{3-0}	T_{3-4}	T
°	°	°	°	°	sec.	sec.	sec.
19 28′	90,0	76,0	0,0	76	726	0	726
19,3	85,0	70,0	10,0	80	687	51	738
19,0	78,0	63,5	24,0	87½	664	122	786
18,4	71,8	57,0	36,4	93½	632	184	816
17,8	67,0	52,0	46,0	98	607	230	837
17,2	62,7	48,2	54,6	102¾	590	270	860

c) Laufzeitfunktion von S unter der Annahme $V_{3i} = 7{,}30$ km/sec., $V_{3f} = 7{,}20$ km/sec.

i_0	i_{3f}	Δ_{0-3}	Δ_{3-4}	Δ	T_{0-3}	T_{3-4}	T
°	°	°	°	°	sec.	sec.	sec.
19 29′	79,9	81½	20	101½	1357	189	1546
19,4	78,5	76½	23	99½	1300	215	1515
19,2	76,4	72	27	99	1250	254	1504
19,0	73,7	67½	32½	100	1225	303	1528
18,6	70,6	62	39	101	1185	358	1543
18,2	67,1	57	46	103	1145	420	1565
17,7	63,8	53	52½	105½	1117	477	1594

Die unter a) und c) berechneten Laufzeiten wurden in Figur 2 eingetragen; man sieht, daß sie in der Tat den Beobachtungen genügen. Für die P-Welle gilt dies auch für die Annahme, die unter b) angegeben ist. Bei a) und c) können die zwischen der letzten direkten Welle (bei $\Delta = 76^0$ für P, bei $\Delta = 81^1/_2{}^0$ für S) und der Spitze ($\Delta = 92^1/_2{}^0$ bezw. $\Delta = 99^0$) liegenden Einsätze von P und S als gebeugte Wellen gedeutet werden.

Für die durch den Kern gehenden Wellen wurden nun nach den Gleichungen (8) und (9) die Werte von Δ_{3-4} und T_{3-4} als Funktion von i_0 berechnet. Die Resultate sind in Tabelle 9 angegeben. Durch Addition erhält man:

$$\Delta_{0-4} = \Delta_{0-3} + \Delta_{3-4}, \quad T_{0-4} = T_{0-3} + T_{3-4}.$$

Tabelle 9.

Laufzeiten der P- und S-Wellen, die den Kern 4 passieren, zwischen 3—4 und zwischen 0—4.

a) Für P:

i_0	i_{4i}	Δ_{0-3}	Δ_{3-4}	Δ_{0-4}	T_{0-3}	T_{3-4}	T_{0-}
°	°	°	°	°	sec.	sec.	sec.
17,2	90,0	24	27,3	51½	295	135	430
17,0	81,5	23½	20,1	43½	292	102½	394½
16,0	69,2	20¾	13,1	34	281	71½	352½
15,0	61,2	18¾	10,1	28¾	271	59	330
14,0	55,0	16¾	8,4	25	262	52½	314½
12,0	45,0	13½	6,2	19¾	250½	44½	295
10,0	36,2	10,7	4,6	15¼	243	40	283
8,0	28,2	8,4	3,4	11,8	237½	37	274½
6,0	20,8	6,3	2,4	8,7	233½	35	268
4,0	13,6	4,2	1,5	5,7	231½	34	265½
2,0	6,8	2,1	0,8	2,9	230	33½	263½
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	229	33	262

b) Für S:

i_0	i_{4i}	Δ_{0-3}	Δ_{3-4}	Δ_{0-4}	T_{0-3}	T_{3-4}	T_{0-4}
°	°	°	°	°	sec.	sec.	sec.
17,7	90,0	26,6	26,2	52,8	558	238	796
17,0	74,2	24,5	14,7	39,2	539	144	683
16,0	65,4	21,6	10,8	32,4	518	111	629
15,0	58,6	19,2	8,7	27,9	498	95	593
14,0	52,9	17,4	7,3	24,7	483	86	569
12,0	43,2	13,9	5,2	19,1	460	71	531
10,0	35,0	11,1	4,1	15,2	444	67	511
8,0	27,2	8,7	3,0	11,6	434	60	494
6,0	20,2	6,5	2,1	8,6	425½	57½	483
4,0	13,3	4,3	1,1	5,4	420½	56½	477
2,0	6,6	2,1	0,4	2,5	417	56	473
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	416	55½	472

Wir haben jetzt für Longitudinal- und Transversalwellen $i_{4i}(i_0)$, $\Delta_{0-4}(i_0)$ und $T_{0-4}(i_0)$. Da bei der ziemlich beträchtlichen Differenz der Geschwindigkeiten V_{4i} und V_{4f} an der Schicht 4 außen und innen zu erwarten ist, daß sich auch gebrochene Wechselwellen ausbilden, so empfiehlt es sich, für den Kern Werte von $\Delta(i_{4f})$

und $T(i_{4f})$ auszurechnen; analog (4) ergibt sich dann aus (10) $i_{4f}(i_{4i})$

$$\sin i_{4f} = \frac{V_{4f}}{V_{4i}} \cdot \sin i_{4i} \tag{10}$$

für alle möglichen Übergänge. Es sind dies folgende:

Tabelle 10.

	einfallende Welle	gebrochene Welle	V_{4i}	V_{4f}
			km/sec.	km/sec.
LL	Longitudinal	Longitudinal	13,3	8,5
LT	Longitudinal	Transversal	13,3	4,7
TL	Transversal	Longitudinal	7,2	8,5
TT	Transversal	Transversal	7,2	4,7

In Tabelle 11 ist für diese Fälle $i_{4i}(i_{4f})$ berechnet.

Tabelle 11.

Einfallswinkel i_{4f} am Kern innen als Funktion des Einfallswinkels i_{4i} am Kern außen für die in Tabelle 10 angegebenen Fälle:

i_{4i}	i_{4f} für den Fall			
	LL	LT	TL	TT
°	°	°	°	°
90	39,7	20,8	—	41,0
80	39,0	20,5	—	40,2
70	36,9	19,5	—	38,0
60	33,6	17,9	—	34,6
57,9	—	—	90	—
50	29,3	15,8	65	30,2
40	24,3	13,2	49½	25,0
30	18,6	10,3	36	19,1
20	12,7	6,9	23½	12,9
10	6,4	3,5	11½	6,5

Es ist nun bei gegebenem i_0 und bekanntem $T_4(i_{4f})$ und $\Delta_4(i_{4f})$ möglich, jede beliebige durch den Kern gebrochene Welle zu verfolgen.

Die Berechnung von $T_4(i_{4f})$ und $\Delta_4(i_{4f})$ kann nach (2) und (3) durch Integration erfolgen. Da jedoch die beiden zu inte-

grierenden Kurven für den Scheitel der Welle Unendlichkeitsstellen haben, ist dieser Weg umständlich und ungenau. Es wurde daher zur Berechnung von $\Delta_4 (i_{4f})$ folgende Methode benutzt:

Die Gleichung (1) liefert bei einem gegebenen Strahl den Einfallswinkel für alle Tiefen. Für den Scheitelradius r_S der Welle gilt nach (1) folgende Beziehung, falls V_S die Scheitelgeschwindigkeit ist:

$$1 = \frac{V_S}{r_S} \cdot c, \tag{11}$$
$$\frac{V_S}{r_S} = \frac{1}{c}.$$

Trägt man $\frac{V}{r}$ als Funktion von r auf, so erhält man aus dieser Kurve r_S als Abszisse, die zu der Ordinate $\frac{1}{c}$ gehört. Mit Hilfe der so erhaltenen Scheiteltiefe und der Einfallswinkel der Strahlen in verschiedener Tiefe läßt sich bei der vorliegenden einfachen Geschwindigkeitsverteilung (Figur 4) graphisch hinreichend genau der Verlauf verschiedener Strahlen verfolgen, und man erhält so $\Delta_4 (i_{4f})$. Für $T_4 (i_{4f})$ gilt dann die bekannte Beziehung

$$T_4 = \frac{1}{V_{4f}} \cdot \int \sin i_4 \, d\Delta_4. \tag{12}$$

Hierbei sind V_{4f} und i_{4f} die Werte der Geschwindigkeit innen am Kern 4 bezw. der Einfallswinkel daselbst. Für die Geschwindigkeit der Transversalwellen war im Kern gesetzt worden:

$$\mathfrak{V} = \frac{V}{1{,}8}.$$

Infolgedessen ist

$$(\Delta_4 (i_{4f}))_{\text{Transv.}} = (\Delta_4 (i_{4f}))_{\text{Longit.}}$$
$$T(\Delta)_{\text{Transv.}} = 1{,}8 \; T(\Delta)_{\text{Longit.}}$$

Tabelle 12 gibt berechnete Werte von $\Delta_4 (\sin i_{4f})$, Tabelle 13 gibt Laufzeiten im Kern.

Tabelle 12.

Distanz als Funktion des Sinus des Einfallswinkels für den Kern.

sin i	0,95	0,90	0,80	0,60	0,30	0,20
Δ^0	$27\frac{1}{2}$	41	58	86	123	139

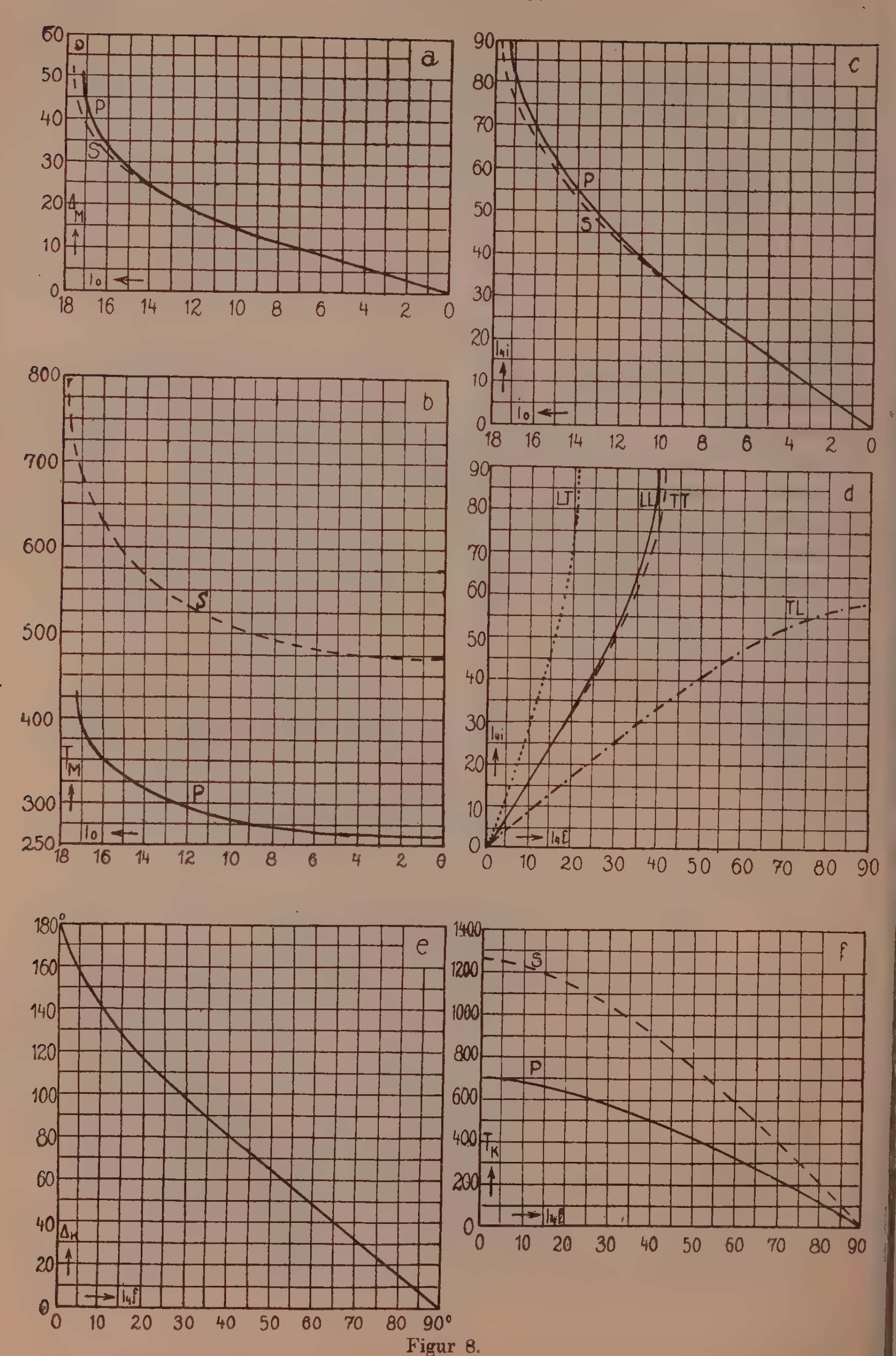
Tabelle 13.

Laufzeiten longitudinal (T_L) und transversal (T_T) im Kern als Funktion des Einfallswinkels im Kern.

i	70°	60	50	40	30	20	10	0
T_L sec.	225	325	415	500	580	635	680	700
T_T sec.	405	585	750	900	1045	1145	1225	1260

Die in den Tabellen 9—13 berechneten Funktionen gestatten z. B.. direkt die Laufzeitfunktionen der Wellen $P_4\overline{P_4 P}$, $P_4\overline{S_4}P$, $\overline{P_4}P_4\overline{S}$, $\overline{P_4 S_4 S}$. $P_4 P_4 P_4\overline{P}$ (einer Welle, die dauernd longitudinal lief, an der Grenze 4 erst gebrochen, dann reflektiert und endlich wieder gebrochen wurde) sowie der entsprechenden S-Wellen zu berechnen. Zu diesem Zweck wurden die Funktionen in hinreichend großem Maßstabe gezeichnet. Figur 8 ist ein verkleinertes Bild. 8[a] gibt die Zentriwinkel Δ_{0-4}, die dem im Mantel (0—4) durchlaufenen Weg zugehören, als Funktion des Einfallswinkels an der Erdoberfläche für longitudinale (—) und transversale (- - -) Wellen. Figur 8[b] gibt die zugehörigen Laufzeiten. Beide Figuren beruhen auf den Rechnungen in Tabelle 9. Das gleiche gilt für Figur 8[c], die angibt, unter welchem Winkel i_{4i} die Welle auf die Kerngrenze 4 trifft, wenn sie an der Erdoberfläche den Einfallswinkel i_0 besitzt. 8[d] gibt dann die Einfallswinkel im Kern innen als Funktion der äußeren Einfallswinkel nach Tabelle 11 (LL —, LT ·····, TL -·-·-, TT - - - -). 8[e] und 8[f] geben nach Tabelle 12 bezw. 13 Distanz und Laufzeit im Kern als Funktion des inneren Einfallswinkels i_{4f} im Kern.

Wir können mit Hilfe von Figur 8 z. B. die Frage beantworten: Welche Herddistanz und welche Laufzeit besitzt eine Welle $\overline{S_4 P_4}\overline{S}$, die einen Einfallswinkel von $i_0 = 10^0$ hat? Die Welle läuft zuerst transversal; in Figur 8[a] und 8[b] haben wir daher die gestrichelten Kurven zu benutzen. Wir finden bei $i_0 = 10^0$ die Werte $\Delta_{0-4} = 15.2^0$, $T_{0-4} = 511$ sec. Figur 8[c] zeigt, daß die Welle unter einem Winkel von $i_{4i} = 35^0,0$ auf den Kern trifft. Da wir einen Übergang von transversal zu longitudinal haben, müssen wir in Figur 8[d] die mit -·-·- bezeichnete Kurve benutzen. Wir finden, daß dem Winkel $i_{4i} = 35^0$ ein Winkel $i_{4f} = 42^1/_2{}^0$ innen im Kern entspricht. Distanz und Laufzeit im Kern ergeben sich aus 8[e] und 8[f] zu 76° bezw. 480 sec., da man jetzt die ausgezogenen Kurven benutzen muß. Ginge nun die Welle als P-Welle weiter,



Figur 8.

so müßte man alle Kurven wieder in umgekehrter Reihenfolge benutzen. In unserm Falle wissen wir, daß wegen der Symmetrie ist:

$$\varDelta = 2\varDelta_{0-4} + \varDelta_4, \quad T = 2T_{0-4} + T_4.$$

Es ergibt sich $\varDelta = 106^1/_2{}^0$, $T = 1502$ sec.

Ganz analog wie in diesem Falle habe ich eine Reihe von Laufzeit- und Distanzwerten für andere Wellen berechnet. Die Resultate sind in den Tabellen 14[a] bis 14[e] angegeben.

Tabelle 14.

Laufzeiten und Distanzen verschiedener Wellen, die den Kern passieren, als Funktion des Einfallswinkels.

a) $\overline{P_4P_4P}$ (= P).

i_0 °	$\sin i_0$	$\varDelta$ °	T sec	i_0 °	$\sin i_0$	$\varDelta$ °	T sec
17,2	0,296	183	1360	11,0	0,191	143	1184
17,0	292	168¹/₂	1297	10,0	174	143¹/₂	1187
16,5	284	159	1255	9,0	156	145	1192
16,0	276	154	1232	8,0	139	147	1195
15,5	267	151¹/₂	1217	7,0	122	149	1200
15,0	259	148	1205	6,0	105	151¹/₂	1203
14,5	250	147	1197	5,0	087	154¹/₂	1209
14,0	242	145	1192	4,0	070	158	1214
13,0	225	144	1187	3,0	052	163¹/₂	1220
12,0	208	143¹/₂	1185	0,0	000	180	1225

b) $\overline{S_4S_4S}$ (= S).

i_0 °	$\varDelta$ °	T sec	i_0 °	$\varDelta$ °	T sec
17,7	184¹/₂	2382	10	144	2147
17	160¹/₂	2276	8	146	2153
16	151	2213	6	151	2166
15	147	2176	4	159	2184
14	145¹/₂	2158	2	169	2196
12	143¹/₂	2142	0	180	2204

c) $\overline{P_4S_4P}$, $\left\{\begin{matrix}\overline{P_4S_4S}\\ \overline{S_4S_4P}\end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix}\overline{P_4P_4S}\\ \overline{S_4P_4P}\end{matrix}\right.$.

	$\overline{P_4S_4P}$		$\overline{P_4S_4S}$, $\overline{S_4S_4P}$			$\overline{P_4P_4S}$, $\overline{S_4P_4P}$	
i_0	Δ	T	Δ	T	i_0	Δ	T
°	°	sec	°	sec	°	Δ	T
17,2	219	1995	181½	2071	9,5	146	1436
17	204	1930	174½	2038	9,3	139	1405
16	187	1856	166½	2004	8,9	133	1380
15	179½	1820	163	1986	8,3	131½	1371
14	174	1799	160½	1977	7,8	131½	1370
12	169½	1775	158½	1966	6,7	133½	1376
10	167½	1771	160	1970	5,7	136	1386
8	168	1769	162	1973	4,5	141	1404
6	168	1772	165½	1980	3,3	147½	1414
4	172	1776	169	1985	2,2	155	1423
0	180	1784	180	1994	0,0	180	1435

(Für die mit P beginnenden Wellen ist i_0 Einfallswinkel am Herde, für die mit S beginnenden ist es i_0).

d) $\overline{S_4P_4S}$.

i_0	Δ	T	i_0	Δ	T
°	°	sec	°	°	sec
14,8	54	1175	11	102	1480
14,7	65	1260	10	106½	1502
14,5	70	1295	9	112	1529
14,2	77	1341	8	116	1543
14,1	79½	1348	7	122	1566
13,6	87	1395	6	127	1578
12,0	94½	1442	4	140½	1609
			0	180	1645

e) $\overline{P_4P_4}\,\overline{P_4P}$.

Δ°	263	238½	240	243½	247½	....
360—Δ	97	121½	120	116½	112½	....
T sec	1860	1750	1755	1767	1780	....

Schließlich gibt Tabelle 15 die Laufzeiten der an der Erdoberfläche reflektierten Wellen PP, PPP (für $\varDelta > 78^0$), PPP für $\varDelta$ über 180^0 und SS für $\varDelta > 78^0$ nach den in Erdbebenwellen VI angegebenen Werten. Es wurde gesetzt $(T_{PP})_{\varDelta} = 2(T_P)_{\frac{\varDelta}{2}}$ u. s. w.

Bei der Welle PPP, die über 180 gelaufen ist, wurde $360^0 - \varDelta$ angegeben.

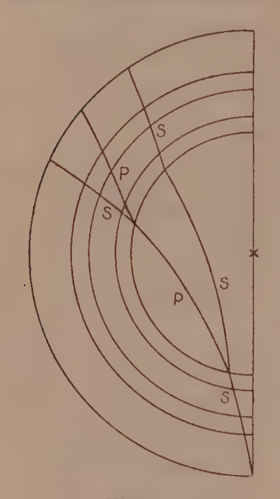
Tabelle 15.

Laufzeiten verschiedener an der Erdoberfläche reflektierter Wellen als Funktion der Distanz $\varDelta$ für $\varDelta > 78^0$.

$\varDelta$	Laufzeit von			$\varDelta$	Laufzeit von			
	PP	PPP	SS		PP	PPP	PPP über 180°	SS
°	sec	sec	sec	°	sec	sec	sec	sec
78	932	1044	1666	132	1325	1512	2178	2370
84	978	1104	1748	138	1365	1557	2142	2440
90	1023	1162	1830	144	1404	1602	2105	2508
96	1068	1218	1911	150	1440	1647	2067	2574
102	1113	1272	1991	156	1473	1692	2028	2639
108	1158	1324	2069	162	1500	1736	1989	2701
114	1202	1374	2146	168		1780	1949	
120	1244	1422	2223	174		1823	1908	
126	1285	1468	2298	180		1866	1866	

Alle in Tabelle 14 und 15 berechneten Laufzeiten wurden in Figur 2 eingetragen. Man sieht zunächst, daß die berechnete Laufzeitkurve für P den Beobachtungen vollkommen genügt. Einzelne der dicht hinter P liegenden (in Figur 2 nicht gezeichneten) Einsätze gehören vielleicht dem oberen Teile der Kurve ($\varDelta > 143^0$) an; im allgemeinen ist jedoch kein Zusammenhang zwischen diesen und der Kurve vorhanden. Auch auf die Kurve von S fällt eine Reihe von Punkten. Diese Einsätze können also mit ziemlicher Sicherheit als S angesprochen werden. Bei den Wechselwellen $\overline{P_4 S_4 P}$ und $\overline{P_4 S_4 S}$ fallen die Spitzen, die am stärksten sein müssen, in so große Distanzen, daß sie nicht beobachtbar waren. Dagegen liegt die Welle $\overline{S_4 P_4 S}$ bei $\varDelta = 80^0$ in der Nähe von S, und beeinflußt S möglicherweise. Von 104^0 ab geht $\overline{S_4 P_4 S}$ mitten durch eine Reihe von beobachteten Punkten, deren Bedeutung zunächst

unklar schien. K. Wegener hat diese Punkte in seinen Laufzeitkurven [1]) als S angesprochen; sie liegen dort ebenfalls gerade auf der Höhe, in der die Welle $S_4 P_4 S$ berechnet ist. Die letzten dieser Wechselwellen, $P_4 P_4 S$ und $\overline{S_4 P_4 P}$, die gleiche Laufzeitfunktionen besitzen, sind ebenfalls bei Wegener mit zahlreichen Beobachtungen (als „PR?“ bezeichnet) vertreten. In Figur 2 mangelt es gerade in den Distanzen 130⁰—144⁰ an Beobachtungen; 2 Werte fallen nahe an die Kurve. Bei höheren Distanzen liegt die Welle $\overline{S_4 P_4 P}$ nahe bei PP und ist wohl die Ursache der Undeutlichkeit des Einsatzes von PP und damit der verhältnismäßig großen Streuung der Laufzeitbeobachtungen von P.



Figur 9.

Um ein Bild des Verlaufes der verschiedenen Arten von Wellen zu erhalten, wurde in Figur 9 der Verlauf einer $S_4 \overline{S_4 S}$-Welle, einer $\overline{S_4 P_4 S}$-Welle und einer $\overline{S_4 P_4 P}$-Welle gezeichnet.

Die innen am Kern reflektierte P-Welle $\overline{P_4} P_4 P_4 P$ ist nicht beobachtet. Die übrigen derartigen Wellen besitzen so große Laufzeiten, daß sie im Gebiete der „langen Wellen“ liegen. Die am Kern reflektierten Wellen $P_4 P$ und $S_4 S$ sind schwerlich zu finden, da bei ihnen die Energie auf eine sehr große Fläche trifft. Die Einfallswinkel liegen zwischen 0^0 und 17^0, die Distanzen Δ zwischen 0^0 und 104^0. Ihre Laufzeiten wurden berechnet und in die Tafel eingetragen.

Die PP-Welle trifft, wie in § 4 gezeigt ist, etwa 12 sec früher ein als die Rechnung ergibt. Es darf daher nicht wundern, daß die PPP-Wellen im allgemeinen noch früher gegenüber der Rechnung kommen.

In Figur 2 wurden schließlich die Wellen, die gebeugt zu sein scheinen, durch gestrichelte Kurven angedeutet, und es wurde die Kurve für die PS-Welle eingezeichnet, nachdem eine Reihe von Werten dafür berechnet waren. Hiernach ist in Figur 2 keine

1) K. Wegener, „Die Weltbeben im Jahre 1909 und 1910 und die aus ihnen konstruierten Laufzeitkurven“ in „Die seism. Registr. am Samoa-Observ. der Kgl. Ges. der Wissensch. zu Göttingen in den Jahren 1909 und 1910“. Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl. 1912.

größere Gruppe von Wellen mehr vorhanden, die nicht gedeutet ist, außer vielleicht den Einsätzen zwischen P und PP.

Alle beobachteten Laufzeitfunktionen sind in der Tafel zusammengestellt.

§ 7. Berechnung der Bodenverrückungen durch longitudinale Vorläufer für Distanzen über 80°.

Die Bodenverrückungen der reflektierten longitudinalen Vorläufer PP und PPP können mit Hilfe der in Erdbebenwellen V angenommenen $\sin i(\Delta)$-Funktion berechnet werden. Für longitudinale Vorläufer gilt nach Erdbebenwellen VI, Gleichung (11) unter Benutzung der auf (11) folgenden Berechnung von z für eine n-mal reflektierte Welle:

$$(13)\quad u^{(n+1)} = c\,.\,k\,.\sqrt{z}\left(\frac{u}{A_i}\right)^{(n+1)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2\pi R^2\sin\Delta\,.\,\delta^{(n+1)}\cos i^{(n+1)}}}\cdot\prod_n\left(\frac{E_r}{E_i}\right)^{(n)}.$$

$u^{(n+1)}$ ist die Bodenverrückung einer n mal reflektierten Welle beim $(n+1)^{\text{ten}}$ Auftreffen auf die Erde. c und k sind für longitudinale Wellen Konstanten. z wird für alle Rechnungen gleich gewählt. $\left(\frac{u}{A_i}\right)^{(n+1)}$ ist das Verhältnis der Bodenverrückung zur einfallenden Amplitude beim letzten Auftreffen auf die Erde. R ist der Erdradius, Δ die Distanz, $\delta^{(n+1)}$ die Zone, auf welche die Wellen, die die Elementarzone z passiert haben (vgl. Erdbebenwellen V, § 3 und Erdbebenwellen VI, § 3) zuletzt auftreffen, i ist der Einfallswinkel und $\left(\frac{E_r}{E_i}\right)$ das Verhältnis der reflektierten zur einfallenden Energie an den Reflexionsstellen. $\left(\frac{E_r}{E_i}\right)$ hat in unserm Falle bei mehrmaliger Reflexion denselben Wert, da wir nur longitudinale Wellen benutzen. Fassen wir alle Konstanten und die nur von der Distanz Δ abhängigen Größen zusammen, so erhalten wir für eine n-mal longitudinal reflektierte Welle:

$$(14)\qquad u^{(n+1)} = C\cdot\left(\frac{u}{A_i}\right)^{(n+1)}\sqrt{\frac{1}{\delta^{(n+1)}\cos i}\cdot\left(\frac{E_r}{E_i}\right)^{n}}.$$

Wir wollen C als Einheit wählen, um die relativen Größen der Bodenverrückungen durch PP und PPP, später auch durch P zu erhalten. Es ist dann

$$u_{PP} = \left(\frac{u}{A_i}\right)_i \cdot \left(\frac{A_r}{A_i}\right)_i \sqrt{\frac{1}{\delta_{PP} \cos i}} \tag{15}$$

$$u_{PPP} = \left(\frac{u}{A_i}\right)_i \cdot \left(\frac{A_r}{A_i}\right)_i^2 \sqrt{\frac{1}{\delta_{PPP} \cos i}} . \tag{16}$$

z ist bestimmt durch die Grenzstrahlen mit den Einfallswinkeln i_+ und i_-, die auf der Elementarkugel die Zone z, auf der Erdoberfläche beim letzten Auftreffen eine Zone von der Breite δ ausschneiden. i_+ und i_- werden so bestimmt, daß der Strahl mit dem Einfallswinkel i die Zone z in 2 gleiche Teile teilt (Figur 2, Erdbebenwellen V). Nach Erdbebenwellen V (2) ist dies erreicht, wenn

$$\cos i_- - \cos i = \cos i - \cos i_+ = \frac{1}{2N} .$$

Setzt man $\frac{1}{2N}$ für alle Rechnungen konstant, so ist auch z konstant. In unserm Falle wurde gesetzt: $1 : 2N = 0{,}00005$.

Die Resultate der Rechnung sind für PP und PPP in Tabelle 16 angegeben und in Figur 10 eingetragen.

Tabelle 16.

Relative Bodenverrückungen durch longitudinale reflektierte Vorläufer.

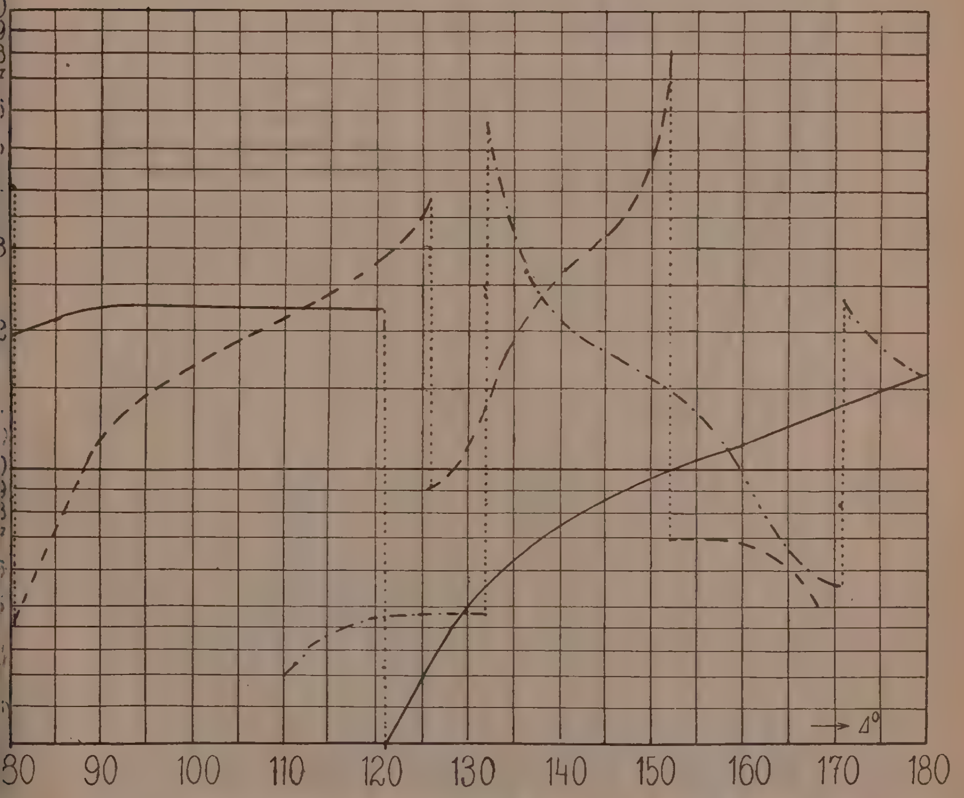
a) PP.

i	Δ	u_{PP}	i	Δ	u_{PP}
° ′	°		° ′	°	
29 35	80,6 ↓	0,44	25 40	126 ↓	0,91
29 31	88	0,99	25 36	130	1,07
29 14½	96	1,53	25 15	136	2,10
28 49	104	1,80	23 53	144	3,17
28 6	112	2,29	22 42	148	3,56
27 0	120	2,75	19 28	152 ↑	8,2
25 40	126 ↑	3,94			
			19 28	152 ↓	0,70
			19 16	161	0,67

(Ein ↑ bedeutet limes bei Annäherung von unten, ein ↓ desgl. von oben.)

b) PPP für $\Delta \leqq 180^0$.

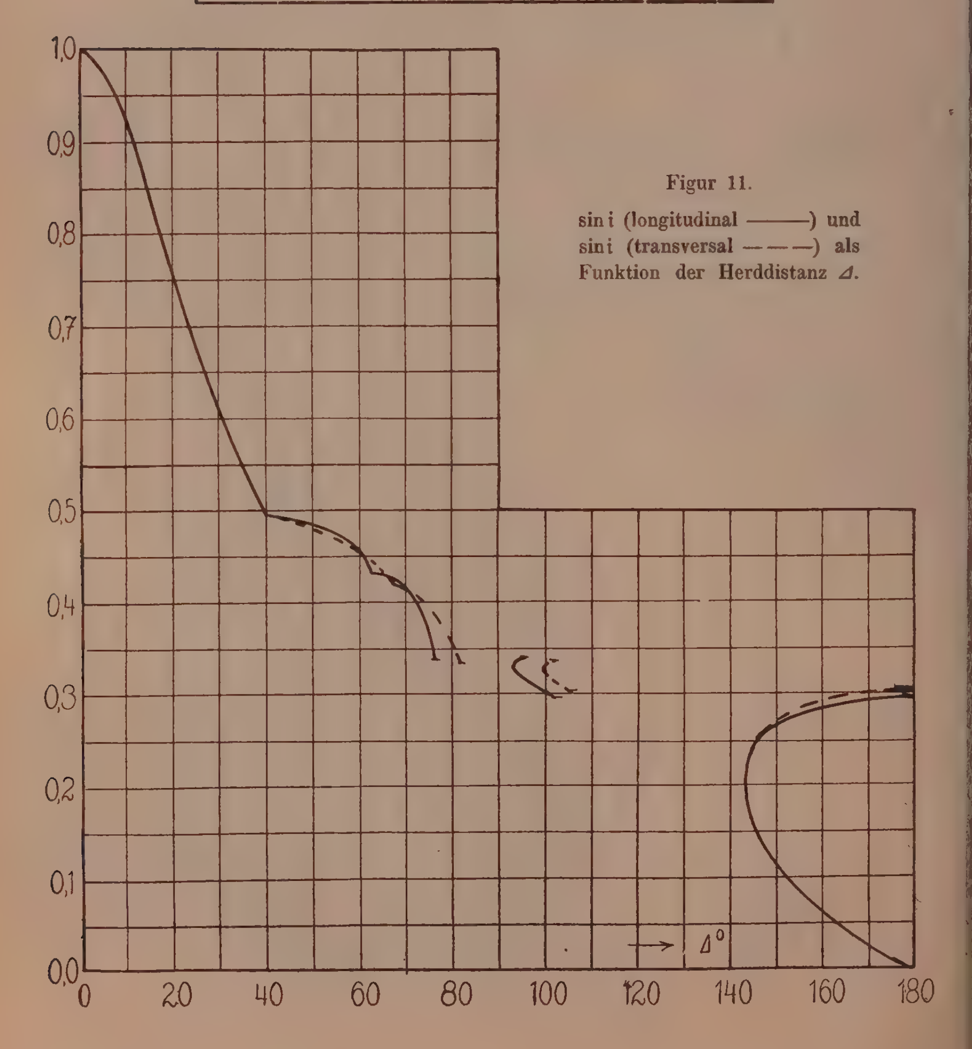
i		Δ	u_{PPP}	i		Δ	u_{PPP}
°	′	°		°	′	°	
40	57	81,0	1,88	29	35	120,9 ↓	0,242
40	0	83,7	1,97	29	31	132,0 ↓	0,543
37	50	90,0	2,30	29	14½	144,0	0,845
35	0	99,4	2,23	28	49	156,0	1,01
31	55	111,0 ↑	2,26	28	6	168,0	1,33
29	35	120,9 ↑	2,21	27	0	180,0	1,61



ur 10. Berechnete relative Bodenverrückungen durch PP (— — —), PPP für $\Delta < 180^0$ (———) und PPP für $\Delta > 180^0$ (—·—·—) als Funktion der Herddistanz Δ.

c) PPP für $\Delta > 180°$.

i		$360-\Delta$	u_{PP}	i		$360-\Delta$	u_{PP}
°	′	°		°	′	°	
25	40	171 ↑	2,38	22	42	138 ↑	2,34
25	40	171 ↓	0,55	19	28	132	5,38
25	36	165 ↓	0,66	19	28	132 ↓	0,48
25	15	156	1,29	19	23	126	0,48
23	53	144	1,86	19	16	118	0,46



Figur 11.
sin i (longitudinal ———) und sin i (transversal – – – –) als Funktion der Herddistanz Δ.

Ein Versuch, $\frac{u_{PPP}}{u_{PP}}$ durch Beobachtungen zu kontrollieren, zeigte, daß die Beobachtungen etwa $\frac{1}{3}$ der berechneten Werte lieferten und ziemlieh weit streuten. Es ist dies infolge der zu erwartenden Unregelmäßigkeiten bei den zwei Reflexionen durchaus erklärlich.

Die Berechnung des Bodenverrückungsverhältnisses $\frac{u_{PP}}{u_P}$. Aus den Tabellen 8a und 14a ist die $\sin i(\varDelta)$-Funktion für P bekannt. Figur 11 zeigt ihren Verlauf sowie den Verlauf der $\sin i(\varDelta)$-Funktion bei S. Es wurden mit ihrer Hilfe zunächst die Vertikalbeobachtungen in § 5 auf die dort angegebene Weise auf horizontale transformiert. Tabelle 17 liefert die Faktoren. Die Transformationskurve ist in Figur 3 eingetragen. Ferner wurde u_P berechnet. Es ist nach (14)

$$u_P = \left(\frac{u}{A_i}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{\delta_P \cos i}}. \tag{17}$$

Tabelle 18 gibt die berechneten Werte von u_P sowie $\frac{u_{PP}}{u_P}$. Die erhaltenen Werte wurden in Figur 3 eingetragen. Man sieht, daß sie sehr gut den Beobachtungen genügen, wenn man noch berücksichtigt, daß bei $\varDelta > 144^0$ u_P durch die kurz nach P auftreffende zweite P-Welle, u_{PP} durch $\overline{P_4P_4S}$ beeinflußt wird, und daß bei $\varDelta = 100^0$ die Bodenverrückungen außerordentlich stark bei kleinen Änderungen der Geschwindigkeit variieren.

Werfen wir nun noch einen kurzen Rückblick auf die beiden letzten Paragraphen, so sehen wir, daß es uns möglich war, mit

Tabelle 17.

Faktoren f zur Transformation der vertikalen Beobachtungen von $\frac{w_{PP}}{w_P}$ auf horizontale.

$\varDelta$	$\bar{i}_{PP}$	$\bar{i}_P$	f	$\varDelta$	$\bar{i}_{PP}$	$\bar{i}_P$	f
°	°	°		°	°	°	
90	19,5	31,8	1,6	143½	26,2	12,2	2,28
95	31,7	20,7	1,65	144	26,1	10,6	2,62
100	31,4	20,0	1,7	148	24,8	8,2	3,2
105	31,1	19,4	1,7	152	21,5	6,9	3,6
110	30,7	19,4	1,7	155	21,5	5,3	4.2
				160	21,5	4,1	5,5
				165	21,5	3,1	7,2

Tabelle 18.

Berechnung des Bodenverrückungsverhältnisses $\frac{u_{PP}}{u_P}$ für $1:2N = 0{,}0005$.

i	Δ	δ	u_P	$\frac{u_{PP}}{u_P}$	i	Δ	δ	u_P	$\frac{u_{PP}}{u_P}$
°	°	°			°	°	°		
19,3	92,4	0,000	∞	0,00	11,0	143	0,000	∞	0
19,1	92,9	0,107	2,28	0,61	10	143½	0,025	2,5	1,15
18,8	95,0	0,109	2,22	0,67	9	145	0,057	1,5	2,1
18,5	97,4	0,108	2,18	0,74	8	146½	0,077	1,1	3,1
18,0	100,5	0,112	2,09	0,8	7	149	0,11	0,81	5,3
					6	151½	0,15	0,60	11,5
					5,8	152 ↑	0,16	0,57	14
					5,8	152 ↓	0,16	0,57	1,2
					5	154½	0,23	0,41	1,7
					4	158	0,33	0,28	2,5
					3	163½	0,57	0,15	4

Hilfe einer Annahme über die Geschwindigkeit der Erdbebenwellen im Erdkern die Laufzeiten und Bodenverrückungen der P-Welle für große Distanzen in Übereinstimmung mit den Beobachtungen zu berechnen, sowie eine Reihe von beobachteten Einsätzen ihrem Charakter nach zu erklären. Ein Widerspruch mit Beobachtungen wurde nirgends gefunden. Wir dürfen daher annehmen, daß die gewählte Geschwindigkeitsverteilung der wirklichen nahe kommt.

§ 8. Über die Perioden der ersten Vorläufer.

Eine genauere Untersuchung der Größe der Perioden der Vorläufer wurde zuerst von Roesener [1]) für Göttingen gegeben. In 2 späteren Arbeiten [2]) habe ich selbst Beobachtungen über Perioden der Vorläufer in Göttingen bei Herddistanzen unter 80°, sowie über Vorläuferperioden eines Bebens an verschiedenen Stationen mitgeteilt. In allen diesen Arbeiten war nur wenig bezw. überhaupt kein Material aus großen Distanzen. In dem vorliegenden

1) F. Roesener. Vergleichende Untersuchungen über die Perioden der Erdbebenwellen mit bes. Berücksichtigung der Nachläuferwellen. Göttinger Dissert., und Beitr. z. Geophysik, 12.

2) L. Geiger und B. Gutenberg, Über Erdbebenwellen VI. Gött. Nachr., math.-phys. Kl., 1912, § 5.

B. Gutenberg, Beobachtungen über die Perioden der Erdbebenvorläufer. (Beitr. z. Geophysik, im Druck).

Tabelle 19.

Beobachtete Perioden der 1. Vorläufer.

Nr.	Δ	Periode von		Gewicht bei		Nr.	Δ	Periode von		Gewicht bei	
	°	P sec.	PP sec.	P	PP		°	P sec.	PP sec.	P	PP
1	108	?	6	?	3	42	86	4; 12	4; 12	2; 3	2; 2
2	171	6; 12	6; 12	2; 2	2; 2	43	147	5	4; 7	2	3; 1
3	98	6	4½	2	2	44	92	4	3	1	1
4	121	—	11	—	1	45	109	5½; 12	6; 12½	2; 2	2; 3
5	153	4	4	2	1	46	87½	6; 12½	6; 12½	3; 3	3; 3
6	122	—	6; 12	—	2; 2	47	87½	5	5	3	3
7	157	6	6	2	1	48	148	5	5	2	2
8	144	12	13	1	1	49	80	5; 12	5	2; 2	2
9	114	6	5	3	2	50	145	5½; 12	5; 13	2; 1	2; 2
10	90	5; 11	6; 13	3; 1	3; 1	51	89	6; 11	5; 10	2; 2	2; 2
11	136	—	5	—	3	52	82	5	5	3	3
13	147	5	6	1	2	53	135	—	12	—	2
14	96	6	7	2	3	54	104	?	5	?	3
15	147	5	6	3	3	55	164	5½	5; 9	2	2; 1
16	101	4	4	1	1	56	148	6	6	1	2
17	101	5	5	2	2	57	148	5	7	2	1
18	116	—	11½	—	3	58	148	4	5	2	2
19	121	—	5; 13	—	1; 2	59	148	4	5	2	2
20	101	5	5; 12	3	2; 2	60	148	6; 12	12; 18	2; 3	3; 1
21	148	6	6	3	3	61	147	5½; 12	5½	2; 3	3
23	121	—	4	—	1	62	81½	5; 11½	5; 11½	2; 3	2; 3
24	150	3	7½	1	2	63	145	6; 11½	6; 11½	1; 3	1; 3
25	118	—	6	—	3	64	88	6; 12	6; 12	2; 2	3; 2
26	147	5; 7	5	3; 1	1	65	146	6; 12	6; 12; 18	3; 2	2; 2; 1
27	147	4; 12	6; 11	1; 2	2; 1	66	145	5	5; 12	2	1; 1
28	150	4; 11	5; 12	2; 2	2; 2	67	145	6; 12½	6; 13½	2; 2	2; 2
29	145	6	6	2	3	68	162	4; 9	4; 9	1; 1	2; 1
30	87½	12	6; 12	1	2; 1	69	162	5	5	1	1
31	147	4; 13	4; 11	2; 2	2; 2	70	118	—	4; 9	—	1; 3
32	92	6; 12	6; 12	1; 2	3; 2	71	83	5; 13	5; 12	1; 3	1; 2
33	84	6; 12	6; 9	2; 2	2; 1	72	85	5; 12	5; 12	1; 2	3; 1
35	156	5	6	3	3	74	80	6	7	2	2
37	104	5	5	2	2	75	87	6; 12	6; 12	3; 3	2; 3
39	91½	5	4	2	2	76	81	8; 13	7; 12½	1; 2	1; 2
40	95	5	6½	2	2	77	98	5; 12	7; 12	2; 2	1; 3
41	147	5	4; 7	2	3; 1	78	87	6; 12	7; 13	2; 3	2; 3

Paragraphen sollen deswegen Beobachtungen von Perioden der 1. Vorläufer (P und PP) bei Beben mit Distanzen über 80° mitgeteilt werden. An 72 der in Tabelle 1 angegebenen Beben war mindestens bei P oder PP eine Periode meßbar (*i*P wurde nicht benutzt, sondern die auf *i*P folgende Bewegung); die bei der Messung erhaltenen Resultate sind in Tabelle 19 zusammengestellt. Jede Messung erhielt ein Gewicht 1, 2 oder 3, je nachdem die Periode schlecht meßbar (auf 2—3 sec.), deutlich (auf 1—2 sec.) oder sehr gut ausgeprägt (auf 1 sec.) war. Waren mehrere wesentlich verschiedene Perioden in den Komponenten sichtbar, so sind diese nebeneinander mitgeteilt. In den übrigen Fällen wurde das Mittel aus den Beobachtungen in den 3 Komponenten notiert. Zur weiteren Rechnung wurden nur Messungen mit den Gewichten 2 und 3 herangezogen.

Schon beim Betrachten der Tabelle sieht man, daß kein Einfluß der Distanz auf die Größe der Periode vorhanden ist. Ferner ergaben sich überall die Perioden von P und von PP merklich gleich. Gewöhnlich zeigte das Vertikalseismometer die niedrigste der angegebenen Perioden, da es Wellen mit Perioden von über 10 sec. im allgemeinen nicht mehr hinreichend vergrößert. Im ganzen wurden genau wie in den oben zitierten Arbeiten vorwiegend Perioden von 5—6 sec. und von 12 sec. beobachtet, doch waren auch einige Male Wellen mit Perioden von etwa 18 sec. vorhanden. In Tabelle 20 ist die Anzahl der Fälle, in denen Perioden von 3 bis 14 sec. beobachtet wurden, angegeben. War eine Periode zwischen zwei ganzen Zahlen beobachtet (z. B. 5½ sec.), so wurde den beiden benachbarten Periodengrößen (in unserm Falle 5 sec. und 6 sec.) je ½ zugezählt. Zum besseren Vergleich gibt

Tabelle 20.

Absolute Häufigkeit der Perioden von 3 bis 14 sec. in den 1. Vorläufern sehr ferner Beben in Göttingen.

Periode sec.		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Zahl d. Fälle bei	P	0	6	20	20	0	0	0	0	3	17	4	0
	PP	0	6½	19	22	3½	½	1	1	2½	16	5½	½

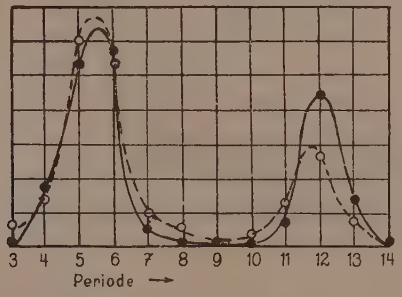
Tabelle 21 die Häufigkeit der verschiedenen Perioden bei sehr fernen Beben (über 80°) in % bei P, PP und P + PP; die prozentuale Häufigkeit der Perioden von P + PP für Distanzen unter

80^0 ist nach Erdbebenwellen VI in der Tabelle ebenfalls angegeben. Die Werte der beiden letzten Zeilen der Tabelle 21 sind in Figur 12 zusammengezeichnet; innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler stimmen beide Kurven sehr gut überein, was ja zu erwarten war, da die Perioden von P und PP ebenfalls gleiche prozentuale Häufigkeit besitzen. Für Göttingen ergeben sich als häufigste Perioden der 1. Vorläufer 5,5 sec. und 12,0 sec. ganz unabhängig von der Distanz.

Tabelle 21.

Relative Häufigkeit der Perioden von 3 bis 14 sec. in den 1. Vorläufern in Göttingen.

Periode in sec.		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Häufigkeit in % bei $\varDelta > 80^0$ bei	P	0	$8^1/_2$	$28^1/_2$	$28^1/_2$	0	0	0	0	$4^1/_2$	24	$5^1/_2$	0
	PP	0	$8^1/_2$	$24^1/_2$	28	$4^1/_2$	$^1/_2$	$1^1/_2$	$1^1/_2$	3	$20^1/_2$	7	$^1/_2$
	P + PP	0	$8^1/_2$	$26^1/_2$	$28^1/_2$	$2^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$3^1/_2$	22	$6^1/_2$	$^1/_2$
bei $\varDelta < 80^0$ bei P + PP		3	7	30	27	5	3	$^1/_2$	2	6	13	2	$^1/_2$



Figur 12. Relative Häufigkeit der Perioden von P und PP für $\varDelta > 80^0$ (—) und $\varDelta \leqq 80^0$ (- - -).

§ 9. **Schlusswort.**

Wir wollen hier kurz die Resultate der vorliegenden Arbeit zusammenstellen.

Es wurde je eine Annahme über die Geschwindigkeit longitudinaler und transversaler Erdbebenwellen bis zum Erdmittelpunkt gemacht, und auf Grund dieser Annahmen wurden die Laufzeiten einer größeren Zahl von Wellen sowie das Bodenverrückungsverhältnis

von $\frac{u_{PP}}{u_P}$ berechnet. Die berechneten Werte stimmen sehr gut mit neuen und alten Beobachtungen überein. Zwei Wellen von vorher unerklärter Bedeutung treffen zu einer Zeit ein, zu der das Eintreffen zweier Wechselwellen berechnet wurde, die durch den Kern hindurch gebrochen werden.

Messungen der Perioden während der ersten Vorläufer ergaben in Göttingen für alle Distanzen merklich gleiche Werte von vorwiegend 5 bis 6 sec. und von 12 sec.

Es mußte eine neue, von Wiechert früher vermutete, sehr stark ausgeprägte Unstetigkeitsfläche im Erdinnern angenommen werden.

Die Konstanten der vier Unstetigkeitsflächen sind unter Benutzung von Erdbebenwellen VI:

Tiefe km	V km/sec.	$\mathfrak{V}$ km/sec.	μ
0	7,17	4,01	0,272
1200	11,80	6,59	0,273
1700	12,22	6,86	0,270
2450	13,29	7,32	0,282
	13,15	7,20	0,277 (Annahme)
2900	13,15	7,20	
	8,50	4,72	
6370	11,10	6,15	

Die Erde besteht demnach aus einem Kern ($r = 3500$ km) und aus einem Mantel, dessen Konstitution sich an 3 Stellen ungleichmäßig, jedoch nicht sprungweise, ändert.

Göttingen, geophysikalisches Institut, 18. Juli 1912.

Der Luftwiderstand von Kugeln.

Von

L. Prandtl.

Vorgelegt von C. Runge in der Sitzung vom 28. März 1914.

Mit 5 Figuren im Text.

1. Ein Vergleich der Luftwiderstandsziffern des Eiffelschen Laboratoriums in Paris[1]) mit denen, die in der Göttinger Modellversuchsanstalt gewonnen waren[2]), zeigte — bei befriedigender Übereinstimmung in allen übrigen Fällen[3]) — eine ganz auffällige Abweichung der für die Kugel erhaltenen Werte. Die Widerstandsziffer ψ, definiert durch die Formel

$$W = \psi \,.\, F\varrho v^2$$

(wo $F = \pi r^2$ die Flächenausdehnung senkrecht zur Bewegungsrichtung, ϱ die Luftdichte, v die Geschwindigkeit und W der Widerstand ist), war in Göttingen zu 0,22 ermittelt worden, während Eiffel 0,088 angibt[4]). Um diesen Widerspruch auf-

---

1) Vgl. etwa: La résistance de l'air et l'aviation von G. Eiffel, Paris 1910; oder die deutsche Übersetzung: Der Luftwiderstand und der Flug, von Fr. Huth, Berlin 1912.

2) Veröffentlicht in den „Mitteilungen der Göttinger Modellversuchsanstalt" in der Zeitschr. f. Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1910—13, sowie im Jahrbuch der Motorluftschiff-Studienanstalt 1910/11 und 1911/12.

3) Siehe: O. Föppl, Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt von Eiffel, verglichen mit den Göttinger Resultaten, Zeitschr. f. Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1912 S. 118.

4) a. a. O. S. 76 (79). Eiffel gibt den Wert $\psi \varrho_{15} = 0{,}011 \frac{\text{kg sec}^2}{m^4}$, wobei $\varrho_{15} = 0{,}125 \frac{\text{kg sec.}^2}{m^4}$ die „Normaldichte" für 760 mm Barom. und 15° C ist.

zuklären, unternahm Herr Eiffel[1]) Versuche an 3 Kugeln von 16,2, 24,4 und 33 cm Durchmesser, die übereinstimmend das Ergebnis lieferten, daß der Widerstandskoeffizient von einem höheren Wert bei kleineren Geschwindigkeiten auf einen wesentlich niedrigeren bei größeren Geschwindigkeiten herabgeht. Das Übergangsgebiet ist dabei so schmal, daß auch der Widerstand W selbst innerhalb eines kurzen Geschwindigkeitsbereichs bei zunehmender Geschwindigkeit abnimmt. Das kritische Geschwindigkeitsgebiet lag um so niedriger, je größer der Kugeldurchmesser war.

Da die Göttinger Messungen bei Geschwindigkeiten von 4—8 m/sek gemacht waren, die Eiffelschen aber bei Geschwindigkeiten bis zu 30 m/sek, war der Widerspruch der ursprünglichen Werte durch die Eiffelsche Entdeckung vollständig aufgeklärt; der Eiffelsche Widerstandswert für kleinere Geschwindigkeiten stimmt mit den Göttinger Messungen gut überein. Das ganze Ergebnis war jedoch zunächst höchst befremdlich, denn es versetzte der bis dahin als völlig gesichert geltenden Anschauung von der angenäherten Giltigkeit des quadratischen Luftwiderstandsgesetzes einen argen Stoß. Der ganze Gedanke der Modellversuche, der auf dieses Gesetz gegründet war, schien ins Wanken kommen zu müssen. An der Richtigkeit der Tatsachen war dabei kein Zweifel möglich, um so mehr, als kurz vorher die italienische Militär-Versuchsanstalt in Rom[2]) ganz entsprechende Resultate über den Widerstand von Kugeln im Wasser erhalten hatte, und ferner fast gleichzeitig mit Eiffel im aerotechnischen Institut von St. Cyr[3]) bei Luftwiderstandsversuchen an 8 Kugeln verschiedenen Durchmessers dieselben Gesetzmäßigkeiten gefunden wurden. Den beiden Werten der Widerstandsziffer entsprechen natürlich verschiedene Strömungsformen. Eiffel hat das Vorhandensein dieses Unterschiedes auch nachgewiesen.

2. Von Seiten der Theorie ließ sich zunächst dieses sagen: Wenn der Umschlag von dem einen Strömungszustand in den andern einer durch die Wechselwirkung von Trägheits- und Reibungskräften in der Flüssigkeit bedingten allgemeinen Gesetzmäßigkeit entsprechen soll, und nicht etwa durch mehr zufällige

---

1) G. Eiffel: Sur la résistance des sphères dans l'air en mouvement. C. R. 155 (1912) S. 1597 = L'Aérophile 1913 S. 31.

2) Cap. G. Costanzi: Alcune esperienze di idrodinamica; Rendicont delle esperienze e studi nello stab. di esp. e costr. aeronautiche del genio, II. Jahrg. Nr. 4 S. 169, Rom 1912.

3) Ch. Maurain, Action d'un courant d'air sur des sphères, Bull. de l'institut aérotechnique de l'Univ. Paris, III. Bd., 1913 S. 76.

Umstände, wie Rauhigkeit der Kugeloberfläche, Wirbligkeit des Luftstroms usw. hervorgebracht wird, so muß das Ähnlichkeitsgesetz für reibende Flüssigkeiten erfüllt sein, d. h. es muß die Widerstandsziffer eine reine Funktion der Reynoldsschen Zahl sein:

$$\psi = f\left(\frac{v d}{\nu}\right),$$

wo $\nu = \frac{\mu}{\varrho}$ das kinematische Zähigkeitsmaß, ferner d eine charakteristische Länge im Körper, hier der Kugeldurchmesser, ist. Darauf, daß dies für die Eiffelschen Ergebnisse einigermaßen zutrifft, hat Lord Rayleigh[1]) bereits hingewiesen. Die Reynoldssche Zahl, die dem stärksten Abfall der Widerstandsziffer entspricht, ist etwa $\frac{v d}{\nu} = 130000$. Die Versuche von St. Cyr stehen im großen und ganzen im Einklang mit den Eiffelschen. Da die Reynoldssche Zahl die Größenordnung des Verhältnisses der Trägheitskräfte zu den Reibungskräften in der den Körper umgebenden Flüssigkeit mißt, erscheint es zunächst verwunderlich, daß ein von der Wechselwirkung von Reibungs- und Trägheitskräften hervorgebrachter Umschlag in den Strömungsformen erst bei einem so hohen Zahlwert dieses Verhältnisses eintritt, bei dem die Reibungskräfte eine gänzlich untergeordnete Rolle zu spielen scheinen. Dieses Zahlenverhältnis gilt indes nur für die „freie Flüssigkeit", nicht jedoch für jene meist dünne Schicht in der nächsten Nähe der Körperoberfläche, in der sich der Übergang von der Geschwindigkeit der freien Strömung auf die Geschwindigkeit Null an der Oberfläche des Körpers vollzieht[2]). In dieser „Grenzschicht" (sowie in den von ihr ausgesandten „Wirbelschichten") sind die Reibungskräfte von gleicher Größenordnung, wie die Trägheitskräfte, und man kann deshalb mit gewissem Recht vermuten, daß hier die Ausgangsstelle der plötzlichen Widerstandsänderung zu suchen ist. Die Dicke der Grenzschicht läßt sich leicht danach abschätzen, daß ihr Verhältnis zu den Körper-Abmessungen der Wurzel aus der Reynoldsschen Zahl umgekehrt

1) Lord Rayleigh, Sur la résistance des sphères dans l'air en mouvement. C. R. 156 (1913) S. 109.

2) L. Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Verhandl. d. international. Mathematiker-Kongr. zu Heidelberg 1904, S. 484, Leipzig 1905. Vgl. ferner: H. Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1908, S. 1; K. Hiemenz, Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitstrom eingetauchten Kreiszylinder. Dinglers Polytechn. Journal Bd. 326 (1911).

proportional ist. Bei der Kugel kann man (für die Stelle des Geschwindigkeitsmaximums) ziemlich genau

$$\frac{\delta}{d} = \sqrt{\frac{\nu}{vd}}$$

setzen[1]). Mit $\frac{v\nu}{d} = 130000$ ergibt dies $\frac{\delta}{d} = \frac{1}{360}$.

3. Für sprungweise Änderungen des Widerstandsgesetzes bei hohen Reynoldsschen Zahlen gibt es bereits Analoga in der kritischen Geschwindigkeit bei Röhren und bei Platten, die parallel ihrer Ebene bewegt werden. Die kritischen Geschwindigkeiten ergeben sich in den beiden Fällen aus den Reynoldsschen Zahlen

$$\frac{vd}{\nu} = 2000 \quad \text{bezw.} \quad \frac{vl}{\nu} = 450000\,^{2)}.$$

In beiden Fällen erfolgt der Umschlag dadurch, daß die bei niederen Geschwindigkeiten laminar (d. h. glatt) verlaufende Strömung bei Überschreitung der Grenze turbulent (wirbelig) wird.

Es liegt nahe, bei der Kugel Ähnliches anzunehmen. Bei laminarer Strömung bildet sich an einer bestimmten durch den Druckverlauf gegebenen Stelle eine Ablösung der Grenzschicht aus; wenn nun die Grenzschicht vor der Ablösungsstelle wirbelig wird, so wird der schmale Keil ruhender Luft hinter der Ablösungsstelle (vgl. Fig. 3) weggespült, und der Luftstrom legt sich wieder an die Kugel an, so daß die Ablösestelle immer weiter nach hinten rückt, bis sie unter den neuen Bedingungen eine neue Gleichgewichtslage gefunden hat; dies hat ein wesentlich kleineres Wirbelsystem und damit auch einen kleineren Widerstand zur Folge.

4. Um diese Fragen näher zu prüfen, ließ ich in der jetzt von der Universität übernommen Modellversuchsanstalt eine Reihe von Versuchen ausführen, für deren sehr sorgfältige und geschickte Durchführung ich Herrn Dr. C. Wieselsberger zu großem Dank verpflichtet bin.

Um größere Geschwindigkeiten zu haben, als sie bisher zur Verfügung standen, wurde in den Kanal von 1,95 × 1,95 m Quer-

1) Zur Definition der Grenzschichtdicke ist hierbei das Geschwindigkeitsprofil durch einen inhaltsgleichen geknickten Linienzug ersetzt worden, bestehend aus einer schrägen Geraden durch den Ursprung und der Asymptote. Die Abszisse des Schnittpunkts beider Linien ergibt die Grenzschichtendicke.

2) H. Blasius, Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Mitteilungen über Forschungsarbeiten herausgeg. vom Ver. Deutsch. Ing., Heft 131, S. 27. Auszug in der Zeitschr. d. Vereins Deutsch. Ing., 1912, S. 639.

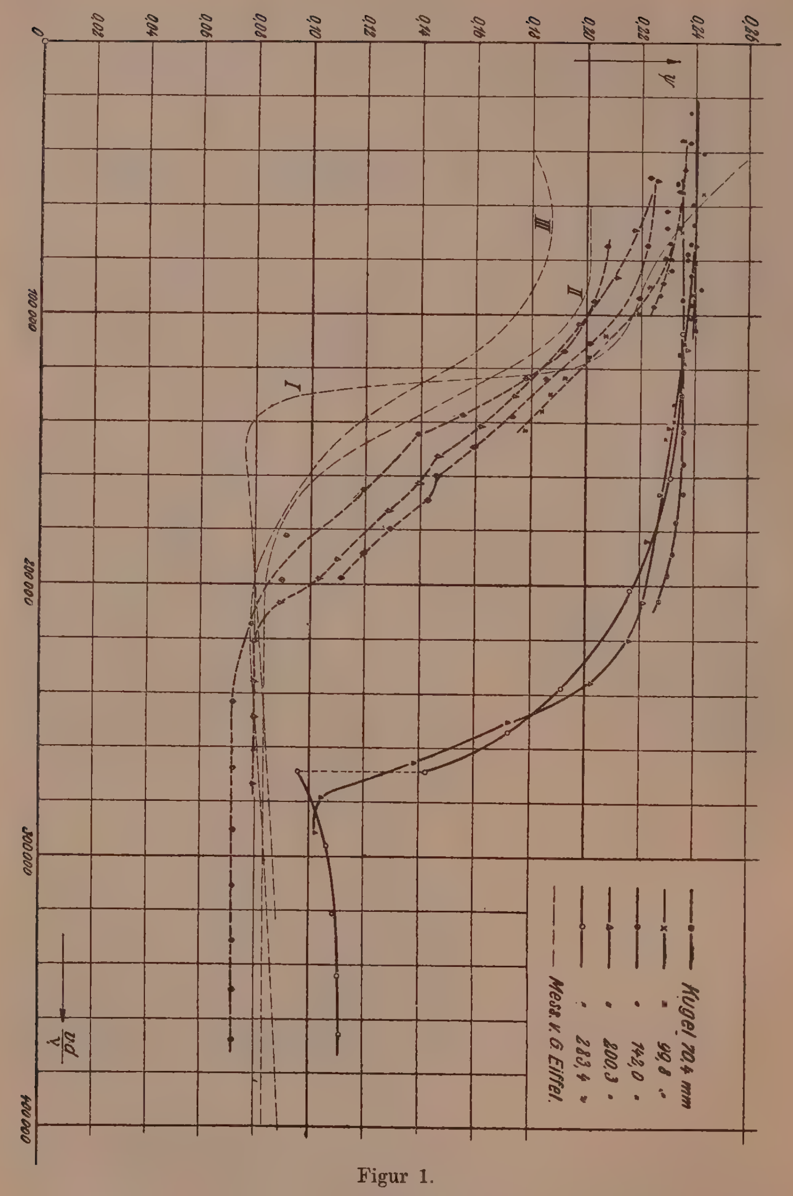
schnitt eine Düse von 1,03 m Durchmesser eingebaut. Durch diese Querschnittsverengung wurde die bisherige Geschwindigkeit von knapp 10 m/sek auf 23 m/sek gesteigert. Der Luftstrom, der vor dem Durchtritt durch die Düse schon durch die Beruhigungs-Vorrichtungen des Versuchskanals gegangen war[1]), zeigte beim Verlassen der Düse eine sehr hohe Gleichförmigkeit und Wirbelfreiheit.

Die Versuchskörper wurden genau wie bei Eiffel in den freien Strahl hinter der Düse gebracht. Sie waren an dünnen Drähten aufgehängt, von denen einer, der in horizontaler Richtung zur Widerstandswage[1]) führte, mittels eines feinen Häkchens an dem der Strömung zugekehrten „Pole" der Kugel befestigt war, während die andern in zwei vertikalen Ebenen vom „Äquator" und von dem Ende eines im rückwärtigen Pole der Kugel befestigten Eisenstabes ausgingen und zur Aufnahme des Eigengewichts, sowie zur Verhinderung von Schwingungen dienten. Die Widerstandswage wurde bei jedem Körper besonders geeicht (um die Wirkung kleiner Winkelabweichungen und Längenänderungen in den Aufhängedrähten zu eliminieren). Der Luftwiderstand der Aufhängedrähte wurde besonders ermittelt und in Abzug gebracht.

Zuerst wurden fünf Kugeln untersucht, die galvanoplastisch aus Kupfer angefertigt waren. Ihre Durchmesser waren so gewählt, daß die Querschnittsfläche jeder folgenden Kugel doppelt so groß war, wie die der vorhergehenden; in rundem Maß waren die Durchmesser 7, 10, 14, 20 und 28 cm. Die Widerstandsziffern, die mit diesen Kugeln bei Geschwindigkeiten zwischen 5 und 23 m/sek erhalten wurden, sind, gleich nach den Reynoldsschen Zahlen $\frac{vd}{\nu}$ aufgetragen, durch die stark ausgezogenen Linien der Figur 1 wiedergegeben. Man erkennt, daß die Beziehung $\psi = f\left(\frac{vd}{\nu}\right)$ in befriedigender Weise erfüllt ist (die vorhandenen Abweichungen können leicht durch Ungenauigkeiten in der Kugelform der Versuchskörper erklärt werden, s. u. Nr. 5). Dagegen fällt auf, daß die Kurven sich ganz wesentlich von den Eiffelschen unterscheiden, die als dünne gestrichelte Linien eingetragen sind[2]), und die Bezeichnung I, II, III tragen. Die Reynoldssche

1) Vgl. etwa L. Prandtl, Die Bedeutung von Modellversuchen für die Luftschiffahrt und Flugtechnik und die Einrichtungen für solche Versuche in Göttingen, Zeitschr. d. Ver. Deutsch. Ing., 1909, S. 1711.

2) Da in der Eiffelschen Veröffentlichung Temperatur und Druck nicht angegeben sind, wurde hierbei nach Gutdünken ein $\nu = 0,16$ angenommen. Die Unsicherheit des ν ist jedoch nicht sehr bedeutungsvoll.



Figur 1.

Zahl, die der Stelle des stärksten Abfalls (bezw. der Mitte des Abfalls) entspricht, ist bei unsern Versuchen = 260 000, also das Doppelte des Eiffelschen Wertes.

Da als Ursachen des Umschlags Turbulentwerden der Grenzschicht vermutet wurde, war eine Erklärung für diese Abweichung unschwer zu finden. Die Turbulenz mußte, ganz entsprechend den Beobachtungen an Röhren, schon bei geringeren Geschwindigkeiten eintreten, wenn in dem ankommenden Luftstrom bereits Wirbel vorhanden waren. Bei der Eiffelschen Einrichtung enthält aber die Düse einen „Gleichrichter“, bestehend aus einem Gitter von senkrechten und wagrechten Blechstreifen, durch den notwendig Wirbel erzeugt werden.

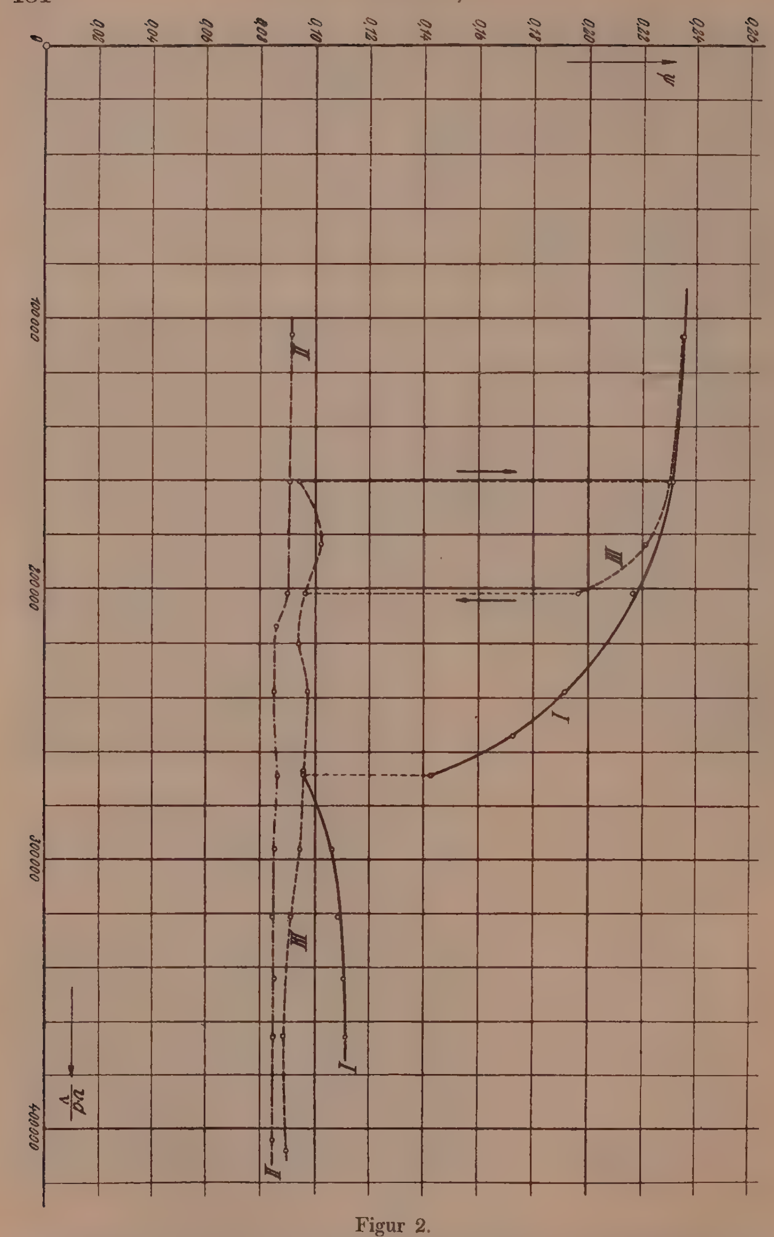
War dies die Ursache der Abweichung, dann mußte ein ähnliches Hindernis, in die Nähe der Kugel gebracht, die gleiche Wirkung haben. Es wurde deshalb ein rechteckiger Rahmen so mit 1,0 mm starkem Bindfaden bespannt, daß ein quadratisches Gitter von 5 cm Maschenweite entstand. Wurde dieses Gitter vor die Düsenmündung geschoben, so war durchweg eine Verringerung des Widerstands zu bemerken, die in einem beträchtlichen Gebiet (zwischen 190000 und 260000) sogar das Verhältnis 1 : 2 überschritt! Die mit dem Gitter erhalten Versuchswerte sind in Fig. 1 durch die stark gestrichelten Linien dargestellt. Sie liegen ganz in der Nähe der Eiffelschen und damit auch derjenigen von St. Cyr.

Es mag noch erwähnt werden, daß auch noch andere Einrichtungen zur Erzeugung turbulenter Strömung, z. B. über Kreuz gestellte dünne Holzlatten u. a. m. versucht wurden. Die Wirkung war in allen Fällen ähnlich; die Erniedrigung des Widerstands schien mit der Stärke der Störung zu wachsen.

Die Aufnahme solcher Widerstandskurven für Kugeln gibt sonach ein Mittel an die Hand, die Luftströme der verschiedenen Versuchsanstalten in Hinsicht auf ihre geringere oder größere Wirbligkeit mit einander zu vergleichen[1]).

5. War mit dem Vorstehenden der Nachweis, daß es sich bei dem eigentümlichen Verhalten des Widerstands von Kugeln um einen Turbulenzeffekt handelt, schon so gut wie geliefert, so schien doch ein richtiges *experimentum crucis* noch erwünscht zu sein. Zu diesem Zweck wurde auf der vorderen (dem Wind zugekehrten) Seite der 28 cm-Kugel, 15 Bogengrade vom Äquator entfernt, ein Drahtreif von 1 mm Stärke befestigt (Abb. 4, a). Nach der in Nr. 2 angedeuteten Rechnung war die Grenzschichtdicke bei allen in den Versuchen zur Verwendung kommenden Geschwindigkeiten

1) Als Vergleichsmaßstab könnte man z. B. die Reynoldssche Zahl einführen, bei der der Widerstandskoeffizient einer technisch glatten (mit feinem Schmirgelleinen abgeriebenen) Kupferkugel = 0,18 wird.



Figur 2.

geringer als 1 mm, der Drahtreif, der etwas vor der Ablösestelle lag, mußte daher durch die an ihm entspringenden Wirbel die

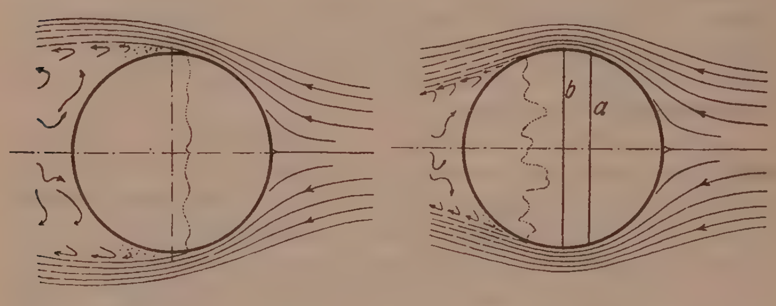
Grenzschicht turbulent machen und so die Ablösestelle nach hinten verschieben.

In der Tat wurde, wie die Versuche zeigten, durch den Drahtreif die Widerstandsziffer in dem ganzen Geschwindigkeitsbereich auf 0,085 bis 0,09 erniedrigt, während man aus elementaren Betrachtungen eher eine geringe Erhöhung des Widerstands (um etwa 0,008 bis 0,01) hätte erwarten mögen. Es hat sich also durch die Hinzunahme des dünnen Drahtreifs das Widerstandsgesetz in ein nahezu quadratisches verwandelt. Man darf jedoch vermuten, daß bei sehr kleinen Geschwindigkeiten, wo die Grenzschicht erheblich dicker ist, wie der Drahtreif, wieder die hohe Widerstandsziffer von 0,24 Platz greift.

Es wurde noch ein zweiter Versuch angestellt, wo im Gegensatz zum ersten der Drahtreif etwas hinter der Ablösestelle der laminaren Grenzschicht, nämlich am Äquator der Kugel befestigt war (Fig. 4, b). Bei den kleineren Geschwindigkeiten lag der Draht jetzt im toten Winkel, mußte also wirkungslos bleiben, bei den großen dagegen kam er in die Strömung und mußte ähnlich wirken wie in der ersteren Lage. Ein Blick auf Fig. 2, in der die Kurven I die Widerstandsziffern der 28 cm-Kugel ohne Drahtreif, die Kurven II die mit Drahtreif unter 15°, III die mit Drahtreif am Äquator darstellt, zeigt die Richtigkeit dieses Schlusses. Als eine interessante Besonderheit ist noch zu erwähnen, daß beim Drahtreif am Äquator zwischen 160000 und 200000 zwei Werte des Widerstands beobachtet wurden, von denen der höhere bei allmählicher Steigerung der Geschwindigkeit von den kleinen Geschwindigkeiten her, der niedere bei allmählicher Erniedrigung von den größeren Geschwindigkeiten her erhalten wurde. Auch dafür ist unschwer die Erklärung zu geben: Wenn die Strömung erst einmal an dem Draht anliegt, so wird sie durch die vom Draht erzeugte Wirbelung auch weiterhin gut anliegen, und es kann jetzt auch die Geschwindigkeit etwas ermäßigt werden, ohne daß die Strömung sich loslöst. Erfolgt dann bei weiterer Erniedrigung der Geschwindigkeit die Ablösung doch, so wird der Draht sofort gänzlich wirkungslos (vgl. Abszisse 160000 in Fig. 2), und es bedarf wieder einer endlichen Geschwindigkeitssteigerung, um den Draht wieder in Wirkung zu bringen.

Eine ähnliche Wirkung wie die aufgelegten Drähte haben natürlich auch Rauhigkeiten der Oberfläche. Ein vorläufiger Versuch mit einer mit Stoff überzogenen Kugel zeigte, daß der Umschlag auch hier nach den kleineren Geschwindigkeiten hin verschoben wird.

6. Die Strömungsformen wurden durch Zuleiten von Rauch ebenfalls untersucht. Es zeigte sich, daß den hohen Widerstandswerten eine Strömung nach Fig. 3 entsprach, bei der die Strömung sich 5—8° vor dem Äquator von der Kugel loslöste. Wenn man den Rauch von hinten her in den toten Raum hineinleitete, war die Ablöselinie, die langsame wellige Bewegungen zeigte, scharf zu erkennen (die punktierte Linie in Figur 3).



Figur 3. Figur 4.

Dem niederen Widerstandswert entsprach eine Strömung nach Fig. 4, mit einer um 10—25° hinter dem Äquator liegenden Ablöselinie, die im übrigen sehr unruhig hin- und herschwankte (punktierte Linie in Fig. 4). Das Übergangsstadium scheint dadurch zustande zu kommen, daß die Ablösestelle in unregelmäßigem Wechsel zungenartig über den Äquator herüberschlägt. Dem entspricht ein sehr starkes Schwanken des Widerstandes, sowie ein Auftreten von sehr starken seitlichen Kräften, die die Kugel in seitliche Schwingungen versetzen, wenn sie nicht sehr gut dagegen gesichert ist. Die Bewegungen in dem Wirbelgebiet hinter der Kugel sind äußerst unregelmäßig, der dort zugeleitete Rauch wurde so stark nach allen Seiten auseinander gerissen, daß kaum eine Strömungsrichtung zu erkennen war. Die in beide Figuren eingetragenen Pfeile sollen nur die allgemeine Strömungstendenz andeuten.

7. Ist mit dem Vorstehenden das sonderbare Verhalten des Luftwiderstands von Kugeln in befriedigender Weise aufgeklärt, so bleibt noch die andere Frage bestehen, inwieweit etwa bei andern Körpern ähnliche sprungartige Änderungen des Widerstandsgesetzes vorkommen mögen, vielleicht in Geschwindigkeitsgebieten, die dem Laboratoriums-Experiment unzugänglich sind. Solche Umstände wären dazu angetan, die Versuche an Modellen, wie sie jetzt über-

all ausgeführt werden, wertlos zu machen, falls sich die Stelle des Umschlags zwischen den Reynoldsschen Zahlen der wirklichen Ausführung und denen der Laboratoriumsversuche befände.

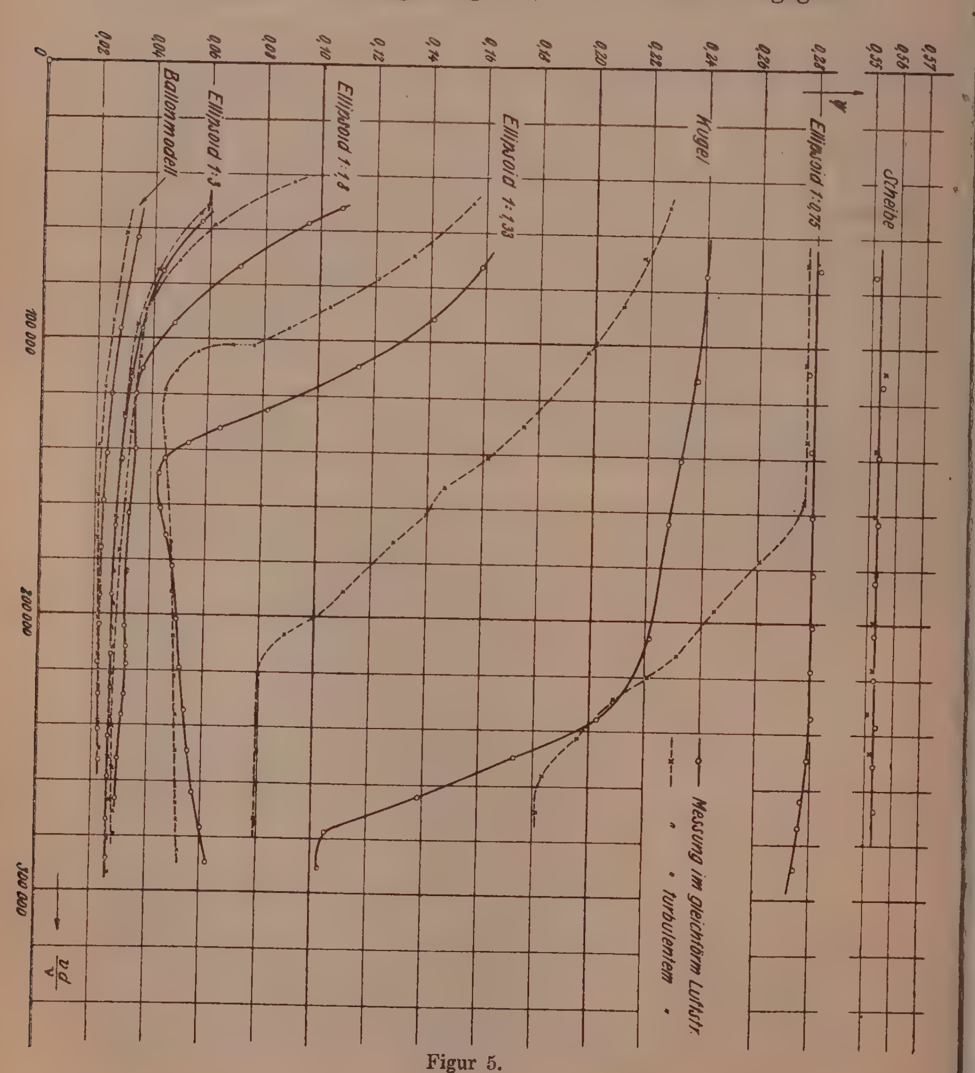
Ich habe deshalb noch eine Reihe von Rotations-Ellipsoiden von 20 cm Äquatorialdurchmesser (galvanoplastisch aus Kupfer hergestellt) untersuchen lassen, deren Achsenverhältnis 0,75, 1,33, 1,80 und 3,0 waren. Die Reihe wurde noch vervollständigt durch eine kreisförmige Platte und ein vorhandenes nahezu ellipsoidförmiges Luftschiffmodell (etwa einem Ellipsoid mit dem Achsenverhältnis 6 entsprechend).

Die Versuchsergebnisse, die in Fig. 5 zusammengetragen sind, bestätigten die Erwartung, daß bei dem abgeplatteten Ellipsoid die Umschlagstelle stark nach den großen Geschwindigkeiten, bei den verlängerten stark nach den kleinen Geschwindigkeiten verschoben sein würde. Denn da für das Turbulentwerden der Grenzschicht im wesentlichen nur das unter ansteigendem Druck verlaufende Stück zwischen dem Geschwindigkeitsmaximum und der Ablösestelle in Betracht kommen dürfte, wird es für das Eintreten der Turbulenz hauptsächlich auf die Länge dieses Stücks ankommen; diese ist aber bei den abgeplatteten Formen sehr klein, bei den verlängerten dagegen verhältnismäßig groß; den großen Längen entsprechen natürlich kleinere kritische Geschwindigkeiten als den kleinen.

Man sieht aus der Zusammenstellung in Figur 5, daß bei den gestreckten Formen, also bei den Luftschiffmodellen, in dem zur Verfügung stehenden Geschwindigkeitsbereich nur der turbulente Zustand beobachtet wird, der sich, wie man annehmen muß, kontinuierlich — vielleicht mit kleinen Änderungen der Widerstandsziffer — bis zu den in der großen Ausführung vorkommenden Reynoldsschen Zahlen extrapolieren läßt. Der andere Grenzfall ist der der Platte. Hier ist die Länge des unter ansteigendem Druck verlaufenden Abschnitts der Grenzschicht zu Null geworden, und man wird deshalb darauf rechnen müssen, daß hier für alle Geschwindigkeitsbereiche der laminare Zustand, also die großen Widerstandswerte giltig bleiben werden.

Um auch den Einfluß der Turbulenz des Versuchsluftstroms kennen zu lernen, ist noch eine Versuchsreihe mit denselben Körpern mit vorgeschaltetem Bindfadengitter durchgeführt worden. Die Ergebnisse sind durch die gestrichelten Linien in Figur 5 zur Darstellung gebracht. Der allgemeine Charakter der Einwirkung ist wie bei der Kugel eine Verschiebung der Kurven nach kleineren Reynoldsschen Zahlen; die Einwirkung ist am stärksten bei der

Kugel und den ihr benachbarten Formen. Bei den schlanken Körpern sowohl, bei denen ohnehin schon Turbulenz vorhanden ist, wie auch bei der Platte, bei der die Ablösestelle durch die scharfe Kante unverrückbar festgelegt ist, ist der Einfluß der Turbulenz des Versuchsstroms unmerklich. Bei den länglichen Körpern ist für die größeren Geschwindigkeiten das quadratische Widerstandsgesetz hinlänglich genau, bei der Platte dagegen in



Figur 5.

dem ganzen beobachteten Bereich mit aller in den Versuchen erreichbaren Schärfe erfüllt[1]).

Was von der Platte gilt, darf wohl ohne weiteres auf alle Fälle übertragen werden, wo die Ablösungsstellen durch scharfe Kanten festgelegt sind. Bei andern Körpern, wie z. B. bei Tragflügeln mit überall sanft gerundetem Profil, wird man vorsichtiger sein müssen; wahrscheinlich wird indes auch hier der turbulente Zustand schon beim Modellversuch erreicht sein; dagegen wird man bei zylindrischen Stangen von Kreis- oder Ellipsenquerschnitt auf den Umschlag des Widerstandsgesetzes zu achten haben.

Auch bei Kanälen mit nach der Flüssigkeit zu konvex gekrümmten Wandungen werden ähnliche Erscheinungen häufig zu erwarten sein. Es mag erwähnt werden, daß von einem meiner Mitarbeiter, Herrn Dipl.-Ing. R. Kröner bei einem erst verengten und dann wieder erweiterten Kanal kürzlich ein Widerstandsgesetz von qualitativ demselben Verlauf, wie bei den Kugeln, gefunden wurde.

Alles in allem läßt sich wohl sagen, daß die durch die Eiffelsche Entdeckung verursachte Krisis des quadratischen Luftwiderstandsgesetzes nunmehr, durch Aufdeckung der für die Abweichungen bestimmenden Umstände und durch Abgrenzung des Gebietes, in dem solche Abweichungen zu erwarten sind, im Wesentlichen wieder behoben worden ist.

Zusammenfassung.

Die von G. Eiffel entdeckte Tatsache, daß die Luftwiderstandsziffer von Kugeln bei größerer Geschwindigkeit auf etwa $^2/_5$ ihres Wertes für kleine Geschwindigkeiten herabsinkt, wird auf Turbulenz der „Grenzschicht“ zurückgeführt. Das Bestehen des Reynoldsschen Gesetzes bei sehr wirbelfreiem Luftstrom wird durch Versuche bestätigt. Durch Wirbeligkeit des Luftstroms wird die Geschwindigkeitsgrenze für den Umschlag erheblich erniedrigt. Ein vor der Ablösestelle aufgelegter dünner Draht erniedrigt den Widerstand bei allen untersuchten Geschwindigkeiten auf den

1) Nach dem Gesagten eignen sich also ebene, scharfrandige Platten sehr gut zur Geschwindigkeitsmessung von Luftströmen; Kugeln dagegen, die auch vielfach hierfür verwendet worden sind, sind in weitem Geschwindigkeitsbereich für diesen Zweck sehr ungeeignet.

kleineren Wert. Bei Platten sowohl wie bei sehr länglichen Ellipsoiden ergibt sich genügend genau das quadratische Gesetz, bei ersteren mit laminarer, bei letzteren mit turbulenter Grenzschicht. Bei Körpern mit stark konvexen Formen (ebenso bei Kanälen mit konvexen Wänden) muß dagegen mit der Möglichkeit eines Umschlags von dem einen in den andern Zustand gerechnet werden.

Die luftelektrischen Beobachtungen am Samoa-Observatorium 1912/13.

Von

G. Angenheister.

Vorgelegt in der Sitzung am 24. Januar 1914 von Herrn E. Wiechert.

Die ersten luftelektrischen Beobachtungen am Samoa-Observatorium stammen aus den Jahren 1906, 1907, 1908. Es waren Messungen des Potentialgefälles und der Leitfähigkeit, und Registrierungen des Potentialgefälles. Die absoluten Messungen des Potentialgefälles wurden mit einem Flammenkollektor nach Elster und Geitel, die absoluten Messungen der Leitfähigkeit mit dem Aspirationsapparat nach Gerdien gemacht. Beide Messungen, Leitfähigkeit und Potentialgefälle, bereiteten keine Schwierigkeiten, weil jede Messung nur kurze Zeit dauerte, für welche eine genügende Isolation auch unter den schwierigen tropischen Verhältnissen erreicht werden konnte. Anders stand es mit der fortlaufenden Verfolgung der zeitlichen Schwankung des Potentialgefälles mittels eines Registrierapparates nach Benndorf. Hier ist eine dauernde Isolation erforderlich und diese ist bei dem hohen Feuchtigkeitsgehalt der Luft (Jahresmittel 83 %, in der Regenzeit oft nahe 100 %), infolge des insularen tropischen Klimas, und bei dem dortigen großen Reichtum an Spinnen und Insekten nur sehr schwer zu erreichen. Schon in der ersten Publikation (Luftelektr. Beob. 1906—8) wurde nachdrücklich (S. 2) auf diese Übelstände hingewiesen. Ebenso in der zweiten (Wegener u. Hammer, Luftelektr. Beob. 1909—11). Ganz richtig weist auch K. Kähler in seinem Referat über die luftelektrischen Arbeiten des Samoa-Observatoriums in der meteoro-

logischen Zeitschrift 1911 S. 430 darauf hin, daß die von mir erwähnten Isolationsstörungen die niedrigen Nachtwerte verschuldet haben könnten. Ein zweiter Übelstand, auf den ebenfalls in der zitierten Publikation (Luftel. Beob. 1906—8) von mir hingewiesen wurde, war die Aufstellung (S. 13. Es heißt da: „Vielleicht ist auch der Ort der Aufstellung an diesen regelmäßigen Tagen Typ. I. II u. IV von besonderer Bedeutung. Jedenfalls soll dies genauer studiert werden“). Die Aufstellung befand sich nämlich nicht, wie an anderen Observatorien üblich, auf freiem Platz in einer besonderen luftelektrischen Hütte, sondern man mußte sich aus finanziellen Gründen mit einer provisorischen Aufstellung im Hauptgebäude begnügen; und zwar war die Elektrode durch die Westwand (Wetterseite) hindurchgeführt. Dieser Westwand des Gebäudes gegenüber befand sich in einem Abstand von etwa 7 Meter eine Reihe von Palmen, die das Grab eines alten samoanischen Häuptlings umsäumten, und daher nicht gut fortgenommen werden konnten. Eine andere Aufstellung war zunächst nicht möglich, weil erst andere Bauten ausgeführt werden mußten. Die Beobachtungshäuser für magnetische Messungen und Registrierungen und das Seismographenhaus sollten zuerst fertiggestellt werden, denn die erdmagnetischen und seismischen Beobachtungen sind gründungsgemäß die Hauptaufgabe des Observatoriums. Erst dann konnte, soweit es unbeschadet dieser beiden ersten Aufgaben möglich war, an die Durchführung eines luftelektrischen, meteorologischen und mareologischen Arbeitsprogramms gedacht werden.

Ein dritter Übelstand, unter dem aber in den Jahren wohl auch andere Observatorien gelitten haben, und der manche unzuverlässige Registrierungen verschuldet haben mag, war die Ungewißheit bei der Wahl einer zuverlässigen Elektrode.

In der ersten Registrierperiode 1906—8 wurde eine Radiumelektrode verwendet, 2 mgr Radiumbromid waren in einem Glasröhrchen eingeschlossen. Dadurch wurden leider gerade die hauptsächlich ionisierenden (α) Strahlen zurückgehalten. Die Elektrode erwies sich als nicht genügend wirksam.

Es waren also drei Übelstände, die den Registrierungen 1906—8 anhafteten, nämlich: 1) die Isolationsfehler durch Feuchtigkeit und Spinnen. 2) die ungünstige Aufstellung. 3) die ungenügende Kraft der Elektrode. Daß die Beseitigung dieser Übelstände nicht so schnell erfolgte, wie es gewünscht wurde, lag einmal an der großen Abgelegenheit der Station, dann an dem oftmaligen Versagen der Hilfsbatterien und am meisten jedoch daran, daß der meist ohne

Assistent anwesende Observator durch unaufschiebbare erdmagnetische und seismische Arbeiten an einer intensiven Beschäftigung mit luftelektrischen Arbeiten gehindert wurde.

Zur Beseitigung dieser drei Übelstände geschah nun Folgendes:

Elektrode.

Zunächst nahm auf meine Veranlassung der Assistent am Samoa-Observatorium Herr Dr. Hammer Anfang 1910 eine Polonium-Elektrode und eine Vorrichtung zur Regenerierung derselben mit nach Samoa. Die Versuche, die er dort mit dieser Elektrode angestellt hat (s. Luftel. Beobachtungen in Samoa 1909/11), haben ergeben, daß sie nur bei trockenem Wetter günstige Resultate zu liefern imstande ist, während sie nach Regengüssen ihre nächste Umgebung nur unvollkommen ionisiert, weil die nur sehr langsam trocknende Wasserhaut einen großen Teil ihrer wirksamen (α) Strahlung absorbiert. Ein wirksamer Schutz der Elektrode gegen tropischen Regen, der in der Nähe einer Wand durch Wirbelbildung von allen Seiten kommt, ist, falls die Elektrode noch so weit frei sein soll, daß sie ihre nächste Umgebung wirksam zu ionisieren vermag, kaum möglich. Ein weiterer Fehler der Poloniumelektrode war ihre kurze Halbwertszeit (143 Tage).

Nachdem sich diese Unzulänglichkeit der Poloniumelektrode ergeben hatte, machte Herr Dr. Wegener Versuche mit einem Wasserspritzkollektor und zwar mit günstigerem Resultat; der Wasserspritzkollektor erwies sich als brauchbar bei jeder Witterung; es mußte allerdings stets ein dünner Strahl ausgespritzt werden. Der Nachteil des Spritzkollektors besteht in der schwierigen Wartung, da erhebliche Wassermengen verbraucht wurden und auch leicht Verstopfungen der Ausflußöffnung eintraten.

Anfang 1912 wurde deshalb von mir ein neuer Versuch mit der neu in den Handel gebrachten Ioniumelektrode angestellt, der sich als zufriedenstellend erwies. Ein Verlust an ionisierender Kraft durch eine Wasserhaut ist auch hier vorhanden, doch weit geringer als beim Polonium. Diese Elektrode wurde deshalb in Gebrauch genommen und ist auch bis jetzt im Gebrauch geblieben.

Isolationsfehler.

Dem zweiten Übelstand, Isolationsfehler durch Feuchtigkeit, gegen den auch die Herren Dr. Wegener und Dr. Hammer einen oft vergeblichen Kampf geführt haben, suchte ich dadurch zu begegnen, daß ich Ende 1911 die Hartgummistützen der Elektrode durch Bernstein ersetzen ließ. Ferner verlegte ich Ende

1911 die Aufstellung aus dem ersten Stock nach unten ins Büro, wodurch der Apparat leichter zugänglich und steter Kontrolle unterworfen wurde. Der lästige Kampf mit den Spinnen blieb bestehen, und durch die besonders nachts feuchten Spinnfäden sind auch dann noch viele Registrierungen verdorben. Oft wiederholte Isolationsproben ergaben aber auch, daß für viele Tage und Nächte zuverlässige Registrierungen vorliegen. Bei diesen Isolationsproben wurde zuweilen die Elektrode entfernt; der Rückgang der Aufladung des sondenlosen Instrumentes durfte bei guter Isolation dann nur mit der Geschwindigkeit erfolgen, wie sie durch die Zerstreuungswirkung zu erwarten war.

Ein erfolgreiches Mittel gegen die Spinnfäden konnte aber nur auf andere Weise gefunden werden. Erst Herr Dr. Geiger hat dies mittels rotierender Elektrode erreicht; darüber wird er selbst berichten.

Aufstellung.

Um von dem Aufstellungsmangel frei zu werden, hat Herr Dr. Wegener Anfang 1911 versuchsweise auf einer mitten im Wasser gelegenen Riffinsel in einem kleinen dort befindlichen Unterkunftshaus Registrierungen ausgeführt (siehe Wegener und Hammer, Luftel. Beob. 1909/11). Die Ergebnisse wiesen nach, daß die Aufstellung im Observatoriumsgebäude doch recht fehlerhaft war. Eine dauernde Aufstellung des Apparates auf dem Riff war jedoch aus praktischen Gründen (weiter Entfernung, bei Ebbe schwer zugängig) nicht möglich. Es wurde deshalb die alte Aufstellung im Hauptgebäude einstweilen beibehalten, zumal mit dem Neubau eines größeren Gebäudes begonnen wurde, in dessen Turm an der ganz frei gelegenen Seeseite die definitive Aufstellung erfolgen soll.

Ergebnisse der Registrierung 1912 und erste Hälfte 1913.

Die Registrierungen der letzten Hälfte von 1911 sind wegen der verwendeten Poloniumsonde nicht sehr zuverlässig und auch wegen Versagen der Batterie und Isolation sehr lückenhaft. Dagegen weist 1912 und erste Hälfte 1913 eine Reihe durchaus brauchbarer Registrierungen auf. Die häufige Kontrolle der Isolation hat zwar für viele Nächte, besonders für die feuchten, Isolationsstörungen ergeben.

Aus dem Bilde der beigefügten Kurven (Tafel I) ergeben sich folgende Monatsmittel:

	Aus allen Tagen	Anzahl der verwendeten Tage	Aus ruhigen Schönwetter-tagen	Anzahl der verwendeten ruhigen Tage
Mai 1912 (vom 20.—31. V.)	88	8	120	4
Juni	74	22	85	4
Juli	110	30	130	9
August	100 Volt	21	105	8
September	88 „	24	114	8
Oktober	67 „	13	—	—
November	65 „	15	73	7
Dezember	60 „	13	78	4
Januar 1913	fehlt, Batterie verdorben		—	—
Februar	35	18	59	8
März	30	25	59	5
April	65	12	76	2
Mai	65	10	—	—

Bei der Berechnung dieser Kurven, Tafel I, sind alle Tage genommen, bei denen nicht Versagen des Registrierapparates oder der Isolation die Kurven unbrauchbar machte. Die Anzahl der benutzten Tage ist in der Tabelle der Monatsmittel beigefügt. An manchen Observatorien werden zur Bestimmung der täglichen Periode nur ruhige Zeiten, ohne starke Störungen, Gewitter etc. benutzt. Wird dies Verfahren hier angewendet, so treten um 7^a und 7^p zwei Zacken höheren Potentials mit größerer Deutlichkeit hervor; die nur aus solchen besonders ausgewählten Schönwettertagen gewonnene tägliche Schwankung ist in Tafel II beigefügt. Die Mittag- und Nachtzeit erhält an Schönwettertagen höheres Potential; der Grund für die niedrigeren Werte an meteorologisch gestörten Tage ist, daß zu dieser Zeit in der Nähe lagernde Gewitter oft negative Potentiale der Luft gegen die Erde zur Folge haben. Diese negativen Potentiale verursachen dann auch die niedrigen Monatsmittel der Potentiale der gewitterreichen Monate. Vielleicht sind die niedrigen Potentiale regenreicher Monate auch etwas durch die geringere Ionisationskraft der nassen Elektrode bedingt. Die Monatsmittel der ruhigen Tage sind daher höher als die aus allen Tagen (siehe Tabelle der Monatsmittel, die Zahl der benutzten Schönwettertage ist wieder beigefügt). Ob das Verfahren, solche Gewitterwirkungen einfach auszuschließen und sich nur auf Schönwettertage zu beschränken, richtig ist, und wenn dies, ob die Ausschließung dann durch eine subjektive Auswahl geschehen darf, ist sehr fraglich. Eine analoge Frage über die Berechnung der täglichen Periode des Erdmagnetismus wird heute verneint.

Die Monatsmittel der Schönwettertage sind auch jetzt noch niedrig im Vergleich zu anderen Stationen.

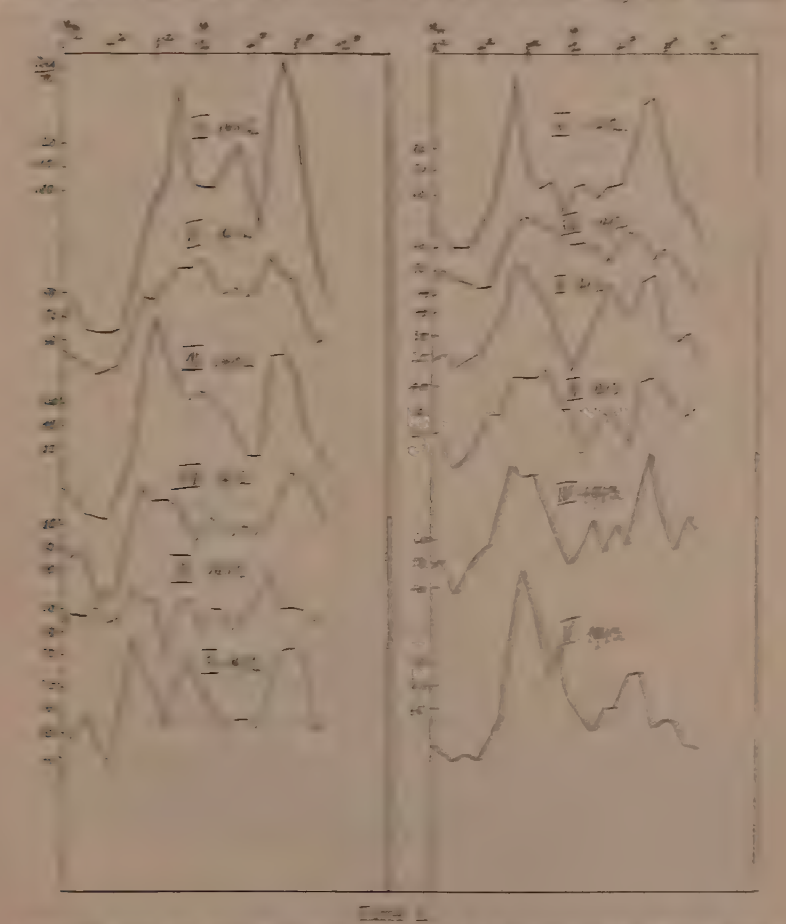
Ich gebe daher hier eine Übersicht über die Bestimmungen des Reduktionsfaktors für die Zeit von Ende 1910 bis Mitte 1913. Die im Freien mit dem Flammenkollektor gemessenen Potentiale zeigen nicht sehr hohe Werte. Die letzte Messung wurde von Herrn Dr. Geiger ausgeführt bei Gelegenheit der Übergabe des Instrumentes an ihn. Leider fehlt mir hier der Wert des von ihm gemessenen Potentialgefälles.

Bestimmung des Reduktionsfaktors des Benndorfschen Potentialgefälle-Elektrometers.

Datum	Orte der Messung	Volt/m	Red.-fehler	Sonde und Aufstellung	Beobachter
29. XI. 1910 1p	Südbucht, in der Nähe des Mirenpfeilers	50	1.4	Polonium Observatorium im Oberstock	Hammer
5. XII. 1910 4p	"	50—85	1.4	"	"
21. I. 1911 4p	"	110—144		Tropfkoll. Riffinsel	"
9. II. 1911	"	110—120		"	"
25. IV. 1911 10a	"	30—85	3—4	"	"
27. IV. 1911	"	20—50	3	"	"
14. V. 1912 4p	Mitte der Südbucht bei Ebbe	60—100	1.43	Ionium Observatorium im Unterstock	Angenheister
9. VI. 1912	"	100—150	1.35	"	"
	Nordstrand		1.4	"	"
1. VII. 1913	In der Südbucht		1.3	"	Geiger

Alle Monate zeigen in ihrem täglichen Gange um Mittag und Nachmittag eine Depression, die sich der einfachen täglichen Periode zu überlagern scheint. Diese unter dem Namen „mittägliche Depression" bekannten und auch an anderen Orten vielfach beobachteten niedrigen Potentiale am Nachmittag traten in den früheren Samoa-Beobachtungen nur schwächer hervor. Besonders deutlich waren sie Mai 1911. (Siehe Wegener und Hammer, Luftelektrische Beobachtungen Samoa 1909—11). Oft haben die Kurven auch das Aussehen, als ob weniger eine Depression um Mittag, als mehr, wie schon oben erwähnt, um 7^a und 7^p zwei ausgeprägte Zacken hohen Potentials eintreten. In manchen Monaten (Juli und November 1912) ist die Depression so ausgeprägt, daß man ebenso gut von einer doppelten täglichen Periode reden kann, deren Maxima kurz nach Sonnenauf- und -Untergang liegen; dort wo sie sich auch in den Registrierungen anderer Observatorien

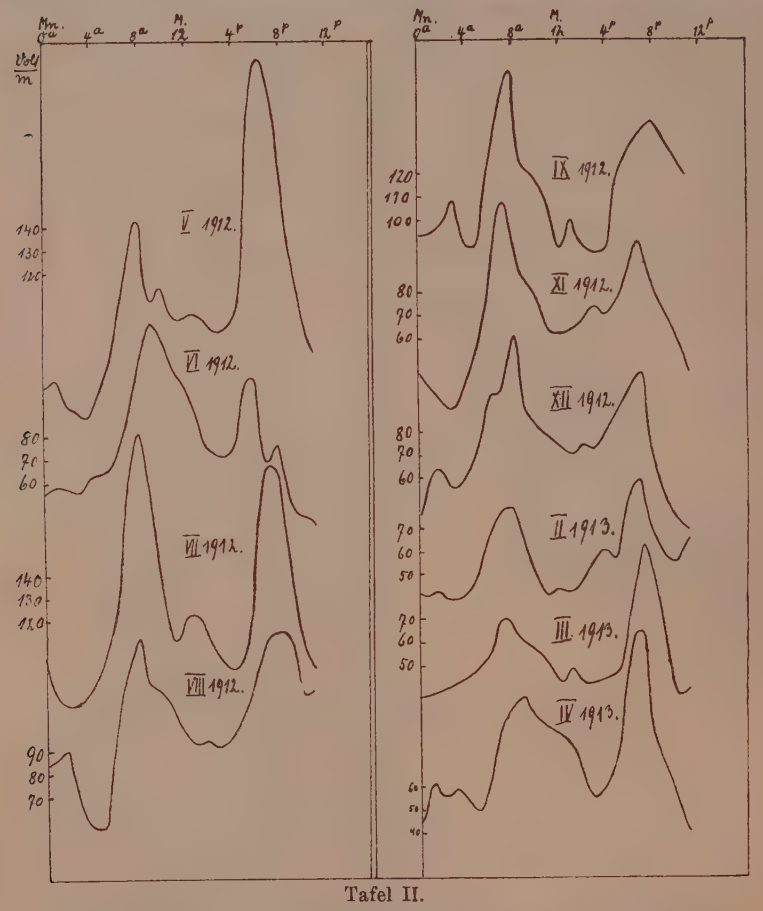
finden (z. B. Potsdam, München). Der Grund dafür, daß diese mittägige Depression in den früheren Registrierungen kaum zutage trat, kann wohl nicht in Isolationsfehlern liegen, denn diese würden im Sinne der Depression wirken, und dann war, wenn überhaupt je, gerade um Mittag die Isolation am besten in Ordnung. Vielmehr könnte man vermuten, daß die Aufstellung die Ursache war. Früher befand sich die Sonde etwa [illegible] m über dem Erdboden. Im Mai 1911, dem Monat, der die doppelte Periode deutlich zeigt, war ein Spritzkollektor in Tätigkeit, der einen Strahl ausströmen ließ. Sein Referenzpunkt lag wesentlich tiefer. Seit Mitte 1912 aber befindet sich die Aufstellung im unteren



Figur 1.

Täglicher Gang des Potentialgefälles in Samoa im Monatsmittel aus allen Tagen.

Stockwerk, und dadurch die Sondenhöhe einige Meter dem Boden näher. Vielleicht tritt dadurch die mittägige Depression deutlicher hervor. Auch mag die große Trockenheit des Jahres 1912 die doppelte Periode besonders begünstigt haben. Daß nämlich die



Tafel II.
Täglicher Gang des Potentialgefälles in Samoa, an Schönwettertagen.

mittägige Depression eine Störung ist, die vom Erdboden ausgeht und nur in seiner Nähe und besonders über trockenem Boden stark wirkt, ist wohl als sichergestellt anzusehen (Gockel, Luftelektrizität S. 101/102).

Anhang I.

Luftelektrische Beobachtungen zur See.

Auf einer Reise von Genua nach Singapore im Mai 1911 hatte ich Gelegenheit, einige luftelektrische Messungen zur See vorzunehmen. Ich benutzte dazu folgende Instrumente:

Zur Messung des Potentialgefälles nach einer schon von Palmieri angewendeten Methode diente eine Wippe, die im geophysikalischen Institut der Universität Göttingen nach Angaben von Herrn Professor Wiechert angefertigt wurde.

Die Konstruktion war folgende: Eine horizontale, etwa 1,50 m lange 1 cm dicke röhrenförmige Aluminiumstange trug an einem Ende einen etwa ½ m langen 0.5 cm dicken Querarm ebenfalls aus Aluminium. Am anderen Ende war die Aluminiumstange auf eine Bernsteinsäule von 5 cm Durchmesser und 5 cm Höhe montiert, die ihrerseits auf einer horizontalen Stahlaxe befestigt war. Diese Axe konnte mittels eines Hebelarmes um je etwa 30° nach oben und unten gedreht werden, wodurch die Aluminiumstange bewegt und der Querarm um etwa 0.75 m gehoben oder gesenkt werden konnte. Die Aluminiumstange, die Sonde, war durch eine Drahtspirale mit dem Blättchenträger eines Wiechertschen Quarzfadenelektrometers verbunden. Das Gehäuse des Elektrometers war isoliert gegen die Erde und mit dem einen Pol einer Taschenlampenbatterie von 64 Volt Spannung verbunden, der andere Pol der Batterie war geerdet. Die Beobachtung geschah folgendermaßen:

1) Die Sonde wurde horizontal gestellt und geerdet.
2) Durch Drehung der Axe gehoben.
3) Wieder horizontal gestellt und geerdet.
4) Durch Drehung der Axe gesenkt.

Das Elektrometer wurde in allen 4 Lagen der Sonde abgelesen. Die Aichung geschah durch gleichzeitige Ablesung am Flammenkollektor, der ebenso wie die Wippe in möglichst horizontalem Gelände aufgestellt war. Dadurch erhält man den Reduktionsfaktor der Wippe für eine Aufstellung in ebenem Gelände.

Die Aufstellung an Bord des Lloyddampfers war folgendermaßen: In der Höhe des Hauptdeckes des Schiffes läuft an den Längsseiten ein vom Promenadendeck überdeckter Gang; bis in

Brusthöhe reichten die Eisenplatten des Schiffskörpers, die dort durch eine Holzbrüstung abgegrenzt werden. Auf dieser wurde der Apparat so montiert, daß die Sonde in ihrer ganzen Länge aus der sehr regelmäßigen und ebenen Schiffswand herausragte. Die Aufstellung befand sich etwa 3—4 m über dem Wasser in der Mitte des Schiffes an der vom Winde abgewandten Seite. An den Messungstagen war ausnahmslos ganz glatte See und nur ganz mäßiger Wind.

Dieser besonderen Aufstellung an Bord wurde dadurch Rechnung getragen, daß Vergleichsmessungen in flachen Booten in ganz ruhigem Wasser der Häfen von Aden und besonders Penang angestellt wurden in einer Entfernung von etwa 200 m vom Schiffe entfernt. Sodann wurde dieser Reduktionskoeffizient für Schiffsaufstellung nochmals in Samoa nachgeprüft. Dort wurde der Apparat in einer durchaus ähnlichen Lage in einem Kriegsschiff aufgestellt und zwar sowohl in Fahrt wie vor Anker gemessen. und gleichzeitig am flachen Ufer der ganz flachen Bucht Vergleichsmessungen angestellt.

Es ergab sich als Reduktionskoeffizient auf Volt/m der Ebene bei Aufstellung der Wippe in der Ebene

in Göttingen	3.4
„ Samoa	3.6
„ „	3.2
„ „	3.5
Mittel	3.4.

Bei Aufstellung der Wippe auf Schiffen

in Aden	17.0
„ „	9.5
„ Penang	7.5
„ „	9.5
„ „	8.5
„ Samoa	10.0
Mittel	10.

Dieser Reduktionsfaktor 10 ist auf etwa 10 % sicher, wenn man der ersten Messung in Penang nicht ganz dasselbe Gewicht gibt wie den anderen.

Jedem Messungssatze liegt eine größere Anzahl von Beobachtungen zugrunde.

Die Leitfähigkeit wurde mit dem Gerdienschen Apparat bestimmt, in den dasselbe Wiechertsche Quarzfadenelektrometer an Stelle des Blättchenektrometers gesetzt werden konnte.

Das Wiechertsche Elektrometer ist folgendermaßen gebaut: Das Elektroskop besteht aus zwei Teilen, nämlich dem eigentlichen Elektroskop und der Ablesevorrichtung. In dem Gehäuse des Elektroskops ist unten in einer Bernsteinisolation (siehe Fig. 1 B) der Blättchenträger (Fig. 1 Bt) befestigt, auf dessen schrägstehenden Leisten (Fig. 2 L) die versilberten (oder platinierten) Quarzfaden (Fig. 2 F) angebracht sind.

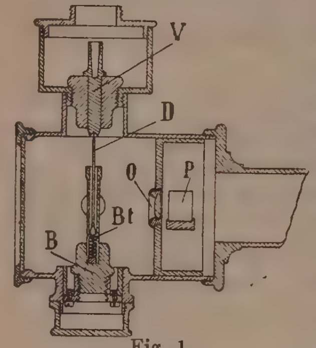


Fig. 1.

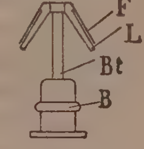


Fig. 2.

Das Aufladen dieser Fäden erfolgt von oben durch die Ladevorrichtung (Fig. 1 V), welche sich ebenso wie der Blättchenträger in einem das Gehäuse abschließenden Bernsteinstopfen befindet. Die Verbindung wird durch einen Draht (Fig. 1 D) hergestellt, der sich in den durchbohrten Blättchenträger (Fig. 1 Bt) steckt, auf einer Feder seinen Stützpunkt findet und durch diese fest unter die Ladevorrichtung (Fig. 1 V) gepreßt wird, mithin die leitende Verbindung herstellt. Ein konisches Loch in dem oberen Ende der Ladevorrichtung gestattet einen Ladestift etc. einzustecken. Diese Ladevorrichtung bietet, gegenüber der früheren Anordnung bei Blättchenelektroskopen, in den Blättchenträger den Ladestift direkt einzuführen, den Vorteil, daß der Blättchenträger in seiner Isolation nicht gelockert werden kann, ferner daß Staub oder Luftzug ferngehalten wird. Bei Nichtgebrauch des Elektroskops wird die über der Ladevorrichtung befindliche Öffnung durch einen Deckel geschlossen.

Am Gehäuse befinden sich 2 Hülsen, die eine dient zur Aufnahme von Chlorcalcium zum Austrocknen des Elektroskops, in die andere wird Bleiazitat zum Schutze der versilberten Fäden eingefüllt. Die Stirnseite des Gehäuses ist durch eine Mattglasscheibe verschlossen, am gegenüberliegenden Ende der Kapsel ist die Ablesevorrichtung angebracht. Die Ablesung der Blättchen ist eine mikroskopische. Die Konstruktion dieser Vorrichtung ist aus Fig. 3 zu ersehen.



Fig. 3.

Für jeden der beiden schräghängenden Quarzfäden ist je ein Objektiv (Fig. 1 O) vorgesehen. Dicht hinter jedem Objektiv ist

je ein parallelepipedisches Prisma P angebracht und zwar so gestellt, daß das vom Objektiv entworfene reelle Bild so verschoben wird, daß die Fäden sich im Gesichtsfeld kreuzen (Fig. 3). Das Okular ist mit einer senkrecht stehenden Mikrometerteilung versehen, an welcher der Ausschlag des Fadenkreuzungspunktes gemessen werden kann.

Bei der im Okular befindlichen Skala (Fig. 3) ist 1 cm in 100 Teile geteilt. Die Schärfe des von den Fäden entworfenen Kreuzes läßt die Schätzung von $^1/_{10}$ Skalenteilen noch zu.

Die Fäden haben bei der geringen Dicke und Kürze ein so minimales Gewicht und so viel Steifheit, daß sie gegen Neigungen des Apparates ziemlich unempfindlich sind; ein aufgeladenes Elektroskop kann ohne Weiteres transportiert werden. Es entladet sich auch nicht, wenn der Apparat auf die Seite gelegt oder auf den Kopf gestellt wird.

Die Kapazität des Elektroskopes beträgt 6,8 cm.

Wie gut sich das Wiechertsche Elektrometer bewährt hat, zeigt die Aichkurve vor und nach der Reise (Fig. 4).

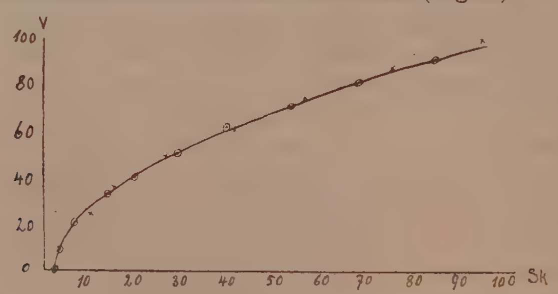


Fig. 4.

⊙ Aichung April 1911 Göttingen. × Aichung vom 22. April 1912 Apia.

Die Resultate der Beobachtungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt (S. 13).

Resultat:

Es ergab sich also auf offener See als Mittelwert aus 11 Messungen des Potentialgefälles und 8 Messungen der Leitfähigkeit

$$V = 96 \text{ Volt/m}$$
$$\lambda_+ = 1.16 \times 10^{-4} \text{ e.st.E.}$$
$$\lambda_- = 0.99 \quad " \quad "$$
$$\lambda_+ + \lambda_- = 2.16 \quad "$$
$$\frac{\lambda_+}{\lambda_-} = 1.17$$
$$i = \lambda \frac{\partial V}{\partial h} = 2.11 \times 10^{-16} \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}. \quad \text{(Vert. Leitungsstrom.)}$$

Die Leitfähigkeitsmessung im Suezkanal ist einer Messung im Wüstenklima gleich zu achten; sie ergab $\lambda_+ = 1.42$; $\lambda_- = 1.68$; $\frac{\lambda_+}{\lambda_-} = 0.85$.

Datum	Zeit	Ort		Potent.-Gefälle V.	Leitfähigkeit		$\lambda_+ + \lambda_-$	$\frac{\lambda_+}{\lambda_-}$	V.Str. i	
		Lg.	Br.		λ_+	λ_-				
26.IV.1911	7^a	Suezkanal			1.42	1.68	3.1	0.85		Suezkanal
27. IV.	10^a—12^a	36° E	25° N	112	0.64	0.61	1.25	1.05	2.2	Rotes Meer
28. IV.	9^a—11^a	39°	20°	107	1.32	0.80	2.12	1.65	2.5	„ „
	5^p—6^p			107	1.05	0.93	1.98	1.13	2.4	„ „
29. IV.	9^a	42°	15°	102	1.10	0.94	2.04	1.17	2.3	„ „
	11^p			81	0.88	0.97	1.85	0.91	1.8	„ „
30. IV.	11^a	45°	13°	96	1.07	1.07	2.14	1.00	2.3	Aden
2. V.	11^a	57°	12°	92	1.75	1.42	3.17	1.23	2.2	Ind. Ozean
	5^p			97	1.50	1.21	2.71	1.24	2.9	„ „
	8^p 30			87						
	12^p 20			75						
10. V.	5^p									
11. V.				92						

Anhang II.

Über die Zunahme der Intensität der Wellen der drahtlosen Telegraphie bei Sonnenuntergang.

Vorgelegt in der Sitzung am 17. Juni 1911 von E. Wiechert.

Die bekannte Tatsache, daß die Wellen der drahtlosen Telegraphie bei Nacht besser empfangen werden als bei Tage, veranlaßte mich zu folgender Beobachtung:

Bei einer Reise nach Indien im Mai 1911 liefen im indischen Ozean 2 Schiffe, die mit drahtloser Telegraphie ausgestattet waren, beide in gleichem südöstlichen Kurs etwa 160 km voneinander (10° n. Br., 67° E. Greenwich). Ich befand mich auf dem zweiten

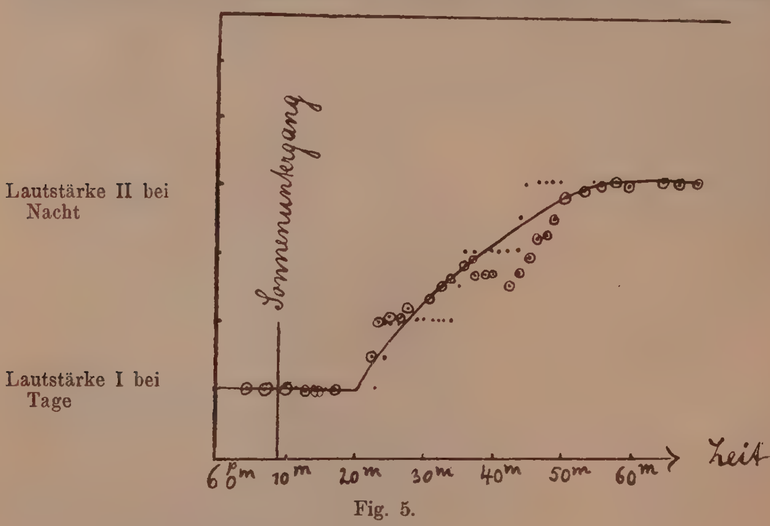


Fig. 5.

⊙ Beobachtung vom 1. Tage.
● Beobachtung vom 2. Tage.
I. Durchschnittliche Stärke der Signale bei Tage.
II. Durchschnittliche Stärke der Signale bei Nacht.

Schiffe und veranlaßte, daß an 2 aufeinanderfolgenden Tagen von dem vor uns laufenden Schiffe drahtlose Telegraphiesignale etwa eine Stunde lang von Sonnenuntergang an gegeben wurden und

zwar in Zwischenräumen von je einer Minute. Die Stärke der im Telephon gehörten Signale wurde in willkürlich gewählten Stärkegraden aufgeschrieben. Fig. 5 gibt ein Bild des zeitlichen Verlaufes der Stärkezunahme der Signale. Die Wetterlage war an beiden Tagen durchaus die gleiche, nämlich durchsichtige Luft, wolkenloser Himmel, fast windstill. Die Kurven verlaufen für beide Tage recht ähnlich. In beiden Fällen beginnt die Zunahme etwa 10 Minuten nach Sonnenuntergang und erreicht etwa 35 bis 40^{mm} nach Sonnenuntergang das Maximum. Dies Maximum entspricht einem Depressionswinkel δ der Sonne (Sonnenstand unterm Horizont) von $\delta =$ etwa 9^0, für die Jahreszeit Mai und die Breite des Beobachtungsortes ($\varphi = +10^0$).

Die Luftschichten, die bei diesem Sonnenstand noch gerade vom Sonnenlicht getroffen werden, liegen h km

$$h = \frac{r(1-\cos\delta)}{\cos\delta}$$

über der Erdoberfläche ($r =$ Erdradius).

Die Strahlenbrechung der Atmosphäre ist hierbei nicht berücksichtigt; sie wird den Wert von h etwas verkleinern.

Es ergibt sich für $\delta = 9^0$; $h = 80$ km.

Es läßt sich aus diesen Versuchen also schließen, daß die Störung der elektrischen Wellen, die durch das Sonnenlicht hervorgerufen wird, bei Stationen im Abstand von etwa 160 km nicht höher als etwa 80 km emporreicht. Ferner scheint das Verschwinden der Sonnenstrahlen aus den unteren Schichten der Atmosphäre keinen wesentlichen Einfluß zu besitzen, da an beiden Beobachtungstagen die Zunahme der Stärke der Signale erst etwa 10^{min} nach Sonnenuntergang begann (Sonnenstand unter dem Horizont etwa $2^1/_2{}^0$ für 10^{min} nach Sonnenuntergang). Die an benachbarten Tagen gemachten Messungen der elektrischen Leitfähigkeit und des Potentialgefälles deuten ebenfalls darauf hin, daß in der untersten Schicht der Atmosphäre beim Verschwinden des Sonnenlichts keine große Änderung der elektrischen Verhältnisse erfolgt. Die ionisierende Wirkung der Sonnenstrahlen scheint für die untersten Schichten doch weniger Bedeutung zu haben. Die benutzte Wellenlänge betrug etwa 600 m, bei 90 m Drahtlänge. Der Draht war in etwa 30 m Höhe über dem Meere zwischen den beiden 90 m von einander entfernten Schiffsmasten ausgespannt.

Die Änderung der Stärke der Signale zur Beobachtungszeit war recht deutlich. Der Telegraphenbeamte und ich beobachteten

gleichzeitig unabhängig von einander; unsere Aufzeichnungen der Lautstärke stimmen recht gut miteinander überein.

Beobachtungen der Dämmerung an benachbarten Tagen führten zu etwa 30^{min} für die Dauer der bürgerlichen „Dämmerung ($\delta = 7.^{0}5$) (bis zum Ende des ersten Purpurlichtes)", während die astronomische Dämmerung erst nach etwa 1¼ Stunden zu Ende war (völlige Dunkelheit).

Die Lage der Schiffsorte ergab, daß der Sonnenuntergang auf dem Schiff, das als Geber diente, etwa 3^{min} früher erfolgte, als auf dem Empfänger, dies wurde in Rechnung gezogen.

Zur Voigtschen Theorie des Zeeman-Effektes.

Von

A. Sommerfeld.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 7. März 1914.

Die neuen Beobachtungen der Herren Paschen-Back und Fortrat haben Herrn Voigt dazu geführt, seine allgemeine Theorie des Zeeman-Effektes im Falle des D-Linien-Typus so auszubauen[1]), daß sie sowohl die komplizierten Zerlegungen bei schwachen Feldern wie die zunehmende Vereinfachung bei starken Feldern umfaßt. Sie kann daher als ein im Wesentlichen getreues und zuverlässiges Abbild der Beobachtungstatsachen gelten. Angesichts dieses großen Erfolges scheint mir die Frage, wie weit die Voigtsche Theorie aus den gewöhnlichen elektrodynamischen und statistischen Gesetzen verstanden werden kann, von sekundärer Bedeutung (vgl. hierzu § 6 Nr. 7).

Die von mir vorgeschlagene[2]) Auffassung des Paschen-Backschen Effektes kann sich mit der Voigtschen Theorie offenbar in keiner Weise messen. Sie wollte nur die Verhältnisse bei starken Feldern veranschaulichen; die komplizierten Zerlegungen bei schwachen Feldern kann sie nicht wiedergeben.

In den folgenden Zeilen möchte ich zeigen, daß sich die Voigtschen Gleichungen für die D-Linien in eine überraschend einfache Form bringen lassen. Dabei erweist es sich als nützlich, die Frage nach dem Verhalten der Intensitäten zunächst zurückzustellen und die einfachere Frage nach dem Verhalten der Frequenzen vorweg zu nehmen. Auf die Verallgemeinerung der

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 41, pag. 403, 1913 und 42, pag. 210, 1913, im Folgenden als Abh. I und Abh. II zitiert.

2) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 40, pag. 748, 1913.

Methode bei anderen Zerlegungen hoffe ich demnächst zurückzukommen.

§ 1.

Die Differentialgleichungen für die parallelen Schwingungen.

Den Ausgangspunkt bildet der von Herrn Voigt allgemein begründete Ansatz der zyklischen Koppelungs-Koeffizienten. Die Frequenz von D_1 sei n_1, die von D_2 sei $n_2 = n_3$. Die Schwingungen werden durch drei komplexe[1]) Variable ζ_1, ζ_2, ζ_3 dargestellt, wobei die Variable $\zeta_\varkappa$ zu der ursprünglichen Frequenz $n_\varkappa$ gehöre ($\varkappa = 1, 2, 3$). Der zyklische Ansatz lautet dann unter Vernachlässigung des Dämpfungsgliedes:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + n_\varkappa^2\right)\zeta_\varkappa = ih\frac{d}{dt}(a\zeta_\varkappa + b\zeta_{\varkappa+1} + \bar{b}\zeta_{\varkappa+2}). \tag{1}$$

Hier mißt

$$h = \frac{e}{m}H$$

die Stärke des magnetischen Feldes H. a, b, $\bar{b}$ sind die (vom Felde unabhängigen) Koppelungskoeffizienten. Darin, daß sie keinen Index tragen, sondern für alle drei Indices $\varkappa$ denselben Wert haben, liegt der zyklische Charakter des Ansatzes. $\bar{b}$ ist aus energetischen Gründen zu b konjugiert imaginär. Daß wir den Faktor i rechterhand herausziehen, bedeutet keine Spezialisierung.

Wir stützen uns ferner auf das von Herrn Voigt begründete Schema der Aufspaltung bei kleinen Feldern (Fig. 1). Danach gibt bei den parallelen Schwingungen (p) D_1 eine Auf-

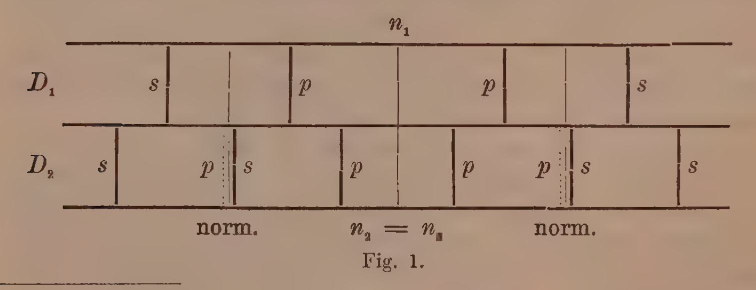


Fig. 1.

1) Der komplexe Ansatz für die s-Komponenten ergibt sich von selbst und ist schon in der elementaren Theorie des Zeeman-Effektes üblich. Seine Übertragung auf die p-Komponenten dient im Falle der D-Linien zur Vereinfachung, bedeutet aber, wie Herr Voigt gelegentlich hervorhebt, im allgemeinen bereits eine Spezialisierung.

spaltung gleich $^2/_3$ der normalen, D_2 eine solche gleich $^1/_3$ der normalen und eine Dublet verschwindender Intensität von normaler Aufspaltung (in der Figur punktiert eingetragen; die ursprünglichen Frequenzen von D_1 und D_2 sind übereinander gezeichnet). Bevorzugen wir für die Rechnung die Verschiebung nach der negativen Seite, so ist die Verschiebung von normaler Aufspaltung durch $-h/2$ gegeben und es werden die Frequenzen

$$(2)\qquad \begin{cases} \text{von } D_1:\ \nu_1 = n_1 - \dfrac{2h}{6}, \\ \text{von } D_2:\ \nu_2 = n_2 - \dfrac{h}{6} \text{ bez. } \nu_3 = n_2 - \dfrac{3h}{6}. \end{cases}$$

Wir machen in (1) den Ansatz

$$(3)\qquad \xi_1 = A e^{i\nu t},\ \xi_2 = B e^{i\nu t},\ \xi_3 = C e^{i\nu t}.$$

Bei schwachen Feldern ($h \langle\langle n_2 - n_1$) ergibt sich aus (1) für $\nu = \nu_1$ unter Vernachlässigung höherer Potenzen von h:

$$B = C = 0,\ \frac{2h}{3} n_1 A = -\nu_1 h a A,$$

also, da hinreichend genau $\nu_1 = n_1$ ist,

$$(4)\qquad a = -\frac{2}{3}.$$

Ebenso folgt aus (1) für $\nu = \nu_2$ resp. $\nu = \nu_3$

$$A = 0,\quad \begin{cases} \dfrac{h}{3} n_2 B = -\nu_2 h (aB + bC) \\ \dfrac{h}{3} n_2 C = -\nu_2 h (aC + \bar{b}B) \end{cases}$$

resp.

$$A = 0,\quad \begin{cases} h n_2 B = -\nu_3 h (aB + bC) \\ h n_2 C = -\nu_3 h (aC + \bar{b}B). \end{cases}$$

Da wieder hinreichend genau $\nu_2 = \nu_3 = n_2$ ist, vereinfachen sich die Gleichungen für B und C mit Rücksicht auf (4) zu

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{3} B = bC \\ \dfrac{1}{3} C = \bar{b}B \end{cases} \quad \text{resp. (5a)} \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{3} B = bC \\ -\dfrac{1}{3} C = \bar{b}B. \end{cases}$$

und es ergibt sich aus beiden übereinstimmend

(6) $$b\bar{b} = \frac{1}{9}, \quad b = +\frac{1}{3}e^{i\beta}, \quad \bar{b} = +\frac{1}{3}e^{-i\beta}.$$

Das Vorzeichen bei b und $\bar{b}$ bedeutet keine Spezialisierung, da der Winkel β vorläufig ganz allgemein gelassen ist.

Setzt man aus (4) und (6) ein, so läßt sich (1) übersichtlicher so schreiben:

(1') $$\left(\frac{d^2}{dt^2} + ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\zeta_\varkappa = +\frac{ih}{3}\frac{d}{dt}\left(\zeta_\varkappa + e^{i\beta}\zeta_{\varkappa+1} + e^{-i\beta}\zeta_{\varkappa+2}\right).$$

Wir stellen jetzt die allgemeine Frequenzgleichung für beliebige Werte von h auf. Zu dem Ende gehen wir in (1') mit dem Ansatz (3) ein, benutzen die Abkürzung

(7) $$p_\varkappa = 1 + \frac{\nu^2 + \nu h - n_\varkappa^2}{-\nu h/3}, \qquad \varkappa = 1, 2, 3$$

und erhalten durch Elimination der Amplituden A, B, C:

(8) $$\begin{vmatrix} p_1 & e^{i\beta} & e^{-i\beta} \\ e^{-i\beta} & p_2 & e^{i\beta} \\ e^{i\beta} & e^{-i\beta} & p_2 \end{vmatrix} = p_1 p_2^2 + 2\cos 3\beta - p_1 - 2p_2 = 0.$$

Aus den eingangs zitierten Beobachtungen entnehmen wir, daß diese Gleichung bei starken Feldern ($h \gg n_2 - n_1$) eine scharfe Linie im Schwerpunkte des ursprünglichen Dublets liefern solle, also eine Wurzel

(9) $$\nu = n, \quad \text{wo} \quad n^2 = \frac{1}{3}(n_1^2 + 2n_2^2).$$

Nach (7) wird für diesen Wert von ν

(10) $$p_1 = -2 - 2\varkappa, \quad p_2 = -2 + \varkappa$$

mit der Abkürzung

(11) $$\varkappa = \frac{n_2^2 - n_1^2}{nh},$$

so daß $\varkappa$ bei starken Feldern eine kleine Zahl ist.

Setzen wir die Werte (10) in (8) ein, so folgt bis auf höhere Potenzen von $\varkappa$

(12) $$\cos 3\beta = 1, \quad \text{also} \quad \beta = 0 \quad \text{oder} \quad \beta = \pm\frac{2\pi}{3}.$$

Mit $\beta = 0$ geht (1) über in die überaus einfache Form:

(I) $$\left(\frac{d^2}{dt^2} + ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\zeta_\varkappa = +\frac{ih}{3}\frac{d}{dt}(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3).$$

Linkerhand steht der Differentialausdruck, welcher gleich Null gesetzt den elementaren Zeeman-Effekt liefert. Rechterhand erkennt man den Ausdruck für den Schwerpunkt der drei Variabeln $\dot{\zeta}_\varkappa$, multipliziert mit $ih\frac{d}{dt}$. Diese Gleichung erweist sich als identisch mit den von Herrn Voigt gegebenen Gleichungen für die parallelen Schwingungen, welche in Abh. I Gl. (24), (25), (26), (45) enthalten sind.

Wir haben noch zu zeigen, daß die in Gl. (12) erwähnte zweite Möglichkeit $\beta = \pm\frac{2\pi}{3}$ nichts Neues ergibt. Führt man nämlich bei dieser Wahl von β statt der ursprünglichen $\zeta_\varkappa$ neue Variable $\zeta'_\varkappa$ ein, so zwar daß

$$(13) \qquad \zeta'_1 = \zeta_1, \quad \zeta'_2 = \zeta_2 e^{i\beta}, \quad \zeta'_3 = \zeta_3 e^{-i\beta}$$

und berücksichtigt man, daß nach (12)

$$e^{2i\beta} = e^{-i\beta}, \quad e^{-2i\beta} = e^{+i\beta}$$

ist, so gehen die Gl. (1') für $\varkappa = 1, 2, 3$ wieder genau in die Form (I) über, wobei nur die neuen $\zeta'_\varkappa$ an Stelle der alten $\zeta_\varkappa$ treten. Die Berechnung der Frequenzen wird also durch diese Wahl von β nicht geändert; auf die Bestimmung der Amplituden kommen wir später zurück.

§ 2.

Die Differentialgleichungen für die senkrechten Schwingungen.

Auch hier legen wir den zyklischen Ansatz (1) zu Grunde, in welchem die noch völlig verfügbaren Koppelungskoeffizienten a, b, $\bar{b}$ aus dem Schema der Aufspaltungen für die s-Komponenten in Fig. 1 neu zu bestimmen sind. Nach diesem ist (bei abermaliger Bevorzugung der negativen Verschiebungen) für schwache Felder die Frequenz

$$\text{von } D_1\colon \nu_1 = n_1 - \frac{4h}{6}$$

$$\text{von } D_2\colon \nu_2 = n_2 - \frac{3h}{6} \text{ bez. } \nu_3 = n_2 - \frac{5h}{6}.$$

Mit dem allgemeinen Ansatz (3) ergibt sich für $\nu = \nu_1$ unter Vernachlässigung höherer Potenzen von h, ähnlich wie bei den p-Komponenten, $B = C = 0$ und

$$(14) \qquad a = -\frac{4}{3};$$

ferner für $\nu = \nu_2$ resp. $\nu = \nu_3$ $A = 0$ und nach Eintragung von a aus (14)

$$(15)\quad \begin{cases} -\frac{1}{3} B = b\,C \\ -\frac{1}{3} C = \bar{b}\,C \end{cases} \quad \text{resp. (15a)} \begin{cases} +\frac{1}{3} B = b\,C \\ +\frac{1}{3} C = \bar{b} B. \end{cases}$$

Aus (15) folgt übereinstimmend

$$(16)\qquad b\bar{b} = \frac{1}{9},\quad b = -\frac{1}{3} e^{i\beta},\quad \bar{b} = -\frac{1}{3} e^{i\beta}.$$

Daß wir hier, im Gegensatz zu (6), bei b und $\bar{b}$ das negative Vorzeichen benutzen, ist willkürlich, aber belanglos, da ja der Winkel β noch ganz zu unserer Verfügung steht.

Setzt man aus (14) und (16) ein, so läßt sich (11) nach einer naheliegenden Umstellung übersichtlicher so schreiben:

$$(17)\quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\zeta_\varkappa = \frac{-ih}{3}\frac{d}{dt}\left(\zeta_\varkappa + e^{i\beta}\,\zeta_{\varkappa+1} + e^{-i\beta}\,\zeta_{\varkappa+2}\right).$$

Daraufhin lautet die allgemeine Frequenzgleichung für die s-Schwingungen, die man durch Eintragen des Ansatzes (3) in (17) und Elimination der Amplituden A, B, C erhält, genau so wie für die p-Schwingungen, Gl. (8); nur hat man jetzt unter $p_\varkappa$ die Abkürzung zu verstehen:

$$(18)\qquad p_\varkappa = 1 + \frac{\nu^2 + \nu h - n_\varkappa^2}{+\nu h/3},\qquad \varkappa = 1, 2, 3.$$

Nunmehr ziehen wir die Beobachtungen von Paschen und Back heran und postulieren, daß für sehr starke Felder beiderseits eine Linie normaler Aufspaltung relativ gegen den Schwerpunkt der ursprünglichen Linien auftritt. Eine solche Linie hat die Frequenz:

$$(19)\qquad \nu = n - \frac{h}{2},\quad n^2 = \frac{1}{3}(n_1^2 + 2n_2^2).$$

Die zugehörigen Werte von $p_\varkappa$ sind nach (18) mit der früheren Abkürzung $\varkappa$ aus Gl. (11):

$$(20)\qquad p_1 = 1 + 2\varkappa,\quad p_2 = 1 - \varkappa.$$

Bei diesen Werten der $p_\varkappa$ soll im Falle starker Felder (kleiner $\varkappa$) die Frequenzgleichung (8) erfüllt sein. Daraus folgt bei Vernachlässigung höherer Potenzen von $\varkappa$ abermals:

$$(21)\qquad \cos 3\beta = 1,\quad \beta = 0\quad \text{oder}\quad \beta = \pm\frac{2\pi}{3}.$$

Bevorzugen wir wieder die erste Möglichkeit $\beta = 0$, so geht

(14′) über in die mit (I) nahezu identische, überaus einfache Form:

$$\text{(II)} \qquad \left(\frac{d^2}{dt^2} + ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\xi_\varkappa = \frac{+ih}{3}\frac{d}{dt}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3),$$

über deren Struktur dasselbe zu sagen wäre wie bei (I). Wählen wir andererseits die zweite Möglichkeit $\beta = \pm 2\pi/3$, so erhalten wir Gleichungen, welche sich als identisch erweisen mit den von Herrn Voigt gefundenen Gleichungen für die senkrechten Schwingungen (Abh. I Gl. (24), (25), (26), (27). Wir überzeugen uns aber ebenso wie am Schlusse des vorigen §, daß diese Gleichungen für die Berechnung der Frequenzen nichts anderes als die noch etwas einfacheren Gleichungen (II) ergeben können. Genügt es doch, an den ξ in (17) die Substitution (13) vorzunehmen, um diese Gleichungen auf die Form (II) zurückzuführen. Anders für die Berechnung der Intensitäten. Die in § 4 zu besprechende Einführung von Gewichten kommt darauf hinaus, daß wir auf die zweite Wahl von β in (21) zurückgreifen und somit im Grunde die Voigtschen Gleichungen benutzen werden. Die soeben genannte Substitution (13) wird dann für die Berechnung der Intensitäten wesentlich.

§ 3.

Allgemeine Lösung der Frequenzgleichung.

Mit $\cos 3\beta = 1$ lautet Gl. (8) sowohl für die p- wie für die s-Komponenten, die sich voneinander nur durch die Definition der $p_\varkappa$ unterscheiden (Gl. (7) und (18)):

$$p_1(p_2^2 - 1) - 2(p_2 - 1) = 0.$$

Die linke Seite hat den Faktor $p_2 - 1$, so daß wir die Gleichung auch schreiben können;

$$\text{(22)} \qquad (p_2 - 1)(p_1 p_2 + p_1 - 2) = 0.$$

Nach (7) resp. (18) ist

$$p_1 = p_2 + \frac{n_2^2 - n_1^2}{\mp \nu h/3},$$

wo das obere (untere) Vorzeichen bei parallelen (senkrechten) Schwingungen gilt. Wir können hierfür wegen (11) schreiben:

$$\text{(22a)} \qquad p_1 = p_2 \mp 3\varkappa,$$

indem wir ν mit n vertauschen. Dies ist allemal gestattet, da der relative Unterschied von ν und n klein von der Ordnung h/n oder $(n_2 - n_1)/n$ ist, einer Größe, die selbst bei stärksten Feldern

und verhältnismäßig weiten Duplets durchaus zu streichen ist. In p_2 geschrieben lautet also (22) so:

$$(23) \qquad (p_2 - 1)(p_2^2 + (1 \mp 3\varkappa)p_2 - 2 \mp 3\varkappa) = 0.$$

Die drei Wurzeln sind

$$(24) \begin{cases} p_2' = 1 \\ p_2'' = -\frac{1 \mp 3\varkappa}{2} + \sqrt{2 + \left(\frac{1 \pm 3\varkappa}{2}\right)^2} = -\frac{1 \mp 3\varkappa}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{1 \pm \frac{2}{3}\varkappa + \varkappa^2} \\ p_2''' = -\frac{1 \mp 3\varkappa}{2} - \sqrt{2 + \left(\frac{1 \pm 3\varkappa}{2}\right)^2} = -\frac{1 \mp 3\varkappa}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{1 \pm \frac{2}{3}\varkappa + \varkappa^2}. \end{cases}$$

Die erste Wurzel entspricht nach (7) bei beliebigen Feldern einer normalen Aufspaltung $\nu = n - h/2$ relativ gegen die Linie D_2; dieselbe kommt in der Voigtschen Figur (Abh. II pag. 224) zum Ausdruck bei den inneren s-Komponenten 2 (bei den p-Komponenten gehört zu dieser Wurzel nach Späterem und nach Voigt (Abh. II pag. 216) verschwindende Intensität).

Von den p_2 geht man unmittelbar zu den Aufspaltungen selbst über. Mißt man dieselben in Teilen der normalen Aufspaltung $h/2$, setzt also (für die negative Seite)

$$(24\,a) \qquad \nu = n_2 - \mu h/2,$$

so wird nach (7) und (18), wenn man, was stets erlaubt ist, im Nenner ν durch n_2 ersetzt:

$$(25) \quad p_2 = 1 + \frac{\nu^2 + \nu h - n_2^2}{\mp n_2 h/3} = 1 \mp 3(1 - \mu) = \begin{cases} -2 + 3\mu \\ +4 - 3\mu. \end{cases}$$

Hieraus berechnet man sofort für die

$$(26) \quad \begin{array}{cc} p\text{-Komp.} & s\text{-Komp.} \\ \begin{cases} \mu' = 1 \\ \left.\begin{matrix}\mu'' \\ \mu'''\end{matrix}\right\} = \frac{1+\varkappa}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{2}{3}\varkappa + \varkappa^2} \end{cases} & \begin{cases} \mu' = 1 \\ \left.\begin{matrix}\mu'' \\ \mu'''\end{matrix}\right\} = \frac{3+\varkappa}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{2}{3}\varkappa + \varkappa^2}. \end{cases} \end{array}$$

Wenngleich diese geschlossene Form für die numerische Berechnung vorzuziehen ist, wollen wir, um den Vergleich mit den Voigtschen Formeln Abh. II pag. 219 bis 224 zu erleichtern, auch die Entwickelungen für starke und schwache Felder ($\varkappa \ll 1$ und $\varkappa \gg 1$) hinschreiben. Man findet ohne Umstände:

Starke Felder, p-Schwingungen:

$$
\begin{aligned}
&\mu' = 1\\
(27)\qquad &\mu'' = 1+2\left(\frac{\varkappa}{3}+\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^2-\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^3-\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^4+\cdot\cdot\right)\\
&\mu''' = \frac{\varkappa}{3}-2\left(\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^2-\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^3-\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^4+\cdot\cdot\right).
\end{aligned}
$$

Starke Felder, s-Schwingungen:

$$
\begin{aligned}
&\mu' = 1\\
(28)\qquad &\mu'' = 1+2\left(\frac{\varkappa}{3}-\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^2-\frac{\varkappa}{3}\Big)^2+\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^4+\cdot\cdot\right)\\
&\mu''' = 2+\frac{\varkappa}{3}+2\left(\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^2+\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^3-\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^4+\cdot\cdot\right).
\end{aligned}
$$

Schwache Felder, p-Schwingungen:

$$
\begin{aligned}
&\mu' = 1\\
(27\,a)\qquad &\mu'' = \varkappa+\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\varkappa}-\frac{1}{(3\varkappa)^2}-\frac{1}{(3\varkappa)^3}+\cdot\cdot\right)\\
&\mu''' = \frac{1}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3\varkappa}-\frac{1}{(3\varkappa)^2}-\frac{1}{(3\varkappa)^3}+\cdot\cdot\right).
\end{aligned}
$$

Schwache Felder, s-Schwingungen:

$$
\begin{aligned}
&\mu' = 1\\
(28\,a)\qquad &\mu'' = \frac{5}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3\varkappa}+\frac{1}{(3\varkappa)^2}-\frac{1}{(3\varkappa)^3}+\cdot\cdot\right)\\
&\mu''' = \varkappa+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3\varkappa}+\frac{1}{(3\varkappa)^2}-\frac{1}{(3\varkappa)^3}+\cdot\cdot\right).
\end{aligned}
$$

Bei Herrn Voigt ist unser $\varkappa$ mit $1/\beta$ resp. γ bezeichnet. Ferner beachte man, daß bei uns die Verschiebung von der Linie D_2 aus, bei Voigt von dem Schwerpunkte von D_1 und D_2 aus gezählt wurde (was einen Unterschied sämtlicher Formeln um $\varkappa/3$ bewirkt), daß wir die Entwickelung um ein Glied weiter geführt und uns vorerst auf die Verschiebung nach der negativen Seite beschränkt haben. Es ergibt sich dann volle Übereinstimmung.

Der Grund, weshalb wir hier nochmals auf diese Entwickelungen zurückkamen, war wesentlich der, zu zeigen, daß die Bestimmung der Frequenzen nicht von der Auflösung einer kubischen, sondern, dank der Rationalität der Wurzel $p_2' = 1$, nur von einer quadratischen Gleichung abhängt[1]). Ferner sei darauf aufmerksam

1) Herr Voigt bemerkt dies nur für die p-Komponenten.

gemacht, daß man die Verschiebung nach der positiven Seite aus der nach der negativen (unsere Formeln (26), (27) und (28)) einfach dadurch erhält, daß man $+\varkappa$ mit $-\varkappa$ vertauscht.

§ 4.

Über die den Partialschwingungen $\xi_\varkappa$ beizulegenden Gewichte.

Die Scheidung der Frequenzfragen von den Intensitätsfragen ist nicht nur, wie sich zeigen wird, bequem; sie kann auch deshalb nützlich sein, weil nach der Prestonschen Regel die Zerlegungen hinsichtlich der Frequenzen für alle Linien einer Serie und verwandter Serien gleich sind, während hinsichtlich der Intensitäten möglicher Weise Verschiedenheiten bestehen können. Füchtbauer[1]) hat kürzlich wahrscheinlich gemacht, daß in den Alkali-Serien die relative Intensität der ursprünglichen Dubletlinien mit der Ordnungszahl gesetzmäßig variiert. Wenn sich dieses bestätigt, würden auch beim Zeeman-Effekt der verschiedenen Dublets Intensitäts-Verschiedenheiten auftreten müssen, bei Gleichheit der Frequenzen. Die Intensitätsfragen wären dann, gegenüber den Frequenzfragen, mehr sekundärer und spezieller Natur (vgl. hierzu indessen § 6, Nr. 6).

Wir wollen uns auf den Standpunkt stellen, daß man unsere bisherigen Variabeln $\zeta_\varkappa$ mit gewissen Gewichten $c_\varkappa$ zu multiplizieren habe, um die für die Ausstrahlung maßgebenden Schwingungsgrößen — wir wollen sie $\xi_\varkappa$ nennen — zu erhalten. Die $c_\varkappa$ brauchen dabei nicht reelle Gewichtszahlen zu sein, sondern können Phasenfaktoren enthalten, also komplex genommen werden. Die Ausstrahlung wird dann durch

$$\sum \xi_\varkappa = \sum c_\varkappa \zeta_\varkappa$$

bestimmt sein. Allerdings sind wir in der Auswahl der $c_\varkappa$ von vornherein sehr beschränkt. Die $c_\varkappa$ müssen nämlich aus energetischen Gründen vom absoluten Betrage 1 sein. Denken wir uns nämlich in unseren Differentialgleichungen (I) oder (II) für $\zeta_\varkappa$ substituiert $\xi_\varkappa / c_\varkappa$, so gehen dieselben über in

$$\text{(III)} \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\xi_\varkappa = \pm \frac{ih}{3}\left(\xi_\varkappa + \frac{c_\varkappa}{c_{\varkappa+1}}\xi_{\varkappa+1} + \frac{c_\varkappa}{c_{\varkappa+2}}\xi_{\varkappa+2}\right).$$

Wir müssen annehmen, daß das Magnetfeld keine Energie auf die Schwingungen übertragen kann[2]). Aus diesem Grunde wurde

---

1) Chr. Füchtbauer und W. Hofmann, Ann. d. Phys. 43, pag. 96, 1914.

1) Vgl. Voigt, Magnetooptik § 60.

oben in Gl. (1) b als konjugiert zu $\overline{b}$ angesetzt. Aus demselben Grunde muß jetzt sein

$$\frac{c_\varkappa}{c_h} \text{ konjugiert zu } \frac{c_h}{c_\varkappa}.$$

Setzen wir vorübergehend $c_\varkappa/c_h = a e^{i\alpha}$, so muß also $a = 1$, das heißt

$$\left|\frac{c_2}{c_1}\right| = \left|\frac{c_3}{c_2}\right| = \left|\frac{c_1}{c_3}\right| = 1$$

sein. Da es nur auf die Verhältnisse der $c_\varkappa$ ankommen kann, können wir jedenfalls $c_1 = 1$ nehmen und haben alsdann

$$c_1 = 1, \quad |c_2| = |c_3| = 1.$$

Um die $c_\varkappa$ vollständig zu bestimmen, fassen wir solche Linien ins Auge, die nach unserer Frequenzgleichung virtuell möglich sind, deren Intensität aber erfahrungsgemäß null ist. Für diese muß $\sum \xi_\varkappa = \sum c_\varkappa \zeta_\varkappa$ verschwinden. Bei Benutzung des allgemeinen Ansatzes (3) muß also für solche Linien sein:

$$(29) \qquad A c_1 + B c_2 + C c_3 = 0,$$

wobei die $A : B : C$ aus den Gl. (I) bez. (II) zu ermitteln sind. Durch dieses Kriterium, auf dessen Schärfe bereits Herr Voigt hinweist (Abh. I pag. 422), werden wir bei den parallelen bez. senkrechten Schwingungen finden

$$(\text{IV}) \qquad \begin{cases} c_1 = c_2 = c_3 = 1, \\ c_1 = 1, \quad c_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad c_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}}. \end{cases}$$

Die vorstehende Bestimmung der $c_\varkappa$ kommt im Effekt darauf hinaus, daß wir bei den parallelen Schwingungen in Gl. (12) $\beta = 0$, bei den senkrechten Schwingungen dagegen in (21) $\beta = \pm 2\pi/3$ wählen. Hätten wir letzteres von vornherein getan, so hätten wir keine besonderen Gewichte einzuführen brauchen. Dann hätten wir aber statt der Gl. (II) die weniger einfache Gl. (III) behandeln und bei der Berechnung der Frequenzen nicht so einheitlich verfahren können.

Wir haben nun zu zeigen, wie wir von der Bedingung (29) aus mit Notwendigkeit zu den Gl. (IV) gelangen.

a) Parallele Schwingungen.

Zunächst haben wir in dem Schema der Fig. 1 die Linie normaler Aufspaltung, Frequenz ν_3 in Gl. (2), deren Intensität verschwinden soll. Ihr entsprechen die Verhältnisse

(30) $$A : B : C = 0 : 1 : -1,$$

wie aus den Gl. (5a) mit $b = b = 1/3$ folgt. Nach (29) müssen wir daher wählen

(31) $$c_2 = c_3.$$

Wie in § 3 gezeigt, ist die Linie normaler Aufspaltung relativ zu D_2 nicht nur bei schwachen, sondern bei beliebigen Feldern virtuell vorhanden: sie wurde dort durch $p_2 = p_2' = 1$ charakterisiert. Nun ergeben sich zufolge des Ansatzes (3) die zu einer bestimmten Frequenz ν gehörigen Verhältnisse $A : B : C$ nach Gl. (I) (und ebenso nach (II)) aus dem Gleichungssystem

(32) $$\begin{cases} p_1 A + B + C = 0, \\ A + p_2 B + C = 0, \\ A + B + p_2 C = 0, \end{cases}$$

dessen Determinante wir in § 3 als Frequenzgleichung untersucht haben. Dasselbe führt mit $p_2 = 1$ und dem zugehörigen Werte von p_1 Gl. (22a) in der Tat auf (30). Hieraus folgt zugleich, daß die Linie normaler Aufspaltung nicht nur für schwache Felder, sondern exakt für alle Felder verschwindet, nachdem einmal die $c_\varkappa$ im Sinne der Gl. (31) gewählt sind.

Bei starken Feldern soll außerdem die Intensität der Linie $p_2 = p_2''$ verschwinden und nur die eine Linie $p_2 = p_2'''$ im Schwerpunkt der ursprünglichen Dublets übrig bleiben. Der Wurzel p_2'' entsprechen nach Gl. (25) und (22a) für starke Felder ($\varkappa \ll 1$) die Werte

$$p_2 = 1 + 2\varkappa, \quad p_1 = 1 - \varkappa.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen von (32) folgt aber stets $B = C$, es sei denn, daß exakt $p_2 = 1$ ist. Ferner hat man nach der ersten Gl. (32) für $p_1 = 1 - \varkappa$ im Limes $\varkappa = 0$: $A = -2B$. Setzt man in (29) ein, so ergibt sich mit Notwendigkeit:

(33) $$c_1 = \frac{1}{2}(c_2 + c_3) = c_2.$$

Da wir den nach (31) und (33) gemeinsamen Wert der $c_\varkappa$ gleich 1 setzen dürfen, können wir sagen:

Bei den parallelen Schwingungen sind die $\xi_\varkappa$ direkt die für die Ausstrahlung maßgebenden Größen; die Gewichte sind sämtlich gleich 1 zu wählen.

b) Senkrechte Schwingungen.

Hier haben wir bei schwachen Feldern keine Linie verschwindender Intensität, also auch keine Bestimmungsgleichung für die $c_\varkappa$. Bei starken Feldern andrerseits wird die Linie doppelt normaler Aufspaltung, μ''' in Gl. (28), von der Intensität Null; ihr entsprechen nach (25) und (22a) bei verschwindendem $\varkappa$ die Werte

$$p_2''' = p_1''' = -2.$$

Setzt man diese in (32) ein, so schließt man leicht

$$A = B = C.$$

Mithin folgt aus (29)

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0. \tag{34}$$

Dies ist bei den senkrechten Schwingungen die einzige Relation zwischen den Gewichten, zu der wir aus der Forderung einzelner verschwindender Intensitäten gelangen können.

Es könnte vielleicht scheinen, daß man zu einer weiteren Relation käme, wenn man von den beiden Linien $p_2' = 1$ und $p_2'' = 1 - 2\varkappa ..$ eine zum Verschwinden brächte. Die erste entspricht einer normalen Aufspaltung gegen D_2, die zweite einer solchen gegen den Schwerpunkt von D_1 und D_2. Wenn man die von Paschen und Back entdeckte Erscheinung als allmähliche Regularisierung und Vereinfachung des Zeeman-Effektes durch starke Felder beschreibt, so meint man damit im Sinne dieser Autoren, daß schließlich nur beiderseits je eine senkrecht schwingende Linie am Orte der normalen Aufspaltung gegen den ursprünglichen Schwerpunkt übrig bleibe. Dieser Meinung entsprechend könnten wir versuchen, die Intensität von $p_2' = 1$ durch Wahl der $c_\varkappa$ zum Verschwinden zu bringen.

Mit $p_2 = p_2' = 1$ folgt aber aus den Gl. (29) und (32), wie oben bei den parallelen Schwingungen gezeigt, mit Notwendigkeit (30) und (31) und weiterhin das Verschwinden der betr. Linie nicht nur bei starken, sondern bei beliebigen Feldern. Es würde also auch in dem Schema der Fig. 1 die zu D_2 gehörige Linie s normaler Aufspaltung verschwinden, was tatsächlich nicht der Fall ist.

Wir könnten andrerseits versuchen, die Linie $p_2'' = 1 - 2\varkappa + \cdots$ zum Verschwinden zu bringen. Auch dies ist unmöglich, denn es würde daraus für schwache Felder das völlige Verschwinden der zu D_1 gehörigen Linie s in dem Schema der Fig. 1 folgen und es müßte sogar ohne magnetisches Feld die Linie D_1 keine s-Schwin-

gungen enthalten, also vollkommen im Sinne der p-Schwingungen polarisiert sein.

Wir kommen also (die Voigtschen Ausgangsgleichungen einmal zugegeben) zu dem Resultat, daß in den Beobachtungen von Paschen und Back die s-Schwingungen keine einfachen Linien, sondern Doppellinien sein müssen; ihr Abstand beträgt (Gl. (28), (24 a) und (11)):

$$(\mu'' - \mu')\frac{h}{2} = \frac{\varkappa}{3}h = \frac{n_2^2 - n_1^2}{3n} = \frac{2}{3}(n_2 - n_1),$$

wie bereits von Herrn Voigt hervorgehoben. Wenn man also den Zeeman-Effekt in starken Feldern schlechtweg als reguläres Triplet bezeichnet, so ist das nicht genau richtig oder, vorsichtiger ausgedrückt, mit der Voigtschen Theorie nicht genau verträglich. Nach dieser handelt es sich vielmehr um eine scharfe parallel schwingende Mittelkomponente und beiderseits um ein senkrecht schwingendes Linienpaar, wobei je eine Linie normale Aufspaltung gegen die Mittelkomponente hat, die andere um $^2/_3$ des ursprünglichen D-Linien-Abstandes von dieser absteht. Es wird sehr interessant sein, diese eigenartige Konsequenz der Voigtschen Theorie an der Erfahrung genauer zu prüfen. Mit den bisherigen Beobachtungen steht sie, wie Herr Voigt wiederholt ausgeführt hat, keineswegs in Widerspruch.

Um nun auch bei den senkrechten Schwingungen die Bestimmung der $c_\varkappa$ zum Abschlusse zu bringen, brauchen wir nur noch zu berücksichtigen, daß nach dem Anfang dieses § notwendig $|c_\varkappa| = 1$ sein muß. Wir setzen

$$c_1 = 1, \quad c_2 = e^{i\alpha}, \quad c_3 = e^{i\beta}$$

und finden aus Gl. (34) sofort

$$\alpha = -\beta = \pm\frac{2\pi}{3}.$$

Hiermit ist Gl. (IV) auch für die senkrechten Komponenten erwiesen.

§ 5.

Berechnung der Intensitäten.

Nach dem Anfange des vorigen § ist die Intensität irgend einer Zeeman-Komponente zunächst gegeben durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} I &= |\xi_1 + \xi_2 + \xi_3|^2 = |c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3|^2 \\ &= |c_1 A + c_2 B + c_3 C|^2. \end{aligned} \tag{35}$$

Da aber vom Emissionsstandpunkte aus nur die Verhältnisse $A : B : C$ bestimmt sind (in unserem Falle durch die Gl. (32)), so müssen wir uns zur Bestimmung der Absolutwerte auf die Statistik berufen. In Analogie zu dem Fundamentalsatz der klassischen Statistik werden wir annehmen, daß im Temperaturgleichgewicht die Energie jedes Freiheitsgrades, und zwar sowohl die kinetische wie die potentielle, im Mittel die gleiche ist. In dieser Form ausgesprochen steht unsere Annahme zugleich im Einklang mit der Quanten-Statistik. Während nämlich nach der klassischen Statistik die mittlere Energie nur von der Temperatur abhängt und gleich $kT/2$ wäre, würde sie nach der Quantenlehre außer von T auch von der betr. Schwingungszahl des Freiheitsgrades abhängen. Die in Betracht kommenden Schwingungszahlen sind aber in unserem Falle äußerst wenig voneinander verschieden, so daß sich auch von hier aus gleiche mittlere Energie für alle Freiheitsgrade ergibt; wir bezeichnen ihren Wert allgemein durch $f(T)$. Als unabhängige Freiheitsgrade haben wir die Eigenschwingungen anzusehen, d. h. jede einzelne optisch wahrnehmbare Linie. Aus Bequemlichkeitsgründen möge die potentielle vor der kinetischen Energie bevorzugt werden. Diese ist

$$V = \frac{m}{2}\{n_1^2|\xi_1|^2 + n_2^2|\xi_2^2|^2 + |\xi_3|^2)|\} = \frac{mn^2}{2}(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2),$$

wenn der hier ganz belanglose Unterschied zwischen den Frequenzen n_1, n_2 und einer mittleren Frequenz n vernachlässigt wird. Beim Übergang zu den ξ und ihren Amplituden A, B, C ergibt sich mit Rücksicht auf $|c_\varkappa|^2 = 1$:

$$V = \frac{mn^2}{2}(|A|^2 + |B|^2 + |C|^2) = f(T). \tag{36}$$

Bei passender Wahl der Einheit für die Intensitätsmessung folgt aus (35) und (36):

$$I = \frac{|c_1 A + c_2 B + c_3 C|^2}{A^2 + B^2 + C^2}. \tag{37}$$

Dieser Ausdruck hängt nur mehr von den Verhältnissen $A : B : C$ ab und ist daher nach (32) vollkommen bestimmt. Da diese Verhältnisse überdies nach (32) reell sind, durften im Nenner die Zeichen des absoluten Betrages unterdrückt werden.

a) Parallele Schwingungen.

Hier ist $c_1 = c_2 = c_3 = 1$. Wir können daher für (37) schreiben:

(38) $$I = \frac{(A + B + C)^2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Aus der ersten Gl. (32) folgt

(39) $$B + C = -p_1 A;$$

also wird der Zähler von I

$$A^2 (1 - p_1)^2.$$

Aus den beiden letzten Gl. (32) ergibt sich $B = C$, es sei denn, daß $p_2 = 1$ ist. Bei $p_2 = 1$ ist aber, wie schon im vorigen § erörtert, allgemein

$$I = 0;$$

dieser Fall kann daher im Folgenden ausgeschlossen werden. Mit Rücksicht auf (39) folgt somit für die beiden anderen Schwingungen:

(39 a) $$B = C = \frac{-p_1}{2} A, \quad B^2 + C^2 = \frac{p_1^2}{2} A^2.$$

Also wird der Nenner von I

$$A^2 (1 + \tfrac{1}{2} p_1^2).$$

Mithin

(40) $$I = \frac{(1 - p_1)^2}{1 + \frac{1}{2} p_1^2}.$$

Zur Vereinfachung der weiteren Ausrechnung kann man hier p_1^2 im Zähler und Nenner mittels der Frequenzgleichung (22) durch p_1 ausdrücken. Setzt man dann für p_1 die aus (24) und (22 a) folgenden Werte ein, so findet man nach leichten algebraischen Umformungen:

(41) $$I = \frac{3}{2}\left(1 \mp \frac{1 + \varkappa/3}{\sqrt{1 + \frac{2}{3}\varkappa + \varkappa^2}}\right).$$

Es läßt sich also auch die Intensität strenge in geschlossener und für die numerische Berechnung bequemer Form ausdrücken. Um den Vergleich mit Herrn Voigt zu erleichtern, geben wir auch die Entwickelungen nach steigenden oder fallenden Potenzen von $\varkappa$ an. Bedeuten I', I'', I''' die zu den Aufspaltungen μ', μ'', μ''' gehörenden Intensitäten, so erhält man leicht:

Starke Felder, $\varkappa$ klein:

$$(42)\qquad \begin{cases} I' = 0 \\ I'' = 2\varkappa\left(\frac{\varkappa}{3} - 2\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^3 + \cdots\right) \\ I''' = 3 - 2\varkappa\left(\frac{\varkappa}{3} - 2\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^3 + \cdots\right). \end{cases}$$

Schwache Felder, $\varkappa$ groß:

$$(42\text{a})\qquad \begin{cases} I' = 0 \\ I'' = 1 - 2\left(\frac{2}{3\varkappa} - \frac{3}{(3\varkappa)^2} - \frac{4}{(3\varkappa)^3} + \cdots\right) \\ I''' = 2 + 2\left(\frac{2}{3\varkappa} - \frac{3}{(3\varkappa)^2} - \frac{4}{(3\varkappa)^3} + \cdots\right). \end{cases}$$

Diese Ausdrücke stimmen mit den Gl. (19) und (33) in Abh. II von Herrn Voigt überein, nur sind unsere Entwickelungen um einige Glieder weitergeführt. Die Intensitäten für die positive Seite ergeben sich aus den hier angeschriebenen (41), (42) für die negative durch Vertauschung von $+\varkappa$ mit $-\varkappa$ (vgl. die entsprechende Bemerkung über die Frequenzen am Schluß von § 3). Die Summe der drei Intensitäten I', I'', I''' ist stets gleich 3 (und zwar in Strenge, vgl. (41)), d. h. gleich der Intensität der ursprünglichen D-Linien, wie es sein muß, da das Magnetfeld „wattlos“ wirkt.

b) Senkrechte Schwingungen.

Wir erledigen zunächst die Frequenz $p_2 = p_2' = 1$ und nennen die zugehörige Intensität wieder I'. Mit $p_2 = 1$ ist, wie bereits in § 4 aus den Gl. (32) geschlossen wurde (s. Gl. (30)) $A = 0$, $B = -C$. Aus (37) folgt daher

$$I' = \frac{1}{2}|c_2 - c_3|^2$$

oder nach den Gl. (IV) wegen

$$c_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad c_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$(43)\qquad I' = \frac{3}{2}.$$

Für die beiden anderen Frequenzen $p_2 = p_2''$ und $p_2 = p_2'''$ ist, vgl. (39a):

$$(44)\qquad B = C = \frac{-p_1}{2} A.$$

Daher wird der Zähler von (37) mit Rücksicht auf (34)

$$A^2\left(1+\frac{p_1}{2}\right)^2.$$

Der Nenner ist wegen (44)

$$A^2\left(1+\frac{p_1^2}{2}\right).$$

Mithin die Intensitäten

$$(45)\qquad \left.\begin{matrix} I'' \\ I''' \end{matrix}\right\} = \frac{\left(1+\frac{p_1}{2}\right)^2}{1+\frac{p_1^2}{2}}.$$

Um die explicite Ausrechnung der Intensitäten zu vereinfachen, kann man wieder p_1^2 nach der Frequenzgleichung (22) durch p_1 ausdrücken; benutzt man dann die Werte von p_1 aus (24) und (22a), so ergibt sich nach leichter algebraischer Umformung:

$$(46)\qquad \left.\begin{matrix} I'' \\ I''' \end{matrix}\right\} = \frac{3}{4}\left(1 \pm \frac{1-\varkappa/3}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\varkappa+\varkappa^2}}\right).$$

Wiederum ist die Intensität strenge in geschlossener Form dargestellt. Auch hier ist, wie es sein muß, die Summe der drei Intensitäten I', I'', I'' gleich 3, also unabhängig von h. Endlich leitet man auch jetzt die Intensitäten für die positive Seite aus den angegebenen, für die negative Seite gültigen, ab durch Vertauschung von $+\varkappa$ mit $-\varkappa$.

Die Übereinstimmung mit den Werten von Herrn Voigt (Abh. II, Gl. (26) und (37)) zeigt sich, wenn wir (46) nach aufsteigenden oder absteigenden Potenzen von $\varkappa$ entwickeln:

Starke Felder, $\varkappa$ klein:

$$(47)\qquad \begin{cases} I' = \frac{3}{2} \\ I'' = \frac{3}{2} - \varkappa\left(\frac{\varkappa}{3} + 2\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^3 + \cdots\right) \\ I''' = \varkappa\left(\frac{\varkappa}{3} + 2\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{\varkappa}{3}\right)^3 + \cdots\right). \end{cases}$$

Schwache Felder, $\varkappa$ groß:

$$(47\text{a})\quad \begin{cases} \Gamma' = \dfrac{3}{2} \\ \Gamma'' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3\varkappa} + \dfrac{3}{(3\varkappa)^2} - \dfrac{4}{(3\varkappa)^3} + \cdots \\ \Gamma''' = 1 - \dfrac{2}{3\varkappa} - \dfrac{3}{(3\varkappa)^2} + \dfrac{4}{(3\varkappa)^3} + \cdots . \end{cases}$$

§ 6.

Ergebnisse und Folgerungen.

1. Die von Herrn Voigt gefundenen Gleichungen für den Zeeman-Effekt des D-Linien-Typus wurden auf eine überraschend einfache Form gebracht, die sich für die parallelen und senkrechten Schwingungen nur durch ein Vorzeichen unterscheidet:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\xi_\varkappa = \pm \frac{ih}{3}\frac{d}{dt}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3);$$

$$\varkappa = 1, 2, 3; \quad h = \frac{e}{m} H.$$

Die Vereinfachung gegenüber der Schreibweise von Herrn Voigt wurde dadurch bewirkt, daß a) das Glied $ih\,d/dt$ von rechts nach links herübergenommen und daß b) bei den senkrechten Schwingungen festgesetzt wurde, daß nicht die $\zeta_\varkappa$ selbst, sondern die hinsichtlich der Frequenzen mit den $\zeta_\varkappa$ übereinstimmenden Variabeln $\xi_\varkappa = c_\varkappa \zeta_\varkappa$ für die Ausstrahlung maßgebend sein sollen. Dabei ergaben sich die „Gewichts-Faktoren“ $c_\varkappa$ einfach zu:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}, \quad c_3 = e^{\frac{4i\pi}{3}}.$$

Bei den parallelen Schwingungen war die Einführung besonderer Gewichte unnötig bez. ergaben sich dieselben nachträglich alle drei gleich 1.

2. Die Einfachheit und Symmetrie dieser Gleichungen ist höchst suggestiv in Hinsicht auf das Problem der Konstruktion eines Atom-Modelles. Dies bemerkt bereits Herr Voigt bei Gelegenheit seiner allgemeinen Hypothese der zyklischen Koppelungen; in erhöhtem Maße gilt es von der hier gegebenen vereinfachten Darstellung für den besonderen Fall der D-Linien-Koppelung. Das Auftreten der dritten Einheitswurzeln als Gewichtsfaktoren scheint auf einen Ring hinzuweisen, in dem drei Elektronen äqui-

distant auf einander folgen. Auch ist es bemerkenswert, daß in die Bewegungsgleichungen für die Variabeln ζ außer dem Ausdrucke links der elementaren Theorie nur noch rechts der Schwerpunkt der drei Variabeln ζ eingeht. Die Zahl 3 spielt in diesen Gleichungen, entsprechend der Rungeschen Regel, die bestimmende Rolle; sie ist der einzige Parameter unserer Gleichungen. Man wird vermuten dürfen, daß bei anderer Atom-Konstruktion und entsprechend geändertem Typus des Zeeman-Phänomens diejenige andere ganze Zahl irgendwie die Rolle der 3 übernehmen wird, die durch die Rungesche Regel ausgezeichnet ist. Vielleicht liefert das phänomenologische Studium des Zeeman-Effektes im Sinne des Herrn Voigt das sicherste Material zum Aufbau der Atomstruktur; das Beispiel der D-Linien läßt in dieser Hinsicht bemerkenswert einfache, zahlentheoretische Gesetzmäßigkeiten erhoffen.

3. Wir konnten zeigen, daß die Emissions-Rechnungen ebenso weit führen, wie die von Herrn Voigt bevorzugte Absorptionsmethode. Um die Intensitäten auch nach der Emissionsmethode zu bestimmen, war es nur nötig, den Fundamentalsatz der statistischen Mechanik (Gleichverteilung der Energie auf die freien Schwingungen) heranzuziehen und zwar nur in solchem Umfange, wie er auch in der Quanten-Statistik Gültigkeit behält. Gegenüber unserer Darstellung ist die Voigtsche Absorptionsbehandlung nur insofern vollständiger, als sie im Prinzip auch die Linienbreite berücksichtigt. Wie sich dieselbe durch ein Dämpfungsglied in die Emissionsbehandlung einfügen läßt, ist hier nicht untersucht.

Durch diese Bemerkungen soll natürlich die Bedeutung der Absorptionsmethode in experimenteller Hinsicht oder in Hinsicht auf die Doppelbrechungsphänomene nicht herabgesetzt werden.

4. Im Einzelnen wäre Folgendes zu bemerken über das Verhältnis der von Herrn Voigt und der von uns gewählten Behandlung:

Nachdem wir den zyklischen Ansatz von Herrn Voigt übernommen hatten, benutzten wir zur Bestimmung der zyklischen Parameter experimentelle Daten zunächst über die Lage der Linien und zwar sowohl solche für starke wie für schwache Felder; außerdem wurde bei der Bestimmung der „Gewichte“, d. h. eigentlich bei der Auswahl zwischen den beiden Möglichkeiten $\beta = 0$ und $\beta = \frac{2\pi}{3}$ das Kriterium verwertet, daß gewisse Linien bei schwachen resp. bei starken Feldern erfahrungsgemäß verschwindende Stärke haben sollten. Dagegen benutzt Herr Voigt

zur Bestimmung der Parameter nur solche Daten, die sich auf schwache Felder beziehen, und zwar neben den Daten über die Lage der Linien auch solche über ein quantitatives Stärkeverhältnis (3 : 1 bei den senkrechten Komponenten).

Die Voigtsche Darstellung hat den Vorteil, daß die Paschen-Backsehen Ergebnisse als notwendige Folgen der Differentialgleichungen erscheinen, während sie von uns teilweise vorweg genommen wurden, um die Koeffizienten der Differential-Gleichungen zu bestimmen. Andrerseits hat unsre Darstellung den Vorteil, daß sie im Wesentlichen nur mit Frequenzdaten, ergänzungsweise mit qualitativen Intensitätsdaten operiert und die etwas un sicheren quantitativen Intensitätsdaten vermeidet. Ich möchte übrigens bemerken, daß dies mehr ein Unterschied in der Darstellung wie in der Sache ist: Auch unsere Emissionsbehandlung läßt sich leicht so abändern, daß sie nur experimentelle Daten für schwache Felder, und zwar in dem gleichen Umfange wie die Voigtsche Absorptionsbehandlung, verwertet.

5. Sowohl die Frequenzen wie die Intensitäten konnten durch geschlossene algebraische Ausdrücke dargestellt werden, die sich gut zur numerischen Rechnung eignen. Dieselben hängen nur von dem Verhältnisse des ursprünglichen D-Linien-Abstandes zu der in Frequenzen gemessenen normalen Aufspaltung $h/2$ ab. Es ist dies dieselbe Größe, durch die ich in meiner ersten Arbeit über den Paschen-Backschen Effekt die Grenzfälle der schwachen und starken Felder definiert habe. Die damalige Behandlung gibt aber nur eine (teilweise) Analogie zu jenen Beobachtungen bei starken Feldern, während die Voigtsche Theorie, mit Beobachtungen von Fortrat an Na 2853 verglichen, bei allen Feldern den Tatsachen entsprechen dürfte. Aus unseren geschlossenen Ausdrücken kann man leicht die Voigtschen Reihenentwickelungen für die Intensitäten und Frequenzen erhalten und vervollständigen.

6. Der Voigtsche Ansatz führt mit Notwendigkeit auf das Verhältnis 1 : 2 der ursprünglichen Intensitäten der Linien D_1 und D_2. Nach der Prestonschen Regel nehmen wir dieselben Gleichungen für die entsprechenden Linien aller Alkalien in Anspruch und sprechen von einem allgemeinen D-Linien-Typus. Wir müßten daher auch bei den anderen Alkalien ein Intensitätsverhältnis 1 : 2 der Dublets erwarten. Dies steht in Widerspruch mit neuen interessanten Messungen von Füchtbauer und Hofmann, auf die in § 4 hingewiesen ist. Ich hatte ursprünglich gemeint, z. B. dem von Füchtbauer gefundenen Intensitätsverhältnis 1 : 3 bei den blauen Cäsiumlinien durch andere Wahl

der Gewichte $c_\varkappa$ Rechnung tragen zu können. Doch scheint dies unmöglich, da die $c_\varkappa$ ihrem absoluten Betrage nach durch eine energetische Forderung festgelegt sind. Die Kenntnis des Zeeman-Effektes dieser Linien wird wichtig sein, um die Tragweite der Voigtschen Gleichungen des D-Linien-Typus zu beurteilen.

Bemerkenswert ist auch der Umstand, daß das Intensitätsverhältnis $I' : I'' = 3 : 1$, Gl. (47a) für die beiden Komponenten von D_2 bei schwachen Feldern aus dem Voigtschen Ansatz der cyklischen Koppelungen mit Notwendigkeit folgt. Wenn, was nach Herrn Voigt nicht ganz ausgeschlossen scheint, die Beobachtung ein etwas anderes Verhältnis ergäbe, so könnten unsere Gleichungen nicht exakt sein. Vielleicht läßt sich eine Abweichung von diesem Verhältnis durch Berücksichtigung des Dämpfungsgliedes erklären.

7. Die größte Schwierigkeit für das physikalische Verständnis der Voigtschen Theorie sehe ich nach wie vor darin, daß sie, um der Tatsache der scharfen Linien gerecht zu werden, gezwungen ist, ihre Differentialgleichungen nicht auf das (im Dampf beständig seine Orientierung wechselnde) Molekül, sondern auf das Feld zu beziehen. Eine merkliche Einstellung des Moleküls durch das Feld ist bei den wirklichen Dampftemperaturen statistisch kaum zu verstehen (vgl. den letzten § meiner eingangs zitierten Arbeit). Man müßte denn an eine magnetische Einstellung nicht des ganzen Moleküls, sondern eines sehr wenig trägen Elektronenringes denken. Die Tatsache der scharfen Linien veranlaßte seinerzeit Lorentz, nur zwischen Elektronen der gleichen Eigenfrequenz Koppelungen zuzulassen. Die neuen Erscheinungen von Paschen und Back beziehen sich aber wesentlich auf die gegenseitige Einwirkung und Verschmelzung verschiedener Frequenzen (Dublets und Triplets). Indem wir uns hier ganz auf den Boden der Voigtschen Theorie stellten, haben wir uns mit diesen Schwierigkeiten nicht auseinandergesetzt, sondern wir haben sie sozusagen hinwegdefiniert, dadurch, daß wir für die parallelen und senkrechten Komponenten verschiedene und von verschiedenen Eigenfrequenzen abhängige, aber in sich völlig bestimmte Differentialgleichungen ansetzten, die keine Andeutung enthalten von einer wechselnden Orientierung des Dampfmoleküles im Felde. Dies ist natürlich kein Einwand gegen diese Gleichungen (denn die Tatsachen verlangen zu ihrer Darstellung gerade Gleichungen dieses Charakters), sondern ein Hinweis darauf, daß unsere Auffassung der Atomvorgänge, die jenen Gleichungen zugrunde liegen, noch mangelhaft ist.

Neben dieser Hauptschwierigkeit ist eine andere im Ansatz unserer Differentialgleichungen auftretende Eigentümlichkeit viel-

leicht mehr äußerlicher Natur: Das Glied $i h d\zeta/dt$ entspricht in der bekannten komplexen Schreibweise nach Richtung und Größe der Biot-Savartschen Kraft, wenn $\zeta = x + iy$ die zum Magnetfelde senkrechten Koordinaten komplex zusammenfaßt. In unseren Differentialgleichungen aber kommt dieses Glied nicht nur bei den senkrechten Komponenten vor, wo es zu erwarten ist, sondern auch bei den parallelen Komponenten, wo es keine unmittelbare physikalische Bedeutung hat. Auch dieser Umstand, der übrigens nur bei unserer formal vereinfachten Schreibweise der Voigtschen Gleichungen auftritt, weist auf den von Herrn Voigt oft betonten einstweilen phänomenologischen Charakter seiner Gleichungen hin. Je mehr wir dieselben aber vereinfachen, um so eher können wir erwarten, zu ihrem wirklichen Verständnis und damit zu einem gewissen Einblick in die zugehörigen Atomvorgänge zu gelangen. Hierzu einen Beitrag zu liefern, war die Absicht der vorstehenden Erörterungen.

Ergänzungsrelationen für Kreisbogen-N-Ecke.

Von

Hans Falckenberg.

Aus einem Briefe an Herrn F. Klein; vorgelegt in der Sitzung vom 9. Mai 1914.

Vorbemerkung: Die im folgenden kurz skizzierte Methode zur Aufstellung der Ergänzungsrelationen des einfach zusammenhängenden Kreisbogen-N-Ecks, deren genaue Durchführung in meiner demnächst erscheinenden Braunschweiger Habilitationsschrift enthalten ist, schließt sich an die von Herrn Hilb[1]) in seinem Karlsruher Referat gegebenen Andeutungen an.

1. Kontinuierliche Abänderung eines einfach zusammenhängenden Kreisbogen-N-Ecks ($N > 3$): Aus dem Zusammenhang zwischen Kreisbogen-N-Ecken und linearen Differentialgleichungen folgt die Tatsache, daß man jedes einfach zusammenhängende Kreisbogen-N-Eck ($N > 3$) unter Beibehaltung sämtlicher Winkel kontinuierlich so abändern kann, daß eine Seite eine vorgegebene Länge besitzt. Insbesondere kann man es so einrichten, daß eine Seite sich gerade voll überschlägt.

2. Abtrennung einer sich gerade voll überschlagenden Seite: Durch den Prozeß der „Abtrennung einer sich gerade voll überschlagenden Seite", der dem von Klein eingeführten Prozeß der „lateralen Anhängung von Kreisscheiben"[2]) sehr nahe verwandt ist, gelingt es das Kreisbogen-N-Eck auf ein Kreisbogen-$(N-1)$-Eck zu reduzieren. Die wesentliche Eigenschaft des Gebietes einfach zusammenhängend zu sein bleibt hierbei

1) Vergl. Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung Bd. 21, S. 165.

2) Vergl. „Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion", Leipzig 1906, S. 419.

erhalten, sofern wir an der betreffenden Ecke des Kreisbogen-$(N-1)$-Ecks einen geeigneten Windungspunkt einführen. War die Anzahl der vollen Überschlagungen gleich u und die Winkel des ursprünglichen N-Ecks an der Abtrennungsstelle gleich $\lambda_\varkappa \pi$ und $\lambda_{\varkappa+1}\pi$, so haben wir im $(N-1)$-Eck am Windungspunkt den Winkel $(\lambda_\varkappa + \lambda_{\varkappa+1} + 2u - 1)\pi$.

3. Ergänzungsrelationen des Vierecks: Unter Überschlagungszahl einer Seite verstehe ich die Anzahl der überschrittenen vollen Überschlagungen dieser Seite und bezeichne sie bezw. mit $u_{12}, u_{23}, u_{34}, u_{41}$. Ich ändere nach 1. das Kreisbogenviereck mit den Winkelzahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ solange unter Beibehaltung sämtlicher Winkel kontinuierlich, bis zum ersten Male eine Seite sich gerade voll überschlägt und trenne dann nach 2. diese Seite ab. Auf das so erhaltene Dreieck wende ich die hierfür bekannten Ergänzungsrelationen [1] an. Ist nun die Seite (1, 2) die sich gerade voll überschlagende, so erhalte ich:

$$
\begin{aligned}
u_{23} &= E\left\{\frac{\lambda_4 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{2} - u_{12} + \varepsilon\right\}^{2)}\\
(1)\qquad u_{34} &= E\left\{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4}{2} + u_{12} - \varepsilon + 1\right\}\\
u_{41} &= E\left\{\frac{\lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_1 - \lambda_2}{2} - u_{12} + \varepsilon\right\}.
\end{aligned}
$$

Im allgemeinen werden Vierecke existieren sowohl für $\varepsilon = 0$ als auch für $\varepsilon = 1$; in speziellen Fällen entweder für $\varepsilon = 0$ oder für $\varepsilon = 1$. Eine leichte Umrechnung ergibt, daß die Relationen in Übereinstimmung mit Herrn Ihlenburg und Herrn Hilb [3]) stets dann gelten, wenn bekannt ist, daß die Seite (1, 2) sich wirklich überschlägt.

4. Ergänzungsrelationen des N-Ecks. Wie ich aus den Ergänzungsrelationen des Dreiecks diejenigen des Vierecks erhalte, so ergeben die des Vierecks diejenigen des Fünfecks u. s. f. Schließlich gelingt es immer von den Ergänzungsrelationen des $(N-1)$-Ecks zu denen des N-Ecks aufzusteigen, sofern mir von mindestens $N-3$ Seiten bekannt ist, daß sie sich wirklich überschlagen. Seien die Seiten $(\varrho, \varrho+1)$; $(\sigma, \sigma+1)$; $(\tau, \tau+1)$ diejenigen,

---

1) Klein: „Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe", Math. Annalen, Bd. 37, S. 573.

2) $E(x)$ = größte positive ganze Zahl unter x, für $x \leqq 1$ Null.

3) Ihlenburg: „Über die geometrischen Eigenschaften der Kreisbogenvierecke", Dissertation Göttingen 1909.

über deren Überschlagungszahl nichts bekannt ist, und bezeichnen wir ihre Überschlagungszahlen mit $u_{\varrho,\varrho+1}$; $u_{\sigma,\sigma+1}$; $u_{\tau,\tau+1}$, so gelten, falls ich nur weiß, daß sämtliche übrigen Seiten sich wirklich überschlagen, folgende 3 Ergänzungsrelationen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} u_{\varrho,\varrho+1} &= E\left\{\sum_{\mu}(\pm k_{\mu,\mu+1}) + \frac{1-\lambda_\varrho-\lambda_{\varrho+1}+\sum\limits_{\nu_1}(\pm\lambda\nu_1)}{2}\right\} \\ u_{\sigma,\sigma+1} &= E\left\{\sum_{\mu}(\pm k_{\mu,\mu+1}) + \frac{1-\lambda_\sigma-\lambda_{\sigma+1}+\sum\limits_{\nu_2}(\pm\lambda\nu_2)}{2}\right\} \\ u_{\tau,\tau+1} &= E\left\{\sum_{\mu}(\pm k_{\mu,\mu+1}) + \frac{1-\lambda_\tau-\lambda_{\tau+1}+\sum\limits_{\nu_3}\pm\lambda\nu_3)}{2}\right\} \end{aligned}$$

dabei ist

$$k_{\mu,\mu+1} = u_{\mu,\mu+1} + \frac{1}{2} - \varepsilon_{\mu,\mu+1}$$

und, da $\varepsilon_{\mu,\mu+1}$ den Wert 0 oder 1 annehmen kann:

$$k_{\mu,\mu+1} = u_{\mu,\mu+1} \pm \frac{1}{2}$$

wobei $k_{\mu,\mu+1}$ im allgemeinen beide Werte, in speziellen Fällen, die nur eintreten können, wenn

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=N}(\pm\lambda_\nu) = 2g \quad (g \text{ ganze Zahl})$$

ist, nur einen der beiden Werte annehmen kann. Die Summen $\sum\limits_{\nu_1}$ bezw. $\sum\limits_{\nu_2}$ bezw. $\sum\limits_{\nu_3}$ sind über alle ν_1 bezw. ν_2 bezw. ν_3 von 1 bis N zu erstrecken außer über $\varrho, \varrho+1$ bezw. $\sigma, \sigma+1$ bezw. $\tau, \tau+1$, die Summe $\sum\limits_{\mu}$ über alle μ von 1 bis N außer über ϱ, σ, τ (NB. $N+1$ ist gleich 1 zu setzen!). Die Vorzeichen in den einzelnen Relationen sind unter Berücksichtigung der Vorzeichen von $\lambda_\varrho, \lambda_{\varrho+1}$ bezw. $\lambda_\sigma, \lambda_{\sigma+1}$ bezw. $\lambda_\tau, \lambda_{\tau+1}$ so zu bestimmen, daß die $k_{\mu,\mu+1}$ dieselben Vorzeichen tragen wie die λ_μ bezw. $\lambda_{\mu+1}$. Außerdem treten die zu aneinander angrenzenden N-Ecksseiten gehörigen $k_{\mu,\mu+1}$, soweit sie in den Relationen vorkommen, mit gleichem Vorzeichen auf. Alle Größen, deren Vorzeichen durch diese Festsetzung nicht bestimmt ist, müssen mit positivem Vorzeichen eingesetzt werden.

5. Ein Fundamentalsatz: Die Relationen (1), ursprünglich Ergänzungsrelationen eines Dreiecks, müssen als solche stets für zwei der Zahlen u_{23}, u_{34}, u_{41} den Wert 0 ergeben; da nun die

Ergänzungsrelationen des Fünfecks aus solchen des Vierecks entstanden sind, so erhalte ich auch hier stets für mindestens zwei Überschlagungszahlen den Wert 0; schließlich werden auch in den Relationen (2) stets zwei der Überschlagungszahlen $u_{\varrho,\varrho+1}$; $u_{\sigma,\sigma+1}$; $u_{\tau,\tau+1}$ den Wert 0 annehmen und wir erhalten den Satz: „In jedem einfach zusammenhängenden Kreisbogen-N-Eck sind mindestens zwei Seiten vorhanden, die sich nicht selbst überschlagen". Diesen Satz kann man auch unabhängig von den Ergänzungsrelationen rein oszillationstheoretisch beweisen.

6. Anwendungen: Die Ergänzungsrelationen gestatten eine genauere Diskussion der möglichen Gestaltungen der Kreisbogenpolygone; insbesondere gelingt es leicht notwendige Bedingungen für das Vorhandensein von N-Ecken mit weniger als $N-3$ sich selbst überschlagenden Seiten aufzustellen.

Schlußbemerkung: In einem zweiten Teil meiner Abhandlung gebe ich eine geometrische Interpretation und Ableitung der von Hurwitz [1]) angegebenen Zahlen für die Anzahl der komplexen Nullstellen der hypergeometrischen Reihe; in einem dritten übertrage ich die Methode, die Hurwitz zur Berechnung dieser Zahlen angibt, unter der Voraussetzung der Kenntnis der Ergänzungsrelationen auf Differentialgleichungen mit mehr als 3 singulären Stellen.

---

1) „Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe". Math. Annalen Bd. 64, S. 517.

Erlangen, im April 1914.

Über ein Problem aus dem Gebiet der Diophantischen Approximationen.

Von

Hermann Weyl (Zürich).

Vorgelegt von Herrn F. Klein in der Sitzung vom 13. Juni 1914.

Eine reelle Zahl α mod. 1 reduzieren (ihren Bruchteil absondern) heißt: diejenige Zahl (α) im Einheitsintervall $0 \leqq x < 1$ aufsuchen, die sich von α um eine ganze Zahl unterscheidet. Allgemeiner: Im Raum von q Dimensionen entsteht durch Reduktion eines Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$ mod. 1 derjenige Punkt im „Einheitswürfel“ $0 \leqq x_1, x_2, \ldots, x_q < 1$, dessen Koordinaten sich von denen des gegebenen Punktes um ganze Zahlen unterscheiden. Ist eine unendliche Folge von Punkten im Raum von q Dimensionen gegeben: $P_1, P_2, P_3, \ldots$, so wird man sagen, ihre Reduzierten mod. 1 erfüllten den Einheitswürfel überall gleichmäßig dicht, wenn im Durchschnitt auf jedes gleichgroße Gebiet desselben gleichviele dieser Punkte entfallen, d. h. wenn die Anzahl derjenigen unter den n ersten reduzierten Punkten $(P_1), (P_2), \ldots, (P_n)$, welche in ein beliebiges Teilstück[1]) des Einheitswürfels (vom Volumen V) hineinfallen, asymptotisch für $\lim n = \infty$ durch $V.n$ gegeben ist. Von den Herren Bohl, Sierpinski und mir[2]) ist 1909/10 ziemlich gleichzeitig bewiesen worden, daß für jede Irrationalzahl ξ die Reihe der mod. 1 reduzierten ganzzahligen Vielfachen von ξ:

$$(n\xi) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

---

1) Man kann sich übrigens darauf beschränken, für dieses Teilstück irgend ein parallel den Koordinatenaxen orientiertes Parallelepipedon zu nehmen.

3) Bohl, Crelles Journal Bd. 135, S. 222; Sierpinski, Krakau Ak. Anz. Januar 1910, S. 9; Weyl, Rend. Circ. Mat. Palermo Bd. 30, S. 406.

das Einheitsintervall überall gleich dicht bedeckt, und Herr Bohl zog daraus insbesondere wichtige Folgerungen betreffs der mittleren Bewegung der Perihel- und Knotenlängen in einem 3-Planeten-System[1]). Wollte man hier über die Zahl von 3 Planeten hinauskommen, so mußte man jenen zahlentheoretischen Satz auf mehrere simultan zu betrachtende Irrationalzahlen verallgemeinern. Er lautet z. B. für zwei solche, ξ und η, zwischen denen keine ganzzahlige lineare Relation besteht: Die reduzierten Punkte $(n\xi, n\eta)$ $\{n = 1, 2, 3, \ldots\}$ liegen im Einheitsquadrat überall gleich dicht. Für diese mehrdimensionalen Fälle, für welche die ursprünglichen (im wesentlichen übereinstimmenden) Beweise von Bohl, Sierpinski und mir versagten, habe ich (vor ungefähr einem Jahre) in einem Vortrag in der Göttinger Math. Gesellschaft einen, die Exponentialfunktion $e^{2\pi i x}$ (die Fouriersche Reihe) benutzenden Beweis gegeben, dessen Prinzip ich kurz auseinandersetzen will.

Bleiben wir aber zunächst beim eindimensionalen Problem stehen! Reelle Zahlen mod. 1 betrachten, heißt: die Zahlgerade auf einen Zahlkreis vom Umfange 1 aufrollen, oder analytisch gesprochen: der reellen Zahl x die komplexe $e^{2\pi i x} = e(x)$ auf dem Einheitskreise zuordnen; in der Tat ist ja $e(x)$ die analytische Invariante der Zahlklassen mod. 1. Will man von einer Zahlenfolge $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ zeigen, daß die aus ihren Reduzierten bestehende Folge das Einheitsintervall überall gleichmäßig dicht bedeckt, so genügt es festzustellen, daß für jede feste ganze Zahl $m \neq 0$ und unbegrenzt wachsendes n die Limesgleichung

$$1) \qquad \sum_{h=1}^{n} e(m\alpha_h) = o(n)$$

besteht. Daraus nämlich wird sich ergeben, daß für jede beschränkte, Riemannisch integrierbare Funktion $f(x)$ von der Periode 1 die Gleichung

$$2) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} f(\alpha_h) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

zutrifft, in der unsere Behauptung enthalten ist, da man für f insbesondere diejenige Funktion im Einheitsintervall nehmen kann, die nur in einer Teilstrecke desselben $\neq 0$ und zwar $= 1$ ist. Die Voraussetzung 1) ist nichts Anderes als die Gleichung 2) für die spezielle Funktion $f(x) = e(mx)$. Da Gl. 2) selbstverständlich

---

1) Vgl. auch F. Bernstein, Math. Ann. Bd. 71, S. 417 ff.

zutrifft, wenn f identisch $= 1$ ist, ergibt die Annahme 1) also die Gültigkeit von 2) für jede abbrechende trigonometrische Reihe. Daraus folgt 2) für jede periodische Funktion f, zu der sich zwei abbrechende trigonometrische Reihen f_1, f_2 finden lassen, die f zwischen sich enthalten ($f_1 \leqq f \leqq f_2$) und deren Mittelwerte $\int_0^1 f_1(x)\,dx$, $\int_0^1 f_2(x)\,dx$ sich beliebig wenig voneinander unterscheiden. Zu diesen Funktionen f gehören aber einmal alle stetigen Funktionen (die ja durch endliche trigonometrische Reihen gleichmäßig approximiert werden können), dann auch alle stückweise konstanten und darum schließlich alle beschränkten, Riemannisch integrierbaren Funktionen. Ist die Zahlenfolge α_n insbesondere diese:

$$3) \qquad \lambda_1 \xi,\ \lambda_2 \xi,\ \lambda_3 \xi,\ \ldots$$

und soll bei gegebenen λ gezeigt werden, daß für jede Irrationalzahl ξ die mod. 1 reduzierten Zahlen 3) das Einheitsintervall gleichmäßig dicht überdecken, so genügt es sogar, das Bestehen der Gleichung 1) allein für $m = 1$ darzutun, d. h. zu zeigen, daß für jede irrationale Zahl ξ

$$4) \qquad \sum_{h=1}^{n} e(\lambda_h \xi) = o(n)$$

ist. Denn dann bestehen ohne weiteres auch die sämtlichen Gleichungen 1), da mit ξ auch immer $m\xi$ eine irrationale Zahl ist. Wenn die Folge der λ mit der lückenlosen Reihe der natürlichen Zahlen übereinstimmt, gilt aber diese Gleichung 4) in der Tat, da

$$\left|\sum_{h=1}^{n} e(h\xi)\right| = \left|\frac{e((n+1)\xi) - e(\xi)}{e(\xi) - 1}\right| \leqq \frac{2}{|e(\xi)-1|} = \frac{1}{|\sin \pi\xi|}$$

sogar unterhalb einer von n unabhängigen Grenze bleibt. — Es ist klar, daß dieses Prinzip sich auf zwei und mehr Dimensionen übertragen läßt. Um z. B. für eine gegebene Punktfolge (α_n, β_n) im zweidimensionalen Falle zu zeigen, daß die Reduzierten das Einheitsquadrat gleichmäßig dicht anfüllen, genügt es, das Bestehen der Gleichung

$$\sum_{h=1}^{n} e(r\alpha_h + s\beta_h) = o(n)$$

für alle Paare ganzer Zahlen r, s, die nicht beide $= 0$ sind, darzutun.

Damals habe ich diese Überlegungen nicht publiziert, weil mir kurz darauf Herr H. Bohr einen elementaren, d. h. die Exponential-

funktion nicht benutzenden Beweis des in Frage stehenden Satzes mitteilte, der mir noch einfacher erschien[1]). Freilich erkannte ich sogleich, daß meine Methode andere Probleme ähnlicher Art zu erledigen gestatte, die der Bohr-Rosenthalschen Argumentation nicht zugänglich sind; diejenigen Fälle beispielsweise, in denen $\lambda_n = n^2$ oder n^3 oder irgend eine andere Potenz von n ist. Ich komme jetzt auf diese Dinge zurück, weil ich durch eine jüngst erschienene Arbeit (Acta Mathematica Bd. 37 (1914), S. 153—190) darauf aufmerksam geworden bin, daß sich auch die Herren Hardy und Littlewood mit den gleichen Fragen beschäftigt haben. In der erwähnten Abhandlung zeigen sie nur, daß in den letztgenannten Fällen ($\lambda_n = n^2$ u. s. w.) die reduzierten Punkte überall dicht liegen; es wird aber das schärfere Gesetz von der gleichmäßigen Verteilung erwähnt und sein Beweis für eine folgende Arbeit in Aussicht gestellt. Dieses Resultat ist, wie ich aus dem Kongreßbericht ersehe, von den beiden Autoren auch in Cambridge (1912) ausgesprochen worden. Da der von mir eingeschlagene Weg nicht nur einfacher zu sein scheint als der (bisher nur zum Teil publizierte) Hardy-Littlewood'sche (den sie selbst als „intrikat“ bezeichnen), sondern auch weiter trägt (s. unten), möchte ich ihn hier mitteilen. Ich beweise vor allem:

Satz 1[2]). Ist

$$\varphi(z) = \alpha z^q + \alpha_1 z^{q-1} + \cdots + \alpha_q$$

irgend ein Polynom mit reellen Koeffizienten, von denen der erste, α, irrational ist, so gilt die Abschätzung[3])

$$5) \qquad \sigma_n \equiv \sum_{h=0}^{n} e(\varphi(h)) = o(n);$$

mit dem Zusatz:

Die Limesgleichung 5) besteht bei festem α gleichmäßig für alle Werte der Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$.

1) Der Grundgedanke des Bohr'schen Beweises ist der gleiche, mittels dessen kürzlich Herrn A. Rosenthal der Aufbau der Gastheorie auf Grund der „Quasiergodenhypothese“ gelungen ist (Annalen der Physik, 4. Folge, Bd. 43 (1914), S. 894—904).

2) Diesen Satz erwähnen für $\varphi(z) = \alpha z^q$ auch die Herren Hardy und Littlewood; ja die Frage nach dem Verhalten der Reihen $\sum e^{in^2x}$, $\sum e^{in^3x}, \ldots$ hat gerade den Ausgangspunkt ihrer Untersuchung gebildet. [Während des Drucks dieser Note ist eine weitere Abhandlung der beiden Autoren erschienen (Acta Bd. 37, S. 193 ff.), die sich mit der Reihe $\sum e^{in^2x}$ befaßt.]

3) Übrigens geht aus dem Satz 1 selber hervor, daß diese Abschätzung auch dann noch gültig ist, wenn α rational, aber dann wenigstens einer der Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-1}$ irrational ist.

Da mit $\varphi(z)$ auch $m.\varphi(z)$ $\{m$ irgend eine ganze Zahl $\neq 0\}$ ein Polynom von der gleichen Beschaffenheit wie $\varphi(z)$ selber ist, schließen wir aus Satz 1 auf Grund des ausgesprochenen allgemeinen Prinzips:

Satz 2. Die Reihe der mod. 1 reduzierten Zahlen

$$(\varphi(n)) \quad \{n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

verteilt sich gleichmäßig dicht über das Einheitsintervall.

Hier gilt ein entsprechender Zusatz über die Gleichmäßigkeit dieser Limesaussage mit bezug auf die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$.

Ist ξ irgend eine irrationale Zahl, so ergibt sich aus 5) ferner:

$$\sum_{h=0}^{n} e\left((m_1 h + m_2 h^2 + \cdots + m_q h^q)\xi\right) = o(n)$$

für jedes System von ganzen, nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_q$. Daraus können wir schließen:

Satz 3. Sind

$$a_i, b_i \qquad (0 \leqq a_i < b_i \leqq 1; \quad i = 1, 2, \ldots, q)$$

irgend q Teilstrecken des Einheitsintervalls je von der Länge $c_i = b_i - a_i$, so beträgt die Anzahl derjenigen unter den Zahlen $h = 0, 1, 2, \ldots, n$, für welche die sämtlichen Ungleichungen

$$a_1 \leqq (h\xi) \leqq b_1, \quad a_2 \leqq (h^2\xi) \leqq b_2, \ \ldots, \ a_q \leqq (h^q\xi) \leqq b_q$$

bestehen, asymptotisch $c_1 c_2 \ldots c_q . n$ für $\lim n = \infty$. ξ ist dabei eine beliebige Irrationalzahl.

Bis zu diesem Ergebnis scheinen auch die Herren Hardy und Littlewood gelangt zu sein; sie beschäftigen sich mit solchen Folgen $\lambda_n \xi$, in denen λ_n in seiner Abhängigkeit von n als ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten gegeben ist. Wir können hier jedoch sofort die Übertragung auf mehrere simultan zu betrachtende, etwa p Irrationalzahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ vornehmen, zwischen denen keine ganzzahlige lineare Relation besteht, und erhalten ein von Herren Hardy und Littlewood nur vermutungsweise ausgesprochenes allgemeines Theorem (von dem sie sagen, sein Beweis scheine sehr schwierig zu sein):

Satz 4. Gegeben p Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$, zwischen denen keine ganzzahlige lineare Relation besteht, und qp Teilstrecken a_{ji}, b_{ji} $(i = 1, 2, \ldots, p; \ j = 1, 2, \ldots, q)$ des Einheitsintervalls; diejenigen unter den Zahlen $h = 0, 1, 2, \ldots, n$, für welche die sämtlichen Unglei-

chungen

$$\begin{array}{llll} a_{11} \leqq (h\xi_1) \leqq b_{11}, & a_{12} \leqq (h\xi_2) \leqq b_{12}, & \ldots, & a_{1p} \leqq (h\xi_p) \leqq b_{1p} \\ a_{21} \leqq (h^2\xi_1) \leqq b_{21}, & a_{22} \leqq (h^2\xi_2) \leqq b_{22}, & \ldots, & a_{2p} \leqq (h^2\xi_p) \leqq b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} \leqq (h^q\xi_1) \leqq b_{q1}, & a_{q2} \leqq (h^q\xi_2) \leqq b_{q2}, & \ldots, & a_{qp} \leqq (h^q\xi_p) \leqq b_{qp} \end{array}$$

bestehen, sind asymptotisch in der Anzahl

$$n \cdot \prod_{i=1}^{p} \prod_{j=1}^{q} (b_{ji} - a_{ji})$$

vorhanden (für $\lim n = \infty$).

Man kann sogar behaupten, daß dieses asymptotische Gesetz gleichmäßig mit bezug auf die sämtlichen Intervalle (a_{ji}, b_{ji}) gültig ist. Auch ist man leicht imstande, die Modifikationen zu überblicken, die eintreten, falls die Zahlen ξ_i durch eine oder mehrere ganzzahlige Relationen miteinander verknüpft sind. — Der Beweis des Satzes 4 ergibt sich einfach daraus, daß für irgend qp ganze Zahlen m_{ji}, die nicht sämtlich verschwinden,

$$\sum_{h=0}^{n} e\left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} m_{ji} h^j \xi_i\right) = o(n)$$

ist; denn das Argument von e, das in dieser Gleichung auftritt, ist ein Polynom $\varphi(h)$ von der in Satz 1 angenommenen Beschaffenheit.

Bevor ich zum Beweise von Satz 1 übergehe, zeige ich:

Satz 5. Ist $\mathfrak{K}$ irgend ein ganz im Endlichen gelegener Körper im q-dimensionalen Raum mit bestimmtem Volumen V, so gibt es unter den sämtlichen $n_q (\sim V . n^q)$ mod. 1 reduzierten Zahlen

$$(r_1 r_2 \ldots r_q . \xi),$$

welche man erhält, wenn man für $\mathfrak{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_q)$ der Reihe nach alle n_q Gitterpunkte einsetzt, die dem Körper $n\mathfrak{K}$[1]) angehören, asymptotisch für $\lim n = \infty$ im ganzen $c . n_q$, die in der Teilstrecke ab des Einheitsintervalls von der Länge $c = b - a$ liegen.

Ich führe den Nachweis der Richtigkeit dieses Satzes für denjenigen Fall durch, für welchen wir ihn hernach benötigen: $\mathfrak{K}$ sei

---

1) Unter $n\mathfrak{K}$ verstehe ich denjenigen Körper, der aus $\mathfrak{K}$ durch Dilatation im Verhältnis $1 : n$ vom Nullpunkte aus entsteht.

ein „Oktaëder"[1]), die in $n\mathfrak{K}$ gelegenen Gitterpunkte $\mathfrak{r}$ also charakterisiert durch

$$|\mathfrak{r}| = |r_1| + |r_2| + \cdots + |r_q| \leqq n. \tag{6}$$

Für $q = 1$ ist der Satz richtig (s. oben). Ich wende den Schluß von $q-1$ auf q an. Gemäß unserm allgemeinen Prinzip handelt es sich darum einzusehen, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n_q} \sum_{\mathfrak{r}} e(r_1 r_2 \ldots r_q \xi) = 0 \tag{7}$$

ist. Ich summiere zunächst nach r_q, dann nach den übrigen r, schreibe also $\sum\limits_{\mathfrak{r}} = \sum\limits_{\mathfrak{r}'} \sum\limits_{r_q}$; die äußere Summation erstreckt sich über alle Gitterpunkte $\mathfrak{r}' = (r_1, r_2, \ldots, r_{q-1})$ im Raum von $q-1$ Dimensionen, die dem „Oktaëder" $n\mathfrak{K}'$:

$$|\mathfrak{r}'| = |r_1| + |r_2| + \cdots + |r_{q-1}| \leqq n$$

angehören, und r_q durchläuft in der inneren Summe die sämtlichen ganzen Zahlen des durch

$$|r_q| \leqq n - |\mathfrak{r}'|$$

gegebenen Intervalls. Es ist also immer

$$\Big|\sum_{r_q}\Big| \leqq 2n+1, \quad \Big|\sum_{r_q}\Big| \leqq \frac{1}{|\sin \pi\xi R|} \quad (R = r_1 r_2 \ldots r_{q-1}). \tag{8}$$

ε sei eine beliebig kleine positive Zahl. Die Anzahl derjenigen unter den n_{q-1} Zahlen $R\xi$, welche mod. 1 zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ liegen, beträgt asymptotisch $2\varepsilon n_{q-1}$ für $n = \infty$ (wie aus unserm für $q-1$ als gültig angenommenen Satze hervorgeht); sie ist also für hinreichend große n gewiß $< 3\varepsilon . n_{q-1}$. Für diese $R\xi$ wenden wir die erste der Ungleichungen 8) an; für die übrigen liefert die zweite jener Abschätzungen:

$$\Big|\sum_{r_q}\Big| \leqq \frac{1}{\sin \pi\varepsilon} < \frac{1}{2\varepsilon},$$

und wir finden

$$\Big|\sum_{\mathfrak{r}}\Big| \leqq n_{q-1}\left\{3\varepsilon(2n+1) + \frac{1}{2\varepsilon}\right\}.$$

---

1) In diesem Falle ist übrigens

$$n_q = 2^q\binom{n}{q} + 2^{q-1}\binom{n}{q-1}\binom{q}{1} + 2^{q-2}\binom{n}{q-2}\binom{q}{2} + \cdots + 1;$$

doch kommt es auf den genauen Wert von n_q nicht weiter an.

Da $n_q \sim \frac{(2n)^q}{q!}$, so ergibt sich hieraus

$$\limsup_{n=\infty} \frac{1}{n_q} \left|\sum_{\mathfrak{r}}\right| \leq 3\varepsilon q,$$

und 7) ist bewiesen.

Hat man statt des Oktaëders einen beliebigen Körper $\mathfrak{K}$, so wird es gut sein, diesen zunächst durch eine parallel den Koordinatenaxen orientierte Würfelpackung von innen und außen zu approximieren (wie das bei der Definition des Volumens geschieht). Es genügt dann, den Beweis für eine solche Würfelpackung zu erbringen. Das gelingt nun auf genau die gleiche Weise wie für das Oktaëder, da die Projektion einer q-dimensionalen Würfelpackung auf einen der $(q-1)$-dimensionalen Koordinatenräume eine $(q-1)$-dimensionale Würfelpackung ergibt (das ermöglicht den Induktionsschluß) und jede Parallele zu einer der Koordinatenaxen die Würfelpackung nur in einer beschränkten Anzahl getrennter Strecken trifft. — Natürlich gilt ein dem Satz 5 entsprechender auch für mehrere simultane Irrationalzahlen ξ.

Jetzt gehe ich zum Beweis von Satz 1 über, den wir als die gemeinsame Quelle der Sätze 2, 3, 4 erkannt haben. Ich bilde

$$|\sigma_n|^2 = \sigma_n \bar{\sigma}_n = \sum_{h=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} e^{2\pi i \varphi(h)} \cdot e^{-2\pi i \varphi(k)} = \sum_{h,k} e(\varphi(h) - \varphi(k)).$$

Ich setze $h = k + r$; dann wird

$$\varphi(h) = \varphi(k+r) = \varphi(k) + r\varphi(r, k).$$

$\varphi(r, k)$ ist eine ganze rationale Funktion von k und r, die nur Glieder $(q-1)$ter oder niederer Ordnung enthält; in ihrem Ausdruck kommt der Koeffizient α_q nicht mehr vor; die Entwicklung nach fallenden Potenzen von k beginnt mit dem Term $q\alpha k^{q-1}$. Wir haben also jetzt

$$|\sigma_n|^2 = \sum_r \sum_k e(r\varphi(r, k)).$$

Der Summationsbereich wird beschrieben durch:

$$0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq k + r \leq n.$$

r durchläuft also das ganze Intervall von $-n$ bis $+n$, und in der inneren Summe durchläuft k für jedes solche r die sämtlichen ganzen Zahlen des Intervalls von 0 bis $n - |r|$ oder von $|r|$ bis n, je nachdem $r \geq 0$ oder $r \leq 0$ ist. Verwenden wir das Zeichen n_q für $q = 1, 2, \ldots$ in der gleichen Bedeutung wie im Beweise von Satz 5 (für die Anzahl der dem q-dimensionalen oktaëdrischen

Bereich 6) angehörigen Gitterpunkte), so erhält man aus der letzten Gleichung mit Hülfe der Schwarz'schen Ungleichung:

$$|\sigma_n|^4 \leqq n_1 \sum_r \Big| \sum_k e(r\varphi(r, k)) \Big|^2.$$

Nunmehr wiederhole ich das Verfahren. Es ist

$$\Big| \sum_k e(r\varphi(r, k)) \Big|^2 = \sum_{k, l} e(r\varphi(r, k) - r\varphi(r, l)).$$

Wiederum schreibe ich

$$k = l + s, \quad \varphi(r, k) = \varphi(r, l+s) = \varphi(r, l) + s\varphi(r, s, l).$$

Die ganze rationale Funktion $\varphi(r, s, l)$ von r, s und l enthält nur Glieder der Ordnung $\leqq q-2$ und beginnt bei der Entwicklung nach absteigenden Potenzen von l mit dem Term $q(q-1)\alpha . l^{q-2}$; die Koeffizienten α_q, α_{q-1} kommen nicht mehr vor. Im gegenwärtigen Stadium ist

$$|\sigma_n|^4 \leqq n_1 \sum_{r, s} \sum_l e(rs\varphi(r, s, l)).$$

(r, s) durchläuft hier das zweidimensionale „Oktaëder" $|r| + |s| \leqq n$ und l dasjenige Intervall, welches aus dem oben geschilderten Summationsintervall von k entsteht, wenn man hinten oder vorn $|s|$ Zahlen abstreicht, je nachdem $s \geqq 0$ oder $s \leqq 0$ ist. Die Schwarzsche Ungleichung liefert

$$|\sigma_n|^8 \leqq n_1^2 n_2 \sum_{r, s} \Big| \sum_l e(rs\varphi(r, s, l)) \Big|^2.$$

Es ist klar, wie sich dies Verfahren fortsetzt. Um es bis zu Ende durchzuführen, benutze ich statt der Zeichen $r, s, \ldots$ jetzt lieber $r_1, r_2, \ldots$ und statt $h, k, l, \ldots$ die Zeichen $h_1, h_2, h_3, \ldots$:

$$h_1 = r_1 + h_2, \quad h_2 = r_2 + h_3, \quad \ldots, \quad h_{q-1} = r_{q-1} + h_q.$$

Für h_q schreibe ich noch t. Durch sukzessive Differenzenbildung ist aus der gegebenen Funktion $\varphi(h_1)$ schließlich

$$\varphi(r_1, r_2, \ldots, r_{q-1}; t) = q!\,\alpha t + (\beta_0 + \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \cdots + \beta_{q-1} r_{q-1})$$

geworden, wo sich die konstanten Koeffizienten β aus den beiden ersten Koeffizienten von $\varphi(z)$ in einer Weise berechnen, die uns hier nicht weiter interessiert. Führe ich folgende Abkürzungen ein:

$$R = r_1 r_2 \cdots r_{q-1}, \quad \varrho = R(\beta_0 + \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \cdots + \beta_{q-1} r_{q-1}), \quad \xi = q!\,\alpha,$$
$$Q = 2^{q-1}, \quad N = (n_1)^{2^{q-3}} (n_2)^{2^{q-4}} \cdots n_{q-3}^2 n_{q-2},$$

so kommt schließlich die Ungleichung

$$|\sigma_n|^\varrho \leqq N \sum_{\mathfrak{r}'} \left\{ e(\varrho) \sum_t e(R\,\xi\,t) \right\}$$

zustande, in welcher $\mathfrak{r}' = (r_1, r_2, \ldots, r_{q-1})$ das Oktaëder $|\mathfrak{r}'| \leqq n$ durchläuft, t aber ein von $\mathfrak{r}'$ abhängiges zusammenhängendes Intervall von $n+1-|\mathfrak{r}'|$ ganzen Zahlen $\{$welches dadurch aus $(0, n)$ entsteht, daß man der Reihe nach $(i = 1, 2, \ldots, q-1)$ jedesmal $|r_i|$ Zahlen hinten oder vorn abstreicht, je nachdem $r_i \geqq 0$ oder $\leqq 0$ ist$\}$.

Wir finden wie im Beweis von Satz 5 für die innere Summe

$$|\sum_t| < \frac{1}{2\varepsilon}$$

für alle $\mathfrak{r}'$, für die $R\xi$ mod. 1 nicht zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ liegt. Solcher $\mathfrak{r}'$, welche dieser Voraussetzung nicht genügen, gibt es nach Satz 5 für hinreichend großes n gewiß weniger als $3\varepsilon \,.\, n_{q-1}$; für diese benutzen wir die rohe Abschätzung $|\sum_t| \leqq n+1$. Dann haben wir also

$$|\sigma_n|^\varrho \leqq N \,.\, n_{q-1} \left\{ 3\varepsilon\,(n+1) + \frac{1}{2\varepsilon} \right\}.$$

Für N hat man eine asymptotische Formel

$$N \sim \varkappa \,.\, n^{\varrho - q}$$

(in der $\varkappa$ eine nur von q abhängige Konstante bezeichnet). Mithin schließen wir aus der letzten Ungleichung

$$\limsup_{n=\infty} \left| \frac{\sigma_n}{n} \right|^\varrho \leqq \frac{\varkappa \,.\, 2^{q-1}}{(q-1)!} \cdot 3\varepsilon,$$

und der Beweis ist beendet.

Zum Schluß erwähne ich noch den folgenden

Satz 6. *Sind die λ_n irgend eine Reihe wachsender ganzer Zahlen, so liegt die Folge*

$$(\lambda_1\,\xi),\ (\lambda_2\,\xi),\ (\lambda_3\,\xi),\ \ldots \tag{9}$$

im Einheitsintervall überall gleichmäßig dicht für alle Zahlen ξ, die nicht einer gewissen Ausnahmemenge vom Maße 0 angehören.

Er kann durch sehr primitive mengentheoretische Schlüsse auf Grund der Gleichung

$$\int_0^1 \left| \sum_{h=1}^n e(\lambda_h x) \right|^2 dx = n$$

hergeleitet — und übrigens auch auf nicht-ganzzahlige λ übertragen werden, wenn man nur annimmt, daß das Wachstum von λ als Funktion des Index nicht gar zu langsam ist; es genügt in dieser Hinsicht z. B. vorauszusetzen, daß λ um mindestens 1 wächst, wenn der Index von n bis $n + \frac{n}{(\lg n)^2}$ ansteigt. Die Herren Hardy und Littlewood haben hiervon im Teil 1.4 der Acta-Abhandlung den speziellen Fall bewiesen, in welchem $\lambda_n = a^n$ (a eine ganze positive Zahl) ist, während sie für beliebige (auch nicht ganzzahlige) λ zeigen, daß die Folge 9), wenn nicht überall gleich dicht, so doch überall dicht liegt — immer abgesehen von Zahlen ξ einer gewissen Ausnahmemenge vom Maße 0.

Zürich, den 24. Mai 1914.

[Zusatz. Auf Zusendung der Korrekturbogen hin war Herr Hardy so freundlich mir mitzuteilen, daß er und Herr Littlewood Satz 1 vollständig, nicht nur für $\varphi(z) = az^q$ bewiesen, hingegen Satz 3 nur vermutet haben. Über die in Satz 6 angeschnittene Frage wird Herr Towler, ein Schüler der Herren Hardy und Littlewood, dieser Tage in den Londoner Proceedings eine Note publizieren. — 4. Juli 14.]

Seismische Registrierungen in Göttingen im Jahre 1910.

Von

L. Geiger.

Vorgelegt von Herrn Wiechert in der Sitzung am 7. Februar 1914.

Vergleichende Studien über Erdbebenwellen, die in letzter Zeit im hiesigen Institut ausgeführt worden sind, haben die Beteiligten (E. Wiechert, G. Angenheister, L. Geiger) belehrt, daß das bisherige Göttinger System nicht mehr ausreicht. Es wurde deshalb vom Verfasser nach eingehenden Besprechungen mit E. Wiechert das bisherige Symbolsystem erweitert. Bei den Wechselwellen besteht bei Spezialuntersuchungen das Bedürfnis, die zeitliche Aufeinanderfolge der longitudinalen und transversalen Wellen im Symbol zum Ausdruck zu bringen, während man in andern Fällen darüber nichts zu sagen weiß. Es ergaben sich dabei ganz analog den chemischen Symbolen Konstitutions- und Summenformeln.

I. Charakter:

I = merklich, II = auffallend, III = stark.
d = (domesticus) = Ortsbeben (am Orte fühlbar).
v = (vicinus) = Nahbeben (unter 1000 km).
r = (remotus) = Fernbeben (1000—5000 km).
u = (ultimus) = sehr fernes Beben (über 5000 km).

II. Phasen:

	früher
P = Longitudinalwelle, direkt	P
PR_1 = „ , 1 mal reflektiert } I. Vorläufer	PR_1
PR_2 = „ , 2 „ „ } I. Vorläufer	PR_2
etc.	etc.
S = Transversalwelle, direkt	S
SR_1 = „ , 1 mal reflektiert } II. Vorläufer	SR_1
SR_2 = „ , 2 „ „ } II. Vorläufer	SR_2
etc.	etc.
PRS, SRP = PS = Wechselwellen, 1 mal reflektiert	PS
PRPRS, PRSRP, SRPRP = PPS = Wechselwellen, 2 mal reflektiert	fehlt
PRSRS, SRPRS, SRSRP = PSS = Wechselwellen, 2 mal reflektiert	fehlt
etc.	fehlt
Eventuell erhalten die Formeln der Reflexionen den Index in (= internus) oder ex (= externus), wenn zwischen innerer und äußerer Reflexion unterschieden werden soll, z. B: PR_1 in, SR_2 ex.	fehlt
L = Lange Wellen	L
M = Maximum der langen Wellen	M
L rep 1 } = Lange Wellen resp. deren Maximum, die die Station über den Gegenpunkt erreichen	fehlt
M rep 1 } = Lange Wellen resp. deren Maximum, die die Station über den Gegenpunkt erreichen	M rep I
L rep 2 } = Lange Wellen resp. deren Maximum, die über Station, Gegenpunkt, Herd die Station zum 2. mal erreichen	fehlt
M rep 2 } = Lange Wellen resp. deren Maximum, die über Station, Gegenpunkt, Herd die Station zum 2. mal erreichen	M rep II
F (= finis) = Ende	F
i (impetus), e (emerisio) } wird in extremen Fällen vor die Phasensymbole gesetzt, kann aber bei völlig unverständlichen Wellen auch als selbständiges Phasensymbol auftreten. Mehrere solche Phasen werden ohne Entscheidung über Natur u. Weg der Wellen mit i, i′ . . .	i, i . . .
resp. e, e′ . . . bezeichnet	e, e . . .
? = „fraglich“, wird hinter das betreffende Symbol gesetzt	(Symbol)
$[\text{Symbol}]_n$ = zur Unterscheidung n superponierter Beben	fehlt

III. Zeit und Maß.

Zeit = mittlere Greenwicher, gezählt von Mitternacht bis Mitternacht. Bei wichtigen Wellen wird der mutmaßliche relative Zeitfehler der Diagrammablesung als ± n Sekunden hinzugefügt.

μ = Mikron = $^1/_{1000}$ Millimeter.

IV. Perioden und Amplituden:

T = Periode = Dauer einer Doppelschwingung in Sekunden.

A_E = Amplitude der E.W.-Komponente der wahren Bodenbewegung in μ.

A_N = Amplitude der N.S.-Komponente der wahren Bodenbewegung in μ.

A_Z = Amplitude der Vertikal-Komponente der wahren Bodenbewegung in μ.

Es wird stets die maximale Amplitude einer Phase gemessen. Im allgemeinen entsprechen deshalb die Amplitudenwerte nicht den danebenstehenden Zeiten. Nach den Beschlüssen der intern. seism. Ass. sind die Amplituden von der Ruhelinie aus zu messen:

a) bei sinusförmigen Phasen mißt man die Amplitude von der relativen Mittellage aus; dies gilt auch für superponierte sinusförmige Schwingungen;

b) bei impulsförmigen Phasen mißt man die Amplitude von der verlängert gedachten Ruhelinie aus; vor die Werte der Amplituden wird dann i gesetzt.

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Jan. 1	II u	P	11 14 6	6	3	0,6	4½	Herd 8600 km E-W-lich.
		S	24 1	22	18	12	15	
		PS	24,7	20	35	15	16	
		SR_1	29 bis 31	13	7½	6½	6½	
		eL	34					
		M_1	58	25	65	40	65	
		M_2	12 4½	16	30	17	30	
		M rep 1	13 39 bis 1 43	18	1¾	1¾	—	
		F	14½					
„ 6	I	i	20 7 42	4	—	—	2	Vertikalseismometer. Das 1200 kg-Pendel hat nicht registriert.
		i	8 35	4	—	—	1⅓	
„ 8	I	L	11 4 bis 11	21	4	5	—	Der Anfang des Bebens fällt in den Papierwechsel.
„ 8	I	e	15 18½	17	1¼	—	—	
		eL	27					
		M	32	18	35	50	10	
		F	16¼					
„ 15	I	L	23 11 bis 32	17	1⅔	3	—	Aus der mikroseism. Bewegung tauchen einige lange Wellen auf.
„ 20	I	eL	18 8					
		M	19	14	1¾	1	—	
		F	18¾					
„ 21	I v	e	0 57 55	½	—	0,03	—	17 000 kg-Pendel. Bergwerkseinsturz bei Hausham. Göttingen—Hausham = 445 km.
		iP?	58 12	½	—	0,1	—	
		eS?	56	¾	—	0,05	—	
		M	59,3	1	—	0,1	—	
		F	1 1					
„ 22	III r	iP	8 53,2	{ 4	—	—	i 120	Herd 2300 km von Göttingen, vermutl. nördl. von Island.
				{ 15	25	50	—	
		iS	56 50	22	275	250	190	
		M	9 5½	18	400	900	350	
		F	10 30					
„ 23	I u	P	19 0 23	5	2½	—	1¾	Herd 7400 km.
		S	9 20	12	13	10	2¾	
		M	27½	21	22	15	25	
		F	21¼					
„ 28	I	eL	18 7					
		M	11	12	2⅔	4	2¾	
		F	18½					
„ 28/29	I v	iP	23 59 44	¾	—	0,1	—	Herd 750 km. In Agram, Krain und Untersteiermark gefühlt.
		eS?	0 1 7	1	0,7	0,4	0,6	
		M	17	{ 1½	—	6	—	
				{ 9	20	—	45	
		F	8					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)			T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h	m	s	s	μ	μ	μ	
Jan. 29	Iv	P	0	13	48	$\frac{3}{4}$	—	0,05	—	Herd 750 km. In Agram, Krain und Unt. Steiermark gefühlt.
		S?		15	9	1	0,7	0,2	0,6	
		M		16,2		$1\frac{3}{4}$	—	2,0	—	
						10	13	$8\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2}$	
		F		25						
„ 29	I	L	4	12 bis 26		14	$1\frac{1}{4}$	1	—	
„ 29	I	eL	6	2						Mikroseismische Bewegung verdeckt die Vorläufer.
		M		19		21	$3\frac{3}{4}$	5	9	
		F	$7\frac{1}{4}$							
„ 30	I	eP	4	5,5		5	0,6	0,3	$1\frac{1}{2}$	Herd ca. 15000 km.
		PR_1		10,5		5	2	$6\frac{1}{2}$	2	
		eS		18		18	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{3}{4}$	10	
		SR_1		30,4		14	$5\frac{1}{2}$	3	4	
		SR_2		37		22	7	12	10	
		SR_3		41		17	4	3	6	
		eL		50						
		M_1	5	$25\frac{1}{2}$		20	13	15	30	
		M_2		34		17	12	5	20	
		F	$7\frac{1}{4}$							
Febr. 2	I	e′	11	6,7		4	—	—	0,3	
		e″		16,9		14	0,9	0,7	—	
		eL		34						
		M_1		41		22	$8\frac{1}{2}$	6	—	
		M_2		46		14	$1\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	2	
		F	$12\frac{3}{4}$							
„ 3	Iu	e?	17	3		7	0,8	0,8	0,5	Übergelagerte mikroseismische Bewegung macht die Analyse der Vorläufer sehr unsicher.
		e′		8,5		7	1	?	$2\frac{1}{3}$	
		e″		26		30	12	?	—	
		e‴		34		19	2	3	—	
		eL		57						
		M_1	18	20		25	5	$5\frac{1}{2}$	—	
		M_2		24		21	$2\frac{2}{3}$	?	—	
		M_3		29		19	2	$3\frac{1}{2}$	—	
		F	19							
„ 4	Iu	$[iP]_1$	14	19	54	5	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	i : 7	2 superponierte Beben. 1. Herd 2000 km von Apia.
		e		33		18	$2\frac{1}{2}$	3	3	
		e′		37		21	2	$3\frac{2}{3}$	9	
		e″		42		30	9	12	—	
	Die Maximalbewegung ist vom folgenden Beben überlagert									
„ 4	Iu	$[iP]_2$	15	0	7	8	?	?	$5\frac{1}{3}$	2. Herd 1800 km von Apia. M_1 bis M_5 gehören teils dem 1. teils dem 2. Beben an.
		eL	15							
		M_1		7		39	23	23	—	
		M_2		21		24	12	12	20	
		M_3		26		20	14	14	17	
		M_4		51		16	$4\frac{1}{2}$	3	5	
		M_5	16	2		17	$6\frac{1}{2}$	5	12	
		F	$17\frac{1}{2}$							

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Febr. 4	Iu	$[iP]_1$	17 56 34	5	2	$1^1/_2$	$5^1/_2$	2 superponierte Beben 1. Herd 1900 km von Apia.
		eL	18 41					
		M_1	44	39	15	10	—	
		Ein Teil der Maximalbewegung ist vom folgenden Beben überlagert						
„ 4	Iu	$[iP]_2$	18 52 34	4	1	?	$2^2/_3$	2. Herd 1700 km von Apia.
		M_2	19 7	18	3	$3^2/_3$	$6^1/_2$	
		M_3	13	18	3	3	3	
		M_4	26	16	$2^1/_2$	3	$2^1/_2$	
		M_5	58	18	$1^1/_2$	$3^2/_3$	$6^1/_2$	
		F	21					
„ 7	I	i	6 42 5	1	—	0,2	—	17 000 kg-Pendel. Im Semmering-Gebiete gefühlt.
		F	44					
„ 10	I	e	8 42					
		M	51	16	5	$6^1/_2$	13	
		F	9,0					
„ 12	IIu	$[iP]_1$	18 22 3	5	$2^1/_2$	$2^1/_2$	6	2 superponierte Beben 1. Herd 8400 km 2. Herd 8100 km.
		$[iP]_2$	23 22	5	$4^1/_2$	$3^1/_2$	$5^1/_2$	
		$[iPR1]_1$	25 22	4	$6^1/_2$	4	i: 12	
		$[iPR1]_2$	26,5	5	3	3	$2^1/_2$	
		$[S]_1$	31 44	14	40	13	20	
		$[S]_2$	39,8	17	15	9	30	
		$[iSR1]_1$	37 38	10	i: 15	$4^1/_2$	3	
		eL	55					
		M_1	19 3	12	10	17	14	
		M_2	6	12	20	12	17	
		F fällt in den Papierwechsel						
„ 13	I	e	17 11	?	?	?	—	Das Beben ist von starker mikroseismischer Bewegung überlagert.
		e'	21	24	8	$7^1/_2$	—	
		M	27	19	$5^1/_2$	9	10	
		F	$17^3/_4$					
„ 18	Ir	iP	5 13 32	4	9	15	i: 13	Die absoluten Zeiten dieses Bebens sind auf ca. $\pm 0,2^m$ unsicher, weil die Zeitmarken fehlen. Herd 1950 km N-S-lich; auf Kreta gefühlt.
		S	16 51	6	25	25	10	
		M	21	9	20	13	10	
		F	$5^3/_4$					
„ 23	I	e	7 56					
		M	59	13	3	4	10	
		F	8,2					
„ 27	I	eL	15 11					
		M	24	14	8	7	8	
		F	$15^3/_4$					
„ 28	I	i_1	21 10 42	8	—	—	$3^1/_2$	Das Beben ist von starker mikroseismischer Bewegung überlagert.
		i_2	20 49	14	6	4	—	
		eL	36					
		M	48	17	10	8	18	
		F	$22^1/_4$					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
März 6	I	e	18 59					
		M	19 10	9	1	1¼	0,8	
		F	19⅓					
„ 11	I	eL	7 37					
		M	43	18	1	2	—	
		F	8					
„ 19	I	e	0 33,5	18	1½	—	—	
		eL	44					
		M	58	15	4½	3½	4½	
		F	2					
„ 22	I	eL	2 12					In Saloniki gefühlt.
		M	16	7	2¼	3	2	
		F	22					
„ 24	Ir	P	14 38 26	¾	?	0,1	?	In Steiermark gefühlt. 17 000 kg-Pendel.
		S?	39 20	¾	?	0,2	?	
		eL	32					
		M	54	1½	?	1	?	
		F	43					
„ 25	I	eP	15 42,6	8	0,5	0,3	2	
		S	51 41	8	2	1	1¼	
		eL	16 5					
		M	22	21	7	4½	15	
		F	18					
„ 25	I	eL	19 20					
		M	31	14	1¼	1	—	
		F	42					
„ 30	IIu	iP	17 15 26	5	6	7½	15	Herddistanz ca. 14 300 km. Nach den Beobachtungen von Samoa, Manila und Zi-ka-wei liegt der Herd etwa bei 2° s. u. 177° ö. Gr. 18h 15m 31s ist im Vertikalpendel ein neuer Stoß zu sehen.
		PR_1	18,9	18	5	7½	25	
		S?	31½	21	4	8	15	
		SR_1?	37	17	3	5½	6	
		M_1	18 14	24	10	45	60	
		M_2	20	21	12	35	20	
		M_3	26	21	18	35	30	
		F	20½					
„ 31	Iu	eP	18 38,6	6	—	—	0,7	
		S	49,4	14	1	3½	4	
		SR_1	55½	21	5	9	—	
		eL	19 10					
		M_1	23	19	25	40	50	
		M_2	26	19	15	40	45	
		F	21					
April 1	I	L	14 48 bis 15 13	21	1½	2⅔	—	

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
April 1	I	L	16 28 bis 59	18	1½	2	—	
„ 2	I	e	12 28 52					
		M	29 4	5	—	2½	—	17 000 kg-Pendel.
		F	31					
„ 3	I	L	19 50 bis 20 22	18	1½	1¼	—	
„ 8	I u	P	16 53 46	5	1¼	2½	6½	
		e	57,4	5	0,6	1¼	1¼	
		e′	59,8	5	0,3	—	0,6	
		e″	17 16	18	2	1	—	
		M	18 6	21	4	2½	5	
		F	19					
„ 9	I	L	10 2 bis 27	15	1	1¼	—	
„ 9	I	e	11 48					
		M	57	9	1¼	1½	—	
		F	12 4					
„ 9	I	L	13 27 bis 39	21	1½	1	—	
„ 11	I	e	8 40					
		M	43½	11	5½	9	5	
		F	59					
„ 12	III u	iP	0 34 25	5	20	7½	30	Herd 9000 km.
		iPR_1	37 40	6	10	6	12	
		iS	44 32	12	90	90	30	
		ePS	45½	17	90	60	50	
		M	1 16	12	65	40	55	
		F	3					
„ 13	I	e	7 24					
		M	29	19	1½	1½	—	
		F	54					
„ 16	I	e	12 53					
		M	13 40	21	4	5½	4½	
		F	14¼					
„ 17	I u	ePR_1?	1 4,7	7	—	—	0,5	Herd ca. 12 000 km.
		eS?	12,9	10	1	0,7	—	
		ePS?	14,6	14	1½	3	8	
		eSR_1?	20½	14	1¼	2	—	
		eSR_2?	25	14	0,6	1¾	—	
		eSR_3?	30½	14	—	0,7	—	
		eL	38					
		M	45	23	10	15	10	
		F	3½					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
April 20	I	L	13½ bis	14	0,9	1	—	
			14¾					
„ 20	Iu	i	22 41 9	1	0,3	0,3	1¼	
		i'	42 30	5	1½	2	10	
		e	50,9	9	1	1¾	—	
		M	23 18	18	1½	2	—	
		F	24,0					
„ 22	I	eL	7 14					$6^h\ 44^m\ 21^s$ zeigt das Vertikal-
		M	19½	12	2	2	4½	pendel eine plötzliche Ver-
		F	7¾					setzung von 2,1 Mn.
„ 26	I	L	12 19 bis	8	1	0,8	2½	Vielleicht nur mikroseismische
			26					Bewegung.
„ 26	I	L	14,7 bis					Vielleicht nur mikroseismische
			15,5	10	1	1	4	Bewegung.
„ 27	Iu	eP	1 36,5	5	0,6	—	0,6	
		e PR_1	40,5	5	0,9	—	0,3	
		S	47 11	21	5½	8	4½	
		M	2 13	23	10	7	15	
		F	4					
Mai 1	Iu	iP	18 50 11	14?	2½	4	i : 60	
		eL	19 40					
		M_1	54	19	7½	15	10	
		M_2	57	21	12	15	9	
		M_3	20 0	20	10	15	15	M_3 folgen noch eine Reihe
		F	21½					schwächerer relativer Maxima.
„ 4	I	L	18 39 bis					
			19	12	0,5	1	—	
„ 5	I	e	0 50,7	7	0,6	0,5	—	
		eL	1 5					
		M_1	7	19	1	5	—	
		M_2	19	18	3½	2½	—	
		F	2					
„ 6	I	L	12 43 bis	14	1	1½	—	
			56					
„ 9	I	e	10 34					
		M	50	14	2½	3	—	
		F	11,2					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Mai 10	I	e	14 39½					NS-Comp. hat nicht geschrieben.
		M	51	14	2	?	6	
		F	15 10					
„ 10	I	L	15 58 bis 16 30	17	1¼	1	—	
„ 10	I	L	17 10 bis 35	15	0,3	0,8	—	
„ 10	I	P	18 7 20	6	0,3	0,6	0,7	
		e	15	8	1	0,8	—	
		e′	17	12	1	2	6	
		eL	39					
		M	47½	21	6	6	9	
		F	20					
„ 11	I	P	15 58 53	3	1	0,3	?	
		M	16 17	7	0,6	0,8	?	Z-Pendel hat versagt.
		F	35					
„ 11	Iv	e	20 19 56	—	—	—	?	17 000 kg-Pendel.
		e′	20 30	1	—	0,2	?	Z-Pendel hat versagt. Im Semmering-Gebiet und in Wien gefühlt.
		M	21,1	1	3½	3	?	
		F	28					
„ 12	I	eL	4 4					
		M	18	12	1¼	1¼	3	
		F	35					
„ 13	Iu	eP	8 9,4	9	0,8	2½	5½	Der Papierwechsel fällt in eL.
		S	19,1	10	5	7½	4	
		M	57½	17	8	15	15	
		F	11¼					
„ 15	I	e	16 23,9	6	0,6	0,3	1	
		e′	29½	10	0,5	0,2	—	
		i	33 19	9	0,8	0,5	0,8	
		eL	58					
		M	17 7	36	7	9		
		F	17½					
„ 18	Iu	iP	9 10 41	6	0,3	0,6	1⅓	Herddistanz ca. 6700 km.
		S	18,9	14	0,9	2	—	
		eL	30					
		M	42	14	4½	3½	2	
		F	11					
„ 20	Iu	eP	12 16,2	3	—	—	0,3	Vertikalpendel.
		eS	26,7	23	3	3½	—	Herddistanz ca. 9700 km.
		ePS	28,1	22	4	4	6	
		eSR₁	32,8	21	7	2	—	
		eSR₂	36,4	23	3	2	—	
		eL	45					
		M	55	18	5	3	7	
		F	14					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Mai 21	I	iP	7 50 13	3	?	?	2	Vertikalpendel, das Uhrwerk
		M	59 1/2	15	?	?	7	des 1200 kg-Pendels war
		F	8 1/4					stehen geblieben.
„ 22	II u	iP	6 36 7	12	4 1/2	8	45	Herddistanz 8700 km.
		iS	46 3	13	10	15	20	
		e SR_1	51.9	30	30	40	10	
		e SR_2	55,9	18	12	15	10	
		e SR_3	57,1	18	12	15	20	
		eL	7 3					
		M_1	9	21	120	45	140	
		M_2	13 1/2	18	60	55	20	
		M_3	14 1/2	15	50	35	20	
		M_4	17	14	45	65	17	
		M_5	18 1/2	16	60	45	10	
		F	10					
„ 23	I u	P	18 58 25	5	0,6	0,6	0,9	Herddistanz 8600 km.
		S	19 8,2	9	0,8	0,7	—	
		eL	25					
		M	34	17	5	4 1/2	3	
		F	20 3/4					
„ 26	I v	i	6 13 19	1/4	—	0,05	—	17000 kg-Pendel.
		S	47	1/2	—	0,1	—	Im schweizer Jura gefühlt.
		M	14 19	1	0,3	0,8	0,3	
		F	17					
„ 27	I	eL	12 4					
		M	9	14	3 2/3	7	2	
		F	12 3/4					
„ 27	I	L	13 58 bis 15 1/4	?	—	—	—	Spur langer Wellen.
„ 28	I u	P	6 32 14	4	0,3	0,3	0,5	Vertikalpendel.
		S	41 19	7	0,3	1 1/3	—	Herddistanz 7700 km.
		e SR_1	45.4	10	0,2	0,7	—	
		eL	47					
		M_1	7 3	21	4	2	—	
		M_2	7	14	1	3	2	
		F	8					
„ 29	I	e	0 10					
		M	16	17	1 1/4	3	3	
		F	0 2/3					
„ 30	I	e	12 55					
		M	13 1	14	0,6	3 1/2	—	
		F	13 1/4					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)			T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h	m	s	s	μ	μ	μ	
Mai 31	Iu	iP	5	8	24	6	2	1	3	Herddistanz 9600 km.
		e PR_1		11,8		6	5	$1^1/_4$	$4^1/_2$	
		e S		19,1		14	9	5	6	
		e PS		20,1		16	9	5	8	
		e SR_1		24,5		21	10	7	9	
		e SR_2		28,2		18	3	2	3	
		e L		31						
		M		55		17	35	23	30	
		F	8							
Juni 1	Iu	$[iP]_1$	6	15	6	5	$4^1/_2$	5	10	$[iP]_1$ u. $[iP]_2$ nach dem Vertikalpendel. 2 superponierte Beben. Beide Herddistanzen ca. 16 500 km.
		$[eL]_1$	7	0						
		$[iP]_2$		8	47	5	$4^1/_2$	5	15	
		$[M]_1$		13		27	13	20	30	
		$[M]_2$	8	6		27	10	15	25	
		F	$9^1/_2$							
„ 3	I	e	4	38						
		M		40		10	0,5	$1^1/_4$	—	
		F		51						
„ 7	IIr	e	2	6,5		6	—	—	0,4	Zerstörendes Beben in Calitri, Prov. Avellino (Italien).
		e S		8,9		7	0,8	3	$1^1/_2$	
		e L		$9^1/_2$						
		M		11,1		10	50	35	40	
		F	3							
„ 7	I	e	15	24						
		M		35		12	0,5	0,8	$5^1/_2$	
		F		45						
„ 9	Iu	P	12	1	2	4	—	—	0,3	
		S		11,4		19	3	4	—	
		SR_1		17,3		20	3	3	—	
		e L		34						
		M		40		20	$3^1/_2$	7	4	
		F	$13^1/_2$							
„ 10	I	e	15	55	8					17 000 kg-Pendel.
		i			29	1	—	0,5	—	
		M			35	1	—	0,7	—	
		F		$56^3/_4$						
„ 12	I	e	15	51		7	—	—	$1^1/_2$	
		M		57		9	0,8	1	3	
		F	$16^1/_4$							
„ 12	Ir	iP	20	41	30	4	0,3	0,3	0,8	Herddistanz 2200 km.
		S		45	15	6	0,9	0,9	0,7	
		e L		48						
		M		49		12	$2^1/_2$	$2^3/_4$	3	
		F	$21^1/_4$							

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Juni 13	I	e	2 7					
		M	13	17	$1^1/_2$	$1^1/_2$	3	
		F	$2^1/_2$					
„ 14	I	e	16 42					
		M	54	17	0,8	0,5	—	
		F	17					
„ 14	I u	P	19 48 30	3	1	0,3	0,8	Herddistanz 5700 km.
		PR_1	50,3	8	0,8	0,3	$1^1/_4$	
		S	55 49	19	$1^1/_4$	$1^1/_2$	15	
		SR_1	59,3	19	$2^1/_2$	$4^1/_2$	$7^1/_2$	
		e L	20 2					
		M	$7^3/_4$	17	15	20	15	
		F	$21^1/_2$					
„ 16	III r	P	4 20 28	6	1,2	2	$2^1/_4$	In Almeria (Andalusien) gefühlt.
		S	23,7	17	5	$5^1/_2$	6	
		e L	24					
		M_1	$26^3/_4$	14	120	80	110	
		M_2	$27^3/_4$	10	85	90	100	
		F	$6^1/_4$					
„ 16	II u	P	6 50 8	5	25	25	65	
		e	53	14	25	30	80	
		e	59	14	15	15	25	
		i	7 1 55	18	45	20	35	
		M	36	38	350	200	300	
		F	?					F fällt in den Papierwechsel.
„ 16	I r	P	16 31 21	4	0,3	0,3	0,3	
		S	34,9	9	0,5	0,5	—	
		e L	36,1					
		M	39	9	15	15	10	
		F	$17^1/_4$					
„ 17	I u	i P	5 40 38	4	$2^1/_2$	0,6	6	
		S	51,0	10	$1^1/_2$	1	—	
		e L	6 10					
		M	18	14	$3^1/_2$	3	6	
		F	7					
„ 17	I u	P	17 1 29	8	0,3	0,8	$2^1/_2$	
		S	11 14	8	0,8	$1^1/_3$	0,6	
		e L	21					
		M	45	14	0,9	$1^1/_2$	—	
		F	$18^1/_2$					
„ 23	I	e	3 30					Von 4^h 40^m bis 9^h 28^m blieb das Uhrwerk des 1200 kg-Pendels stehen.
		M	53	20	20	25	—	
		F	?					
„ 23	I	L	10 57 bis $11^3/_4$	21	2	2	—	

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Juni 23	Iu	i	19 12 28	5	?	2½	3	
	Vom 23. Juni 17h bis 24. Juni 9h 21m blieb das Uhrwerk des 1200 kg-Pendels stehen.							
„ 24	III r	P	13 30 46	4	3	6	4½	Herddistanz 1800 km. Starkes Beben, in Algerien gefühlt.
		S	33 47	20	40	20	40	
		M_1	37	14	180	100	70	
		M_2	38	12	170	150	120	
		F	16½					
„ 25	III r	iP	19 25 19	5	20	4½	10	Herddistanz 2200 km.
		iS	29 3	8	20	17	17	
		eL	30					
		M	35½	14	80	55	70	
		F	21¼					
„ 26	I	eL	16 49					
		M	17 4	14	1¼	0,7	2	
		F	17½					
„ 27	I	eL	16 35					
		M	41	14	0,9	0,7	4	
		F	17½					
„ 29	I	eL	8 39					
		M	9 14	14	1,7	2	4	
		F	?					F fällt in den Papierwechsel.
„ 29	Iu	P	10 59 20	6	0,9	0,6	1,1	Das Beben zeigt viele relative Maxima.
		e	11 18	18	3	3½	7	
		e	29,4	18	8	8	3½	
		e	35½	20	9	10	4	
		M	12 29	20	35	20	40	
		F	?					F geht in das folgende Beben über.
„ 29	Iu	P	14 37 34	5	0,3	0,3	0,9	
		e	15 1,8	12	1¾	0,8	—	
		M	16 9	18	7	4½	10	
		F	17½					
„ 30	Iu	e	3 19,7	10	0,7	0,7	—	
		eL	45					
		M	50	24	7	7	—	
		F	4½					
Juli 5	Iu	iP	18 43 49	4	0,6	0,3	1½	
		S	54,2	7	0,6	0,3	—	
		eL	19 18					
		M	26	14	5	3½	10	
		F	19¾					
„ 7	Iu	P	4 48 53	3	—	—	0,3	Herddistanz 7500 km.
		S	57 45	8	0,8	0,3	—	
		eL	5 6					
		M	21	17	2	3	3	
		F	6½					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Juli 7	Iu	i_1	8 35 3	6	1¼	0,3	1½	i_1 fällt in die Minutenmarke.
		i_2	41 26	14	3	1	2	
		M	9 25	17	17	10	20	
		F	11½					
„ 8	Iu	e_1	4 16 40	6	0,6	—	0,7	
		e_2	23,2	6	0,6	—	—	
		eL	50					
		M	5 6	18	2½	1¼	3½	
		F	5¾					
„ 8	I	i_1	16 29 7	3	0,3	0,3	2½	i_1 fällt in die Minutenmarke.
		i_2	58	5	0,3	0,3	1¼	
„ 10	Iu	e	15 15					
		M	49	21	4	2½	—	
		F	17					
„ 12	Iu	iP	7 44 43	3	0,3	—	1	Herddistanz 5100 km.
		ePR_1	47,0	5	2	—	1¼	Auffallend schwache Maximal-
		S	51 35	10	2½	4	2	bewegung.
		SR_1	56 6	12	1¼	10	1½	
		M	8 4	10	1	1½	2	
		F	8¾					
„ 12	Iu	e_1	21 25,2	4	—	—	0,3	
		e_2	29,7	4	0,3	—	0,5	
		e_3	56,8	24	10	4	—	
		M	22 46	21	4	8	9	
		F	23¾					
„ 13	Iv	P	8 33 22	¾	—	0,3	0,3	In Oberbayern, Tirol u. Ober-
		i	40	¾	0,3	1⅓	6	österreich gefühlt.
		M	34 42	1	0,7	5	5	
		F	39					
„ 15	I	i	4 37 42	{ 6 1	0,6	0,3	3½	
„ 15	Iu	P	12 22 8	6	0,3	0,3	1	
		PR_1	26,4	6	0,3	0,3	0,7	
		M	13 30	24	4	5	—	
		F	14½					
„ 17	I	L	10 30 bis 11¼	17	0,8	0,5	—	
„ 17	Iu	P	19 23 10	5	1	0,3	3½	
		PR_1	25 10	5	0,6	1	2½	
		e_1	31,9	10	0,7	0,7	—	
		e_2	35,4	9	0,5	0,7	—	
		eL	40					
		M	50	10	1	0,7	—	
		F	20½					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Juli 20	I	eL	3 58					
		M	4 28	24	3	$2^1/_2$	—	
		F	$5^1/_2$					
„ 21	I	eL	7,0					
		M	8 19	15	$1^1/_2$	3	$2^1/_2$	
		F	?					F fällt in den Papierwechsel.
„ 21	I	eL	22 27					
		M	38	27	4	8	—	
		F	$23^3/_4$					
„ 24	I	eL	4,0					
		M	18	17	$1^2/_3$	$1^1/_2$	3	
		F	5					
„ 24	Iu	e	15 $41^3/_4$	12	0,5	0,8	$1^1/_2$	
		eL	16 39					
		M	17 5	18	0,5	$2^1/_2$	—	
		F	$17^3/_4$					
„ 29	Iu	eP	10 46,4	6	0,3	—	0,4	
		i	46 59	9	2	$1^1/_4$	6	
		e	49,3	9	0,8	0,3	3	
		M	11 31	24	10	7	12	
		F	$13^1/_2$					
Aug. 1	Ir	iP	10 43 19	12	4	10	?	Das Diagramm des Z-Pendels fehlt.
		S	45,7	5	3	6	?	
		M	49	10	5	$2^1/_2$	?	
		F	$11^1/_2$					
„ 2	I	S?	2 42,6	9	$1^1/_2$	0,5	?	Das Diagramm des Z-Pendels fehlt.
		M	47	14	$3^1/_2$	$3^1/_2$	?	
		F	$3^1/_4$					
		Vom 2.—6. August fehlen die Registrierungen des 1200 kg-Pendels und des Z-Pendels wegen Arbeiten am Instrumente.						
„ 7	Ir	P	20 50 8	4	0,3	0,3	0,5	
		S	53,6	8	0,5	0,5	0,6	
		M	$54^1/_2$	12	$4^1/_2$	6	6	
		F	$21^1/_2$					
„ 10	I	P	20 33 4	4	0,3	—	0,3	
		e	39,6	8	0,3	—	—	
		eL	21 14					
		M	24	17	2	1	3	
		F	22					
„ 11	Iu	eP	16 42 39	3	—	—	0,3	
		S?	52,8	8	0,8	0,5	—	
		M	17 23	14	$1^2/_3$	0,7	2	
		F	$18^1/_2$					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Aug. 13	I	e	9 26,2	2	—	0,4	—	17000 kg-Pendel.
		F	32					
„ 14	I	e	7 50					Der Beginn des Bebens fällt in den Papierwechsel.
		M	8 7	18	$2^1/_2$	$2^1/_2$	$3^1/_2$	
		F	$8^1/_2$					
„ 16	I	e	7 25					
		M	38	17	$1^2/_3$	$1^1/_2$	—	
		F	?					F fällt in den Papierwechsel.
„ 17	Iu	P	12 9 50	14	0,9	—	4	
		PR_1	11 48	14	$1^1/_2$	0,4	4	
		eS	16,9	10	$1^1/_2$	$1^1/_4$	2	
		eL	30					
		M	37	14	12	25	12	
		F	14					
„ 18	I	eL	11 25					
		M	29	17	0,4	1	—	
		F	38					
„ 20	I	eL	1 26					In Aumale (Algerien) gefühlt.
		M	30	10	$1^1/_4$	$1^1/_4$	2	
		F	$1^3/_4$					
„ 21	IIu	iP	5 57 7	9	$3^1/_2$	6	60	
		i_1	6 0 21	12	$1^2/_3$	6	$2^1/_2$	
		e_1	4,0	10	$1^1/_2$	3	12	
		i_2	6 32	12	3	10	0,6	
		e_2	9,7	15	3	9	20	
		i_3	18,8	14	15	6	0,6	
		M	49	28	20	15	10	
		F	?					F fällt in den Papierwechsel.
„ 21	Ir	P	16 16 1	2	1	1	3	Herddistanz 2200 km. Starkes Beben, in Kl.-Asien gefühlt.
		S	19 45	7	$2^1/_2$	5	15	
		M	25	14	3	6	1	
		F	17					
„ 25	I	eL	1 51					
		M	58	13	0,7	1	2	
		F	2,1					
„ 25	I	eL	23 22					
		M	29	12	1	1	—	
		F	$23^3/_4$					
„ 26	Iu	eP	16 14,5	5	0,6	0,3	0,6	
		eS	22,1	10	0,5	0,3	1	
		eL	30					
		M	43	14	0,5	0,7	—	
		F	17					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Aug. 29	I	eL	3 15					
		M	18	21	$1^1/_4$	—	—	
		F	26					
„ 30	Ir	e	2 13,5		—	—	—	In Calabrien gefühlt.
		eL	18					
		M	$20^1/_2$	14	1	3	6	
		F	$2^1/_2$					
„ 31	Ir	e	19 2,3					
		M	$4^1/_2$	8	4	9	5	
		F	$19^1/_2$					
„ 31	I	P	23 21 7	3	—	—	0,3	
		M	28	10	$1^1/_2$	$2^1/_2$	3	
		F	$23^3/_4$					
Sept. 1	IIu	P	0 57 23	12	$1^1/_4$	0,9	9	Herddistanz 9200 km.
		S	1 7 45	17	10	7	0,3	Auf Formosa gefühlt.
		eL	25					
		M	40	18	30	45	55	
		F	$3^1/_2$					
„ 1	IIu	P	14 33 37	5	0,9	0,6	$1^3/_4$	Herddistanz 9200 km.
		PR_1	36,7	5	$1^1/_4$	0,6	0,3	Auf Formosa gefühlt.
		S	43 57	14	2	$2^1/_2$	—	
		SR_2	54,0	20	2	$1^1/_2$	—	
		eL	15 4					
		M	15	14	30	30	40	
		F	17					
„ 6	IIu	P	20 17 11	6	0,3	0,3	0,7	
		iPR_1	21 28	7	$1^1/_3$	0,9	4	
		S	27 55	9	3	0,8	0,8	
		ePS	30,5	17	$4^1/_2$	$4^1/_2$	6	
		eSR_1	36,1	14	$2^1/_2$	$3^1/_2$	4	
		eL	52					
		M	21 3	21	60	35	80	
		F	$23^1/_4$					
„ 7	Iu	i	7 30 10	3	1	0,7	6	Herddistanz 13 500 km.
		iPR_1	31 57	12	3	$2^1/_2$	20	
		PR_2	35,0	9	2	0,8	3	
		ePS	$41^1/_2$	18	$4^1/_2$	5	10	
		eSR_1	49	24	8	12	13	
		SR_2	54	24	8	13	6	
		M	8 26	19	23	18	12	
		F	$10^1/_2$					
„ 7	I	eL	10 42					
		M	11 21	14	0,8	0,7	—	
		F	$12^1/_4$					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Sept. 8	I	iP	3 0 28	3	—	0,3	0,5	
		eL	28					
		M	41	10	1	$1^{1}/_{2}$	1	
		F	$4^{1}/_{4}$					
„ 9	II u	P	1 25 10	12	0,5	5	25	Herddistanz 8800 km. Das Beben hat eine ganze Reihe relativer Maxima.
		e PR_1	28,0	12	1	3	10	
		e PR_2	30,0	10	12	5	6	
		S	35 4	17	12	15	15	
		e SR_1	$40^{1}/_{2}$	17	7	15	13	
		eL	46					
		M	$53^{1}/_{2}$	30	40	130	120	
		F	5					
„ 9	I	P	9 27 5	4	0,6	1	$2^{1}/_{2}$	
		eL	10 17					
		M	43	17	$2^{1}/_{2}$	3	3	
		F	12					
„ 10	I	i_1	12 46 6	4	—	—	0,5	
		i_2	35	3	—	—	0,5	
		i_3	48 21	5	0,3	0,6	0,6	
		i_4	49 19	5	$1^{1}/_{4}$	2	$1^{1}/_{2}$	
		e	13 8,0	12	0,5	$1^{1}/_{2}$	—	
		eL	29					
		M	45	19	$2^{1}/_{2}$	3	4	
		F	$14^{1}/_{4}$					
„ 12	I u	P	16 9 10	3	—	—	0,3	
		eL	26					
		M	38	25	5	4	—	
		F	$17^{1}/_{2}$					
„ 14	I	eL	13 40					
		M	14 4	15	1	$1^{1}/_{4}$	$2^{1}/_{2}$	
		F	$14^{1}/_{2}$					
„ 16/17	I u	P	23 21 18	4	0,6	0,3	?	Z-Pendel war gestört.
		eS	31,9	10	$1^{1}/_{2}$	1	?	
		PS	32,8	9	$1^{1}/_{2}$	1	?	
		SR_1	37,9	10	1	0,8	?	
		e SR_2	42	18	$1^{1}/_{2}$	2	?	
		eL	55					
		M	0 5	14	$4^{1}/_{2}$	10	?	
		F	$1^{1}/_{4}$					
„ 21	I	eL	17 2					
		M	$7^{1}/_{2}$	17	$1^{1}/_{2}$	2	—	
		F	$17^{1}/_{2}$					
„ 24	I u	P	3 45 19	12	2	1	15	Herddistanz 9500 km. Außer M hat das Beben noch mehrere relative Maxima.
		PR_1	48 44	12	2	1	12	
		S	55 54	12	1	$3^{1}/_{2}$	$4^{1}/_{2}$	
		SR_1	4 1,9	12	3	$1^{3}/_{4}$	$1^{1}/_{2}$	
		SR_2	5,7	24	5	6	7	
		eL	13					
		M	$23^{1}/_{2}$	21	15	5	25	
		F	$5^{1}/_{2}$					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Sept. 24	I	eL	11 36					
		M	41	18	$1^1/_2$	$1^1/_4$	—	
		F	12					
„ 24	Iu	P	15 35 18	9	—	—	$1^1/_2$	Die Maximalbewegung besteht aus einem ganz gleichmäßigen Wellenzuge.
		eS	41,5	17	0,8	0,5	—	
		SR_1	45,0	17	0,8	—	—	
		eL	16 9					
		M	20	18	$4^1/_2$	$3^1/_2$	7	
		F	17					
„ 24	Iu	iP	18 52 32	4	0,6	0,3	0,8	Herddistanz 9100 km.
		S	19 2 37	6	0,8	0,6	—	
		eSR_1	8,1	24	$1^1/_2$	$2^1/_2$	—	
		eL	18					
		M	24	18	$2^1/_2$	$1^1/_4$	3	
		F	20					
„ 27	I	eL	7 53					
		M	$56^1/_2$	24	3	5	—	
		F	?					F fällt in den Papierwechsel.
Okt. 2	I	eL	22 4					
		M	8	24	5	7	—	
		F	$22^1/_2$					
„ 3	I	i	11 10 53	1	—	0,1	—	17000 kg-Pendel.
		F	16					
„ 4/5	IIu	e	23 13,7	2	—	—	0,6	
		iP	14 13	10	0,5	—	4	
		ePR_1	17,7	12	$1^1/_2$	0,9	6	
		S	24 19	11	20	$5^1/_2$	4	
		PS	25,2	7	15	$3^1/_2$	1	
		M	$56^1/_2$	19	9	$3^1/_2$	15	
		F	$1^1/_2$					
„ 7	I	eL	13 16					
		M	33	17	1	$1^1/_2$	—	
		F	$14^1/_4$					
„ 13	I	eL	15 40					
		M	45	21	3	$2^1/_2$	10	
		F	$16^1/_4$					
„ 16	I	eL	3 2					
		M	4	24	$1^1/_2$	1	—	
		F	$3^1/_4$					
„ 18	Iu	P	2 55 29	3	—	—	0,5	Außer M noch mehrere relative Maxima.
		ePR_1	59,1	8	0,3	0,5	0,6	
		eL	3 25					
		M	4 16	17	2	$2^1/_2$	—	
		F	$5^1/_4$					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Okt. 20	I u	e_1	5 26,3	14	1	0,7	2	
		e_2	28,5	14	1⅓	0,7	—	
		e_3	33,8	19	3	3½	—	
		M	6 2	19	3	3½	8	
		F	6½					
„ 26	I	eL	15 46					
		M	51	10	5	5	10	
		F	16¼					
„ 27	I	eL	1 6					
		M	11	17	4½	4	—	
		F	1⅓					
„ 30	I	eL	?					e L fällt in den Papierwechsel.
		M	9 12	18	2½	3	3½	
		F	10					
„ 31	I	eL	7 10					
		M	12	19	1½	3½	4	
		F	7¾					
Nov. 2	I	eL	14 41					Von starker mikroseismischer Bewegung überlagert.
		M	54	18	2	3	—	
		F	15½					
„ 6	I	e	20 51,9	9	1	0,8	—	
		eL	21 5					
		M	18	17	15	17	25	
		F	22½					
„ 7	I v	e	0 38 54	½	—	0,05	—	17 000 kg-Pendel. In der Gegend von Düren (Rheinland) gefühlt.
		M	39 25	1	—	0,4	—	
		F	41					
„ 9	II u	e_1	6 21,5	10	1½	2	10	
		e_2	24,2	10	12	15	18	
		eL	7 9					
		M	19	24	55	80	130	
		M rep 1	8 9½	18	40	50	90	
		F	?					F fällt in den Papierwechsel.
„ 10	I u	i	12 39 19	4	0,6	—	1½	
		e_1	42,1	6	1½	2½	2	
		e_2	55,5	18	1¾	2½	—	
		e_3	13 4,8	19	2	3	—	
		eL	24					
		M	39	24	5	25	25	M zeigt sehr regelmäßige Wellenzüge.
		F	15					
„ 12	I	eL	18 25					
		M	31½	14	1	3	2	
		F	19					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Nov. 14	IIu	e_1	7 56,7	14	$2^1/_2$	$1^1/_2$	?	Z-Pendel war gestört.
		e_2	8 2,9	12	1	$1^1/_2$	?	
		e_3	7,2	21	$3^1/_2$	$3^1/_2$	?	
		e_4	11,4	20	5	7	?	
		eL	17					
		M	29	12	35	30	15	
		F	?					F fällt in den Papierwechsel.
„ 15	I	e	0 37,9	24	3	$3^1/_2$	13	In Algerien gefühlt.
		eL	47					
		M	55	19	4	3	4	
		F	$1^1/_2$					
„ 15	IIu	e_1	14 36,2	6	—	—	0,7	Mikroseismische Bewegung überlagert die Vorläufer.
		e_2	40,5	14	$1^1/_2$	$3^1/_2$	8	
		e_3	$46^1/_2$	27	15	15	15	
		i	50 5	27	20	60	80	
		eL	15 11					
		M	$23^1/_2$	20	9	75	70	
		M rep 1	16 24	36	12	25	30	
		F	17					
„ 23	I	eL	15 59					
		M	16 2	9	12	1	0,8	
		F	$16^1/_4$					
„ 24	I	eL	16 19					
		M	32	24	3	$3^1/_2$	—	
		F	17					
„ 25	I	eL	1 44					
		M	49	17	2	3	3	
		F	$2^1/_2$					
„ 26	IIu	e_1	5 0,4	14	1	$1^1/_2$	20	
		e_2	3,3	14	9	12	25	
		e_3	$13^1/_2$	15	5	6	12	
		e_4	$16^1/_2$	15	7	9	15	
		M	58	20	50	40	75	
		F	?					F fällt in den Papierwechsel.
„ 28	I	eL	2 46					
		M	$53^1/_2$	22	$1^1/_2$	1	—	
		F	3,1					
„ 29	IIu	P	2 39 5	3	$1^1/_2$	0,3	$1^1/_4$	Herddistanz ca. 9400 km E-W-lich.
		S	49,7	12	$1^1/_4$	$2^2/_3$	$1^1/_2$	
		SR_1	55,2	14	$1^3/_4$	$1^3/_4$	2	
		eL	3 9					
		M_1	$20^1/_2$	12	7	2	12	
		M_2	22	14	20	25	35	
		F	$4^1/_2$					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Nov. 30	I	L	6 53 bis 7 13	20	$1^1/_4$	$2^1/_2$	—	
Dez. 1	Iu	eP	16 1,1	3	0,6	0,7	0,5	
		e	9,1	10	$1^1/_4$	$2^1/_2$	—	
		eL	34					
		M	48	20	5	25	15	
		F	18					
„ 3	I	eL	5 2					
		M_1	6 10	26	$5^1/_2$	6	—	
		M_2	17	24	$3^2/_3$	5	—	
		F	31					
„ 3	Iu	P	8 15 44	7	0,5	0,3	$1^1/_2$	Herddistanz ca. 13 000 km.
		PR_1	20 12	5	2	0,6	2	
		eS	27,8	10	1	0,8	2	
		SR_2	40,3	10	1	$1^1/_4$	—	
		eL	44					
		M	9 40	18	$2^1/_2$	$4^1/_2$	7	
		F	?					F fällt in den Papierwechsel.
„ 4	Iu	eP	11 $22^1/_4$?	6	—	0,3	0,7	Herddistanz ca. 16 500 km.
		PR_1	27,1	7	$1^1/_3$	0,6	$3^1/_3$	
		PR_2	31,0	7	$1^1/_3$	0,6	$3^1/_3$	
		eS	35	12	$1^1/_4$	0,8	3	
		eSR_1	41	12	1	1	$1^1/_2$	
		eSR_2	48	9	$1^2/_3$	2	—	
		eSR_3	54	14	$2^1/_2$	2	—	
		eL	12 11					
		M	49	18	6	$8^1/_2$	15	M und M rep 1 zeigen auffallend gleichmäßige Wellenzüge.
		M rep 1	13 7	17	4	4	10	
		F	$14^2/_3$					
„ 5	I	e	16 49,7	10	$1^1/_2$	1	?	Vertikalpendel war außer Funktion gesetzt.
		eL	17 11					
		M	23	18	4	$6^1/_2$	?	
		F	$18^1/_4$					
„ 10	IIu	eP	9 46 0	6	1	?	3	Herddistanz ca. 12 500 km. P ist vermutlich ein Doppelstoß, dessen schwächerer Teil nur in den Reflexionen erkennbar ist. Das Beben ist von starker Mikroseismischer Bewegung überlagert.
		iPR_1	48 24	8	9	12	15	
		eS	58,6	10	$3^1/_3$	1	0,5	
		eSR_1	10 6,2	24	20	13	25	
		eL	21					
		M	46	19	60	25	80	
		F	$12^1/_3$					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Dez. 13	II u	P	11 47 35	6	$5\frac{1}{2}$	9	20	Herddistanz 6800 km.
		e PR_1	50,0	5	$3\frac{1}{2}$	6	$5\frac{1}{2}$	
		i PR_2	51 32	6	$2\frac{2}{3}$	8	5	
		PR_3	52 0	6	$2\frac{1}{3}$	8	4	
		S	55 54	21	45	50	70	
		PS	56,5	24	25	80	65	
		e SR_1	59,8	22	20	80	40	
		e L	12 5					
		M	16	19	150	160	180	M rep 1 ist auffallend gut ausgeprägt. Es liefert den Absorptionscoefficienten
		M rep 1	14 29	19	$7\frac{1}{2}$	14	20	$a = 0{,}00010$, während Angenheister Werte zwischen 0,00018 und 0,00034 fand.
		F	$15\frac{1}{2}$					
„ 14	I u	i	21 4 53	1	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	9	
		i′	7 16	1	1	$1\frac{1}{2}$	4	
		e	19,8	15	2	2	2	
		e′	26,3	18	10	$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	
		e″	30,0	18	10	2	$3\frac{1}{2}$	
		M	56	18	3	2	$3\frac{1}{2}$	
		F	$22\frac{1}{2}$					
„ 16	II u	e P	14 58,9	1	$2\frac{1}{4}$	1	2	
		e PR_1	15 3,4	1	9	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	
		e S?	10,5	14	9	15	$6\frac{1}{2}$	
		e PS?	13,2	17	30	25	50	
		M	50	18	200	120	250	
		F	$17\frac{1}{4}$					
„ 16	I	e	19 17,7	14	3	$2\frac{1}{2}$	—	
		e′	24,7	14	2	2	—	
		e L	41					
		M	59	18	15	20	35	
		F	$20\frac{2}{3}$					
„ 18	I	e	3 4,2					
		e L	12					
		M	48	18	10	7	10	
		F	$4\frac{1}{2}$					
„ 18	I	e L	5 44					
		M	54	17	4	$4\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	
		F	$6\frac{1}{2}$					
„ 21	I	e L	11 10					Das Beben ist von starker mikroseismischer Bewegung überlagert.
		M	18	18	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	—	
		F	27					
„ 23	I u	P	0 39 18	3	—	0,3	0,7	Die Zeit von P nach dem 17 000 kg-Pendel. Die Vorläufer sind von starker mikroseismischer Bewegung überlagert.
		e SR_1?	54,5	12	3	$2\frac{2}{3}$	3	
		SR_2?	57	12	$1\frac{2}{3}$	1	3	
		e L	1 0					
		M	7	16	20	27	23	
		F	$2\frac{1}{4}$					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Dez. 26	I	eL	6 24					
		M	42	18	3	4	4	
		F	7¼					
„ 26	I	e	16 44,4					
		M	36,0	2	—	0,2	—	
		F	38					
„ 27	I	i	18 18 39	1	—	0,2	—	17000 kg-Pendel.
		F	20					
„ 27	I	e	19 44					
		M	57	18	5	7	7	
		F	20½					
„ 27	I	e	21 40					
		M	42	21	3	6	—	
		F	56					
„ 29	I	eL	13 49					
		M	14 8	18	10	13	20	
		F	14⅔					
„ 30	Iu	P	1 0 57	½	—	—	1	Mikroseismische Bewegung verdeckt die Vorläufer. Herddistanz 10500 km.
		PR_1	5 5	½	1½	?	1	
		S	12 18	14	3	3½	2	
		eL	40					
		M	50	21	7	10	15	
		F	2½					
„ 30	I	P	3 22 48	¾	1	1½	1¼	
		eL	32					
		M	37	14	3½	4	6	
		F	4					
„ 30	I	eL	19 45					
		M	54	21	3	2	—	
		F	20¼					

Mikroseismische Bewegung 1910.

7h Greenwich.

Datum	Januar T	Januar A_E	Februar T	Februar A_E	März T	März A_E	April T	April A_E	Mai T	Mai A_E	Juni T	Juni A_E
	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ
1	?	?	5	0,3	8	$2^{1}/_{2}$	5	0,9	5	0,3	?	?
2	6	0,9	5	0,3	?	?	5	0,3	—	—	—	—
3	7	1,1	6	0,8	?	?	6	0,3	5	0,3	—	—
4	7	$1^{1}/_{3}$	8	0,8	6	0,6	5	0,3	6	0,6	—	—
5	?	?	6	0,6	6	0,3	6	0,3	5	0,3	—	—
6	?	?	6	$1^{3}/_{4}$	—	—	5	0,3	6	0,6	—	—
7	?	?	6	0,8	4	0,3	—	—	6	0,6	—	—
8	7	1,1	6	0,8	5	0,3	—	—	?	?	6	0,3
9	6	0,6	7	0,5	6	0,3	5	0,3	?	?	—	—
10	7	3	6	0,6	—	—	5	0,3	6	0,3	—	—
11	7	$1^{1}/_{2}$	6	0,8	6	0,3	?	?	—	—	—	—
12	6	3	7	1,1	5	0,3	6	0,6	—	—	—	—
13	7	0,8	?	?	—	—	6	0,6	5	0,3	—	—
14	6	0,6	?	?	—	—	7	0,8	—	—	6	0,3
15	7	0,5	6	1,1	—	—	7	1,1	—	—	—	—
16	6	0,6	7	$2^{1}/_{4}$	6	0,3	8	0,8	—	—	?	?
17	9	$2^{1}/_{2}$	6	0,8	7	1,1	6	0,3	—	—	?	?
18	7	$1^{1}/_{3}$	7	1,1	6	0,6	5	0,3	—	—	5	0,3
19	7	$2^{1}/_{4}$	6	0,8	?	?	5	0,3	—	—	5	0,3
20	7	0,8	7	$1^{1}/_{2}$	?	?	5	0,3	?	?	—	—
21	6	0,3	7	1,1	7	0,5	5	0,3	—	—	—	—
22	5	0,6	7	0,8	7	0,8	6	0,8	?	?	—	—
23	6	0,6	8	1	6	0,8	5	0,3	—	—	?	?
24	6	0,6	7	1,1	6	0,6	8	1	—	—	?	?
25	8	2	7	$1^{1}/_{3}$	7	0,5	9	0,7	—	—	?	?
26	5	0,6	7	$1^{1}/_{2}$	5	0,3	7	0,5	—	—	5	0,3
27	6	0,6	8	2	6	0,6	—	—	—	—	—	—
28	?	?	7	$1^{1}/_{3}$	6	0,6	?	?	?	?	5	0,3
29	6	0,8			6	0,3	?	?	—	—	?	?
30	?	?			6	0,6	?	?	6	0,6	6	0,3
31	?	?			6	0,6			?	?		

Mikroseismische Bewegung 1910.

7h Greenwich.

Datum	Juli		August		September		Oktober		November		Dezember	
	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E
	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ
1	5	0,3	—	—	6	0,3	6	0,8	6	$1^1/_2$	4	0,3
2	—	—	—	—	5	0,3	5	0,6	6	0,8	4	0,5
3	—	—	?	?	7	0,3	6	0,6	7	0,8	6	0,6
4	?	?	?	?	5	0,3	6	0,6	7	1,1	6	0,6
5	—	—	?	?	6	0,3	6	0,6	7	0,3	6	0,6
6	—	—	?	?	7	0,3	6	0,8	6	0,3	6	0,3
7	—	—	—	—	?	?	7	0,5	6	1,1	6	0,6
8	—	—	—	—	?	?	6	0,3	6	0,8	6	$1^1/_2$
9	—	—	—	—	—	—	6	0,3	?	?	5	$1^1/_4$
10	—	—	—	—	—	—	5	0.3	7	0,3	6	1,1
11	—	—	—	—	—	—	—	—	6	0,8	7	$2^1/_4$
12	—	—	—	—	—	—	5	0,3	6	0,3	7	$1^1/_2$
13	—	—	?	?	—	—	7	0,8	6	0,3	10	$1^1/_4$
14	—	—	—	—	5	0,3	6	0,3	?	?	8	1
15	—	—	—	—	6	0,3	6	0,3	7	0,8	7	0,8
16	—	—	—	—	6	0,3	6	0,3	7	0,5	7	0,8
17	—	—	—	—	5	0,3	6	0,3	4	0,3	6	0,8
18	—	—	—	—	6	0,8	—	—	5	0,3	7	0,3
19	—	—	—	—	6	0,6	5	0,3	6	0,8	6	0,3
20	—	—	5	0,3	5	0,3	5	0,3	7	0,3	9	0,7
21	?	?	?	?	—	—	5	0,3	6	0,3	9	$1^3/_4$
22	5	0,3	—	—	6	0,6	6	0,3	6	0,3	8	1
23	6	0,3	—	—	6	0,8	5	0,3	6	0,3	8	0,5
24	?	?	—	—	5	0,3	4	0,3	6	0,3	7	0,5
25	4	0,3	—	—	4	0,3	—	—	6	0,6	6	1,1
26	—	—	—	—	5	0,6	—	—	?	?	6	0,8
27	—	—	5	0,3	6	0,6	7	0,8	4	0,3	6	0,6
28	—	—	5	0,3	5	0,3	7	0,5	4	0,3	6	0,6
29	—	—	5	0,3	5	0,3	?	?	5	0,3	8	$1^1/_2$
30	—	—	5	0,3	6	0,6	—	—	?	?	8	1
31	—	—	?	?			—	—			7	0,5

Über den Durchgang von Kanalstrahlen durch Materie.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von

H. Rausch v. Traubenberg.

Vorgelegt von Herrn Riecke am 11. Aug. 1914.

Die große Bedeutung, welche die Erscheinungen des Durchganges von α-Strahlen durch Materie für die Kenntnis des Atominneren gemäß den Anschauungen von Rutherford, gestützt auf die Versuche von Geiger, Marsden und anderen, gewonnen haben, veranlaßte mich den Durchgang von Kanalstrahlen durch Materie näher zu studieren. Nachdem es Königsberger und Glimme [1]) zu zeigen gelungen war, daß Kanalstrahlen im Stande waren dünnes Aluminium zu durchdringen, war die Möglichkeit für diese Untersuchung ohne weiteres gegeben. Da ich Aluminium vorläufig nicht lochfrei erhalten konnte, habe ich meine Untersuchungen an Goldfolie gemacht. (Mittlere Dicke eines Blattes $= 7{,}33 \cdot 10^{-6}$ cm). Ich habe bis jetzt folgende Resultate erhalten:

1) Kanalstrahlen zeigen beim Durchgang durch Materie hohe Ablenkungswinkel bis zu 90^0, vielleicht auch darüber. Ich konnte das so zeigen, daß ein Sidotblendeschirm, welcher parallel dem zunächst scharf definierten Kanalstrahlenbündel aufgestellt war, beim Hereinbringen von Goldfolie in den Strahlengang durch Kanalstrahlen zum Leuchten angeregt wurde, die offenbar senkrecht zur Flugrichtung abgelenkt wurden. Ein in den Weg der abgelenkten Strahlen gestellter Draht ergab einen definierten Schatten auf dem Schirm, wodurch bewiesen zu sein scheint, daß gestreute Kanal-

1) J. Königsberger und K. Glimme, Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. 1913, 3. Abh.

strahlen und nicht sekundäre Elektronen den Schirm zum Leuchten brachten. Ob größere Ablenkungswinkel wie 90^0 (Reflexion am Golde) vorhanden sind, konnte noch nicht mit Sicherheit entschieden werden.

2) Ein in den Weg der Kanalstrahlen gebrachter Fluoreszenzschirm zeigte bei Zwischenschaltung des Goldes einen verwaschenen Fleck. Der visuell geschätzte Durchmesser des Fleckes nahm mit steigender Geschwindigkeit der Strahlen kontinuierlich ab. Der maximale Streuungswinkel nahm schneller ab als die aus der Entladespannung berechnete Geschwindigkeit der Kanalstrahlen wuchs.

3) Durch magnetische und elektrische Ablenkung wurden die komplexen Kanalstrahlen in Parabeln zerlegt. Es waren dabei auf dem Fluoreszenzschirm Wasserstoffatome, Wasserstoffmoleküle, Sauerstoff- resp. Stickstoffatome erkennbar; eine direkt auf dem Fluoreszenzschirm angebrachte Goldfolie war für alle diese Strahlenarten durchlässig.

4) Mit der gleichen Einrichtung wurde die Reichweite der Wasserstoffatome (Kopf der H_1-Parabel) in Gold als Funktion ihrer maximalen Geschwindigkeit bestimmt, indem bei einer verschiedenen Zahl von aufgelegten Goldfolien (2, 3, 5 Folien) die Entladespannung durch Variation des Druckes solange gesteigert wurde, bis eben gerade auf dem Sidotschirm sich Fluoreszenzleuchten bemerkbar machte. (Ohne Gold wurde der Schirm schon durch eine ca. 0,2 mm Funkenspannung entsprechende Strahlung zum Leuchten gebracht.)

Der Versuch ergab, daß die Reichweite R im geprüften Geschwindigkeitsintervall von 1,02 bis $2{,}61 \, . \, 10^8$ cm/sec angenähert proportional der Geschwindigkeit war. Die Reichweite (Dicke des Goldes) betrug bei $2{,}61 \, . \, 10^8$ cm/sec $= 36{,}6 \, . \, 10^{-6}$ cm.

5) Durch einen hinter den drehbaren geerdeten Goldschirm gebrachten Auffänger, der gleichzeitig durch Umschaltung als Thermosäule diente, konnte sowohl die von den Kanalstrahlen transportierte Ladung als auch die kinetische Energie der Strahlen mit Hülfe eines hochempfindlichen Drehspulgalvanometers gemessen werden. Nach Vorschalten des Goldes konnte keine Aufladung, wohl aber eine Erwärmung der Thermosäule nachgewiesen werden. Es scheint somit, daß die durchfliegenden Kanalstrahlen (im Gegensatz zu den α-Strahlen) beim Durchgang durch Materie ihre Ladung verlieren, bei diesen Versuchen, die mit Wasserstoff-Durchströmung gemacht wurden, betrug die Geschwindigkeit der Strahlen ca. $2{,}5 \, . \, 10^8$ cm/sec. Ob sie bei höheren Geschwindigkeiten ihre Ladung behalten, konnte bis jetzt noch nicht entschieden werden, da das Gold dann immer durchbrannte.

Ich gedenke diese Arbeit mit verbesserten quantitativen Methoden außer Gold mit anderen absorbierenden Materialien (versch. Metallen und Isolatoren) und mit Kanalstrahlen möglichst verschiedener Elemente und Verbindungen, insbesondere Helium — dieses um den Anschluß an die α-Strahlen zu gewinnen — fortzusetzen.

Göttingen, Physikalisches Institut der Universität,
Abteilung für Experimental-Physik.

Zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie.

(Dritte Mitteilung.)

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 13. Juni 1914.

Einleitung.

In zwei früheren Mitteilungen[1]) habe ich die elementare Strahlungstheorie nach der axiomatischen Methode behandelt; dies schien mir nötig, da jene Theorie die einzige unter den älteren physikalischen Theorieen war, die eine solche Behandlung bis dahin nicht erfahren hatte und innerhalb derer daher sowohl die Begriffsbildungen wie die Beweisführungen an Unklarheiten litten.

Die Ergebnisse meiner bisherigen Untersuchungen habe ich am Schluß meiner zweiten Mitteilung zusammengefaßt: sie bestehen hauptsächlich in der Aufstellung und Diskussion von Axiomen, wie sie für die Beweisbarkeit des Kirchhoffschen Satzes über Emission und Absorption hinreichend bez. notwendig sind — dabei wurden die optischen Koeffizienten: Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes q, Emissionskoeffizient η und Absorptionskoeffizient α im Raume kontinuierlich variabel angenommen und bei den Definitionen so verfahren, daß der der inneren Reflexion entsprechende Vorgang ausgeschlossen blieb. Daß das letztere Verfahren eine Annäherung an die strengen Folgerungen der elektromagnetischen Lichttheorie darstellt und schon insofern — wie überhaupt das Begriffssystem der elementaren Strahlungstheorie — berechtigt ist, geht insbesondere aus den neuen Untersuchungen von W. Behrens[2])

1) Vgl. diese Nachrichten 1912 S. 773 und 1913 S. 409, sowie Physikalische Zeitschrift 1912 S. 1056 und 1913 S. 592.

2) Mathematische Annalen 1914.

hervor: es zeigt sich nämlich, daß die in einem kontinuierlich veränderlichen Medium als reflektiert anzusehende Energie von zweiter Ordnung verschwindet, wenn man die Änderungen der optischen Koeffizienten q, η, α von erster Ordnung ansetzt[1]).

---

1) Zu der inzwischen (vgl. Physikalische Zeitschrift 1913, S. 847—850) erschienenen gegen mich gerichteten Publikation des Herrn E. Pringsheim bebemerke ich kurz Folgendes: Herr E. Pringsheim sagt darin, ich wäre in meiner zweiten Mitteilung „zu der Absicht einer axiomatischen Darstellung erst nachträglich und weniger aus inneren als aus taktischen Gründen gelangt“. Mit dieser Mutmaßung dürfte er allein stehn — wenigstens unter den Gelehrten, die je von meinen wissenschaftlichen Bestrebungen Notiz genommen haben; für diese brauche ich kaum zu bemerken, daß ich lediglich aus Rücksicht auf das physikalische Publikum bei meinem Vortrage und dessen erster Veröffentlichung die Hervorkehrung des axiomatischen Standpunktes wegen seines abstrakten Charakters noch nicht für angebracht gehalten habe. — Aber auch die sachlichen Einwendungen des Herrn E. Pringsheim erscheinen mir in keinem Punkte stichhaltig. So hatte ich selbst darauf hingewiesen, daß in meinen Definitionen und Formeln eine Reihe von Axiomen mitenthalten ist, die ich in den Beweisen benutze: Herr E. Pringsheim verlangt die Formulierung aller dieser Axiome im Einzelnen. Wie aber jeder Kenner axiomatischer Darstellungen weiß, würde die Erfüllung dieser Forderung in dem Rahmen einer kurzen Mitteilung nicht möglich sein. Einer solchen mit allen Kautelen umgebenen axiomatischen Darstellung bedarf es aber auch keineswegs — zumal wenn es sich um die erste derartige Begründung einer physikalischen Disziplin handelt; es genügt vielmehr in diesem Falle vollkommen, wenn die Darstellung so beschaffen ist, daß durch dieselbe jeder Leser bei gründlicher Vertiefung in den Stand gesetzt wird, an einer nicht wesentlichen Stelle die logische Schlußkette selbst zu ergänzen. — Ferner bemängelt Herr E. Pringsheim, daß meine Unmöglichkeitsbeweise seiner Meinung nach des physikalischen Sinnes entbehren; er übersieht, daß es sich an der betreffenden Stelle lediglich um den Nachweis der logischen Unabhängigkeit gewisser Axiomensysteme handelt, und dieser Nachweis wird von mir nach einer bewährten Schlußweise völlig streng erbracht. — Eines der merkwürdigsten Ergebnisse meiner ersten Mitteilung besteht darin, daß die Aussage: der Quotient $\frac{q^2 \eta}{\alpha}$ hat für jede Stelle eines im thermischen Gleichgewicht befindlichen Systems denselben Wert, auf Grund einer Integralgleichung geschlossen werden kann, ohne daß irgend ein Transport der Materie oder einer Veränderung ihrer physikalischen Beschaffenheit zum Beweise vorgenommen wird, was sonst beim Beweise des Kirchhoffschen Satzes stets geschieht. Dieses Ergebnis, das Herr E. Pringsheim völlig mißversteht, habe ich in meiner zweiten Mitteilung noch einmal besonders hervorgehoben mit den Worten: Der Satz, daß der Quotient $\frac{q^2 \eta}{\alpha}$ stets eine vom Orte unabhängige Größe ist, bleibt meinem Beweis zufolge dennoch stets gültig, auch wenn wir davon absehn, daß die Größen η, α, q bereits durch die physikalische Beschaffenheit der Materie allein eindeutig bestimmt sind. Meine Behauptung ist zutreffend; aber auch ihre Formulierung ist völlig einwandfrei: denn bei meiner Entwickelung der Begriffe könnten die Größen q, η, α zunächst auch von der Umgebung der Stelle abhängen und diese Abhängigkeit

Die vorliegende Mitteilung hat den Zweck, im Anschluß an meine in den beiden früheren Mitteilungen enthaltenen Entwickelungen und zugleich unter strenger Berücksichtigung der Reflexion neue und elementare Beweise des Kirchhoffschen Satzes zu entwickeln und dann vor allem die ebenso wichtige und nötige Frage nach dem Zusammenhange und der Widerspruchslosigkeit der aufgestellten Axiome zur Entscheidung zu bringen.

§ 1. Die Axiome der Strahlungstheorie.

Zunächst möchte ich die in meinen beiden vorigen Mitteilungen formulierten Axiome mit einigen geringfügigen Modifikationen hier zusammenstellen.

Für diese ganze vorliegende Untersuchung werde der Kürze halber von vorneherein angenommen, daß die drei optischen Koeffizienten: die Größe q, der Absorptionskoeffizient α und der Emissionskoeffizient η allein durch die physikalische Natur der Materie bestimmt und von der Umgebung und der Gruppierung der Körper unabhängig sind[1]. Da die Temperatur überall ein und dieselbe ist, so sind die drei optischen Koeffizienten q, α, η lediglich Funktionen der reduzierten Wellenlänge λ[2] und der Parameter p desjenigen Parametersystems, durch das wir die physikalische Natur der Materie festgelegt denken.

Hinsichtlich der in meinen beiden früheren Mitteilungen als Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichneten Größe q ist zu bemerken, daß dieselbe streng genommen nur im Falle wenig absorbierender und emittierender Medien die Bedeutung einer Geschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) besitzt. Vielmehr ist im Gebiete der Strahlungstheorie unter q stets derjenige optische Koeffizient zu verstehen, der etwa im Sinne des bekannten Fermatschen Minimalprinzips[3]) den Lichtweg bez. im Falle zweier homogener Medien die Richtung des gebrochenen Strahles charakterisiert. Nach M. Laue[4]) würde im Falle des Durchtritts eines

---

wird erst durch ein besonderes Axiom 3 ausgeschlossen. — Das Unzutreffende in den übrigen kritischen Bemerkungen des Herrn E. Pringsheim erhellt aus den Ausführungen des Textes, vgl. insbesondere S. 297 und Anmerkung 1) daselbst.

1) Diese Aussage ist in meiner zweiten Abhandlung besonders als Axiom 3 formuliert worden.

2) Unter λ ist hier, wie in den beiden früheren Mitteilungen der Quotient von Lichtgeschwindigkeit im freien Aether und Schwingungszahl zu verstehen.

3) Vergl. meine erste Mitteilung.

4) Annalen der Physik (4), **32**, S. 1085 (1910).

Strahles von einem homogenen absorbierenden Medium in ein anderes

$$q = \frac{c}{|\mathfrak{n}|}, \quad \mathfrak{n} = n\left(1 - i\frac{\alpha\lambda}{4\pi}\right)$$

zu nehmen sein: doch kann für die gegenwärtige Untersuchung diese Frage nach der Abhängigkeit der Größe q vom Brechungs- und Absorptionskoeffizient dahin gestellt bleiben.

Neben die Größe q tritt der Begriff der Energiegeschwindigkeit g, die ebenfalls nur von der physikalischen Natur der Materie abhängt und im allgemeinen von q verschieden ausfällt — ein Umstand, der bei der Berechnung der Energiedichte und der absorbierten Energie zu berücksichtigen ist[1].

Die Axiome[2]) lauten nun:

Axiom A. (Axiom vom Ausgleich der Gesamtenergie.) Für jedes optische System ist ein Zustand des Gleichgewichts der Strahlung möglich. In diesem Zustande ist die gesamte, aus irgendeinem Volumenelement emittierte Energie aller Farben gleich der gesamten in demselben absorbierten Energie.

Axiom B. (Axiom vom Ausgleich der Energieen jeder einzelnen Farbe.) Für jedes optische System ist ein Zustand des Gleichgewichts der Strahlung möglich. In diesem Zustande findet an irgendeiner Stelle der Materie ein Austausch von Strahlungsenergieen verschiedener Farbe nicht statt: vielmehr steht die Strahlung jeder Farbe für sich allein im Gleichgewicht.

Axiom C. (Axiom von der physikalischen Natur der Strahlungsdichte.) Im Zustande des — immer möglichen — Gleichgewichts ist die Dichte der Strahlungsenergie einer jeden Wellenlänge allein durch die physikalische Beschaffenheit der Materie an der Stelle eindeutig bestimmt, an welcher sich die Materie gerade befindet.

Axiom D. (Axiom vom Vorhandensein gewisser Verschiedenartigkeiten der Stoffe.) Es gibt Stoffe mit solchem Absorptionskoeffizienten α und Fortpflanzungsgeschwin-

1) Diese Unterscheidung zwischen q (Fortpflanzungs- = Phasengeschwindigkeit) und g (Energie- = Gruppengeschwindigkeit) ist in meinen beiden früheren Mitteilungen nicht gemacht worden: die erforderlichen Modifikationen in den Rechnungen sind jedoch geringfügig und werden später im Text dieser Mitteilung angegeben werden.

2) Die hier mit A, B, C, D bezeichneten Axiome sind im wesentlichen die Axiome bez. 1, 2, 4, 5 meiner zweiten Mitteilung.

digkeit, daß der Quotient $\frac{a}{q^2}$ gleich einer willkürlich vorgeschriebenen Funktion der Wellenlänge λ ausfällt.

Das Axiom A ist im wesentlichen der Energiesatz; die Axiome B, C, D enthalten wesentlich die Tatsachen, die bez. von mir[1], M. Planck[2] und E. Pringsheim[3] zur Begründung der Strahlungstheorie herangezogen worden sind.

Wir haben zunächst die Aufgabe, den Inhalt der aufgestellten Axiome zu formulieren.

Zu dem Zwecke betrachten wir den für unsere Untersuchung hinreichend allgemeinen Fall, daß der Raum von lauter optisch homogenen Körpern erfüllt ist; d. h. daß die optischen Koeffizienten q, g, a, η sich nur auf gewissen diskret liegenden Flächen sprungweise ändern, sonst aber konstant sind.

Nach Formel (6) meiner ersten Mitteilung ergibt sich, wenn von der Reflexion abgesehen und überdies berücksichtigt wird, daß die Energiegeschwindigkeit nicht q, sondern g ist, für die Energiedichte in irgend einem Punkte O der Wert

$$u = \frac{1}{4\pi q^2 g} \iiint \frac{e^{-A}}{S} \eta(xyz)\, dx\, dy\, dz$$

oder wegen Formel (11) meiner ersten Mitteilung

$$(1) \qquad u = \frac{1}{4\pi q^2 g} \int \left[\int_0^\infty e^{-\int_0^s a(s)\, ds} \eta(s)\, q^2(s)\, ds \right] d\chi,$$

wo $d\chi$ das Differential der Kegelöffnung von O aus bezeichnet und die Integration nach s über denjenigen geradlinig gebrochenen Strahlenweg zu erstrecken ist, der von O in der durch $d\chi$ festgelegten Richtung ausgeht.

Um die Formel (1) für die Energiedichte in O auf den Fall zu übertragen, daß Reflexion stattfindet, haben wir nur nötig, das Integral rechter Hand durch die Summe von Integralen über alle diejenigen möglichen Strahlenwege zu ersetzen, die in Folge von Reflexion oder von Brechung und Reflexion an den Trennungsflächen zum Punkte O führen; dabei ist zugleich zu berücksichtigen, daß jedesmal bei der Reflexion des Strahles an einer Trennungsfläche die Energie desselben mit einem gewissen Faktor R und jedesmal bei dem Durchtritt desselben durch die Trennungsfläche

1) Vgl. meine erste Mitteilung.

2) Vorlesung über die Theorie der Wärmestrahlung. 1. Abschnitt.

3) Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie 1. S. 360. 1903.

mit einem gewissen Faktor D multipliziert werden muß. Alsdann stellt sich die Energiedichte im Punkte O in der Form dar:

$$(2) \qquad u = \frac{1}{4\pi q^2 g} \int \left[\sum \int_0^\infty P e^{-\int_0^s \alpha(s)\,ds} \eta(s)\, q^2(s)\, ds \right] d\chi;$$

dabei bezeichnet $d\chi$ das Differential der Kegelöffnung von O aus; die Integration nach s ist über den von O in der durch $d\chi$ festgelegten Richtung ausgehenden, durch Reflexion oder Brechung bestimmten geradlinig gebrochenen Strahlenweg zu erstrecken; P bezeichnet jedesmal das Produkt der dem Durchgang oder der Reflexion entsprechenden Werte von D, R und das Zeichen $\sum$ endlich soll andeuten, daß die Summe über alle möglichen von O in der durch $d\chi$ festgelegten Richtung ausgehenden, durch Reflexion und Brechung bestimmten Strahlenwege zu nehmen ist.

Nach Axiom C (Axiom von der physikalischen Natur der Strahlungsdichte) behält der in (2) rechter Hand stehende Ausdruck seinen Wert unverändert, wenn der Punkt O innerhalb desselben Körpers variiert oder die Gruppierung und Natur der den Punkt O nicht enthaltenden Körper beliebig geändert wird.

Ferner lehren die in meiner ersten Mitteilung angestellten Überlegungen, daß aus Axiom B (Axiom vom Ausgleich der Energieen jeder einzelnen Farbe) die Gleichung

$$(3) \qquad \eta = g\alpha u$$

folgt; setzt man hierin für u den Ausdruck (2) ein, so entsteht eine in η lineare Integralgleichung, die der vollkommene Ausdruck des Axioms B ist.

In demselben Sinne endlich erscheint die Gleichung

$$(4) \qquad \int_0^\infty \{\eta - g\alpha u\}\, d\lambda = 0$$

als der Ausdruck des Axioms A (Axiom vom Ausgleich der Gesamtenergie).

§ 2. Beweise des Kirchhoffschen Satzes.

Im folgenden sollen auf Grund der aufgestellten Axiome A, B, C, D unter strenger Berücksichtigung der Reflexion elementare Beweise des Kirchhoffschen Satzes entwickelt werden.

Wir verstehen — ähnlich wie gegen Schluß meiner zweiten Mitteilung — unter p einen Parameter des Parametersystems, das

die physikalische Natur der Materie festlegt, und betrachten die optischen Koeffizienten q, (g), η, α als Funktionen des Parameters p. Sodann nehmen wir an, es sei eine Kugel mit dem Mittelpunkte O und dem Radius r homogen mit Materie erfüllt, deren optische Koeffizienten

$$q = q(p), \quad \eta = \eta(p), \quad \alpha = \alpha(p)$$

seien, während die den Raum außerhalb der Kugel homogen erfüllende Materie durch die Parameterwerte p_* und die optischen Koeffizienten

$$q_* = q(p_*), \quad \eta_* = \eta(p_*), \quad \alpha = \alpha(p_*)$$

charakterisiert sein möge.

Die elementare Optik lehrt, daß an der Grenze zweier nicht absorbierender Medien mit dem Brechungsexponent n bei senkrechter Inzidenz für die einfallende Energie E_e und die reflektierte Energie E_r die Relation

$$E_r = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 E_e$$

gilt. Für absorbierende Medien wird eine allgemeinere Formel

(5) $$E_r = M E_e$$

gelten, wo M von q und α abhängt; der genaue Ausdruck für M ist aus den Formeln von M. Born und R. Ladenburg[1]) zu entnehmen: diese Formeln lassen erkennen daß M folgende zwei Eigenschaften besitzt

a) M ist das Quadrat einer in q und α rationalen Funktion.

b) M ist in den optischen Koeffizienten q, α und q_*, α_* der beiden homogenen Medien symmetrisch gebaut.

Wir setzen nunmehr

$$p_* = p + \varepsilon p_1,$$

wo ε eine Variable, dagegen p_1 eine von Null verschiedene Konstante bedeuten soll, und drücken allgemein durch das Zeichen $\equiv$ (kongruent) aus, daß Gleichheit bis auf solche Glieder stattfindet, die in ε von höherer als erster Ordnung sind. Ma M wegen seiner Bedeutung (5) für $p = p_*$ d. h. für $\varepsilon = 0$ verschwindet und andererseits wegen der Eigenschaft a) das Quadrat einer in ε rationalen Funktion wird, so muß $M(p, p_*)$ durch ε^2 teilbar sein d. h. es ist $M(p, p_*) \equiv 0$ und folglich wegen (5) auch

(6) $$E_r \equiv 0.$$

1) Physikalische Zeitschrift 12 S. 198 (1911). Vgl. auch S. Boguslawski, Physikalische Zeitschrift 13, S. 393 (1912).

Die letztere Formel bringt im vorliegenden besonderen Falle die oben bereits erwähnte allgemeine Tatsache zum Ausdruck, daß die reflektierte Energie von zweiter Ordnung verschwindet, wenn man die Differenz der optischen Koeffizienten als erste Ordnung ansieht.

Wenn von der Reflexion abgesehen wird, so finden wir die Energiedichte im Mittelpunkt O der Kugel nach Formel (1), und dieser Ausdruck wird im vorliegenden Falle nach Ausführung der Integration über die Kegelöffnung gleich

$$(7) \qquad u = \frac{1}{q^2 g} \int_0^\infty e^{-\int_0^s \alpha(s)\,ds} \eta(s)\, q^2(s)\, ds.$$

Da nach den obigen Entwickelungen die an der Kugeloberfläche reflektierte Energie der Kongruenz (6) genügt, so verwandelt sich die Gleichung (7) bei Berücksichtigung der Reflexion in die Kongruenz:

$$(8) \qquad u \equiv \frac{1}{q^2 g} \int_0^\infty e^{-\int_0 \alpha(s)\,ds} \eta(s)\, q^2(s)\, ds.$$

Nun sind offenbar die von O ausgehenden Strahlen die unendlichen Geraden; wir erhalten daher mit Rücksicht auf die Werte, die q, η, α innerhalb bez. ausserhalb der Kugel annehmen:

$$\int_0^\infty e^{-\int_0^s \alpha(s)\,ds} \eta(s)\, q^2(s)\, ds = \int_0^r e^{-\int_0^s \alpha\, ds} \eta q^2\, ds$$

$$+ \int_r^\infty e^{-\int_0^r \alpha\, ds - \int_r^s \alpha_*\, ds} \eta_* q_*^2\, ds$$

$$= \int_0^r e^{-\alpha s} \eta q^2\, ds + \int_r^\infty e^{-\alpha r - \alpha_*(s-r)} \eta_* q_*^2\, ds$$

$$= \left(1 - e^{-\alpha r}\right) \frac{\eta q^2}{\alpha} + e^{-\alpha r} \frac{\eta_* q_*^2}{\alpha_*}$$

$$= \frac{\eta q^2}{\alpha} + e^{-\alpha r} \left(\frac{\eta_* q_*^2}{\alpha_*} - \frac{\eta q^2}{\alpha} \right).$$

Wegen

$$\frac{\eta_* q_*^2}{\alpha_*} - \frac{\eta q^2}{\alpha} \equiv \varepsilon p_1 \frac{d \frac{\eta q^2}{\alpha}}{dp}$$

ergibt sich schließlich aus (8) für den Wert der Strahlungsdichte

im Mittelpunkte O

$$(9) \qquad u \equiv \frac{\eta}{\alpha g} + \varepsilon p_1 \frac{e^{-\alpha r}}{q^2 g} \frac{d\frac{\eta q^2}{\alpha}}{dp}.$$

Andererseits geht offenbar die aus Axiom B folgende Gleichung (3) zufolge meiner obigen Ausführungen unter Berücksichtigung der Reflexion in die Kongruenz

$$u \equiv \frac{\eta}{\alpha g}$$

über, und aus dieser folgt wegen (9)

$$\varepsilon p_1 \frac{e^{-\alpha r}}{q^2 g} \frac{d\frac{\eta q^2}{\alpha}}{dp} \equiv 0,$$

d. h. wegen $p_1 \neq 0$

$$(10) \qquad \frac{d\frac{\eta q^2}{\alpha}}{dp} = 0.$$

Da p ein beliebiger Parameter des Parametersystems ist, das die physikalische Natur der Materie festlegt, so lehrt die Gleichung (10), daß der Quotient $\frac{\eta q^2}{\alpha}$ von den sämtlichen Parametern unabhängig ist und mithin eine von der physikalischen Natur der Materie unabhängige Konstante darstellt. Damit ist der Kirchhoffsche Satz unter Rücksichtnahme auf die Reflexion wesentlich auf Grund des Axioms B (Axiom vom Ausgleich der Energieen jeder einzelnen Farbe) bewiesen worden.

Noch einfacher gestaltet sich der Beweis des Kirchhoffschen Satzes auf Grund des Axioms C (Axiom von der physikalischen Natur der Strahlungsdichte). Denn wenn die Energiedichte u im Zustande des thermischen Gleichgewichtes lediglich durch die physikalische Beschaffenheit der Materie an der betreffenden Stelle bestimmt sein soll, so muß der für dieselbe im Sinne der Kongruenz erhaltene Ausdruck (9) rechter Hand vom Kugelradius r unabhängig sein, und dazu ist offenbar notwendig, daß die Gleichung (10) besteht; damit ist der Beweis des Kirchhoffschen Satzes in der gewünschten Weise erbracht.

Die eben dargelegten Beweise des Kirchhoffschen Satzes beruhten auf der Eigenschaft der Reflexion, wie sie in der Formel (6) zum Ausdruck gebracht ist. Der Beweis läßt sich jedoch auch auf Grund einer andern aus (5) unmittelbar folgenden elementaren

Eigenschaft der Reflexion führen, nämlich auf Grund des Satzes, daß derjenige Bruchteil der Energie eines Strahles, welcher bei senkrechtem Einfall auf der einen Seite der Trennungsfläche reflektiert wird, genau gleich dem Bruchteil der auf der anderen Seite reflektierten Energie ist, diese Eigenschaft der Reflexion folgt aus (5) vermöge der Eigenschaft b) des Ausdruckes M.

Um diesen Beweis zu führen, benutzen wir die Formel (2) zur Berechnung der Energiedichte im Mittelpunkt O unserer Kugel; dabei ist zu berücksichtigen, daß jedesmal bei der Reflexion des Strahls an der inneren Kugelfläche die Energie desselben mit dem Faktor R und jedesmal bei dem Durchtritt desselben durch die Kugeloberfläche von außen nach innen seine Energie mit dem Faktor D multipliziert werden muß.

Da die Summe der durchgehenden und der reflektierten Energie eines Strahles gleich seiner ursprünglichen Energie sein muß, so folgt unter Benutzung des eben genannten elementaren Satzes über die reflektierten Energien zu beiden Seiten einer Trennungsfläche, die Gleichung

$$D + R = 1. \tag{11}$$

Nach der Formel (2) stellt sich alsdann, wenn noch die Integration über die Kegelöffnung ausgeführt wird, die Energiedichte in der Form dar

$$u = \frac{1}{q^2 g} \sum \int_0^\infty P e^{-\int_0^s \alpha(s)\,ds} \eta(s)\, q^2(s)\, ds, \tag{12}$$

wo die Summe über alle möglichen von O ausgehenden Strahlenwege zu erstrecken ist und P jedesmal das Produkt der dem Durchgang oder der Reflexion entsprechenden Werte von D, R bedeutet. Die Berechnung dieser Integralsumme gestaltet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\sum \int_0^\infty = \int_0^r + D\int_r^\infty + R\int_r^{3r} + RD\int_{3r}^\infty \\ + R^2\int_{3r}^{5r} + R^2 D\int_{5r}^\infty + R^3\int_{5r}^{7r} + R^3 D\int_{7r}^\infty + \cdots;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r = \int_0^r e^{-\alpha s} \eta q^2\, ds = -\frac{\eta q^2}{\alpha}\Big[e^{-\alpha s}\Big]_0^r \\ = \frac{\eta q^2}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha r}\right),\end{aligned}$$

$$\int_{mr}^{(m+2)r} = \int_{mr}^{(m+2)r} e^{-\alpha s}\,\eta q^2 ds = -\frac{\eta q^2}{\alpha}\Big[e^{-\alpha s}\Big]_{mr}^{(m+2)r}$$

$$= \frac{\eta q^2}{\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha r}\right)e^{-\alpha m r},$$

$$\int_{mr}^{\infty} = \int_{mr}^{\infty} e^{-\alpha m r - \alpha_*(s - mr)}\,\eta_* q_*^2\, ds$$

$$= \frac{\eta_* q_*^2}{\alpha_*} e^{-\alpha m r}.$$

$$\Sigma \int_0^{\infty} = \frac{\eta q^2}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha r}\right)$$

$$+ \frac{\eta q^2}{\alpha} R e^{-\alpha r}\left(1 - e^{-2\alpha r}\right)\left(1 + R e^{-2\alpha r} + R^2 e^{-4\alpha r} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{\eta_* q_*^2}{\alpha_*} D e^{-\alpha r}\left(1 + R e^{-2\alpha r} + R^2 e^{-4\alpha r} + \cdots\right)$$

$$= \frac{\eta q^2}{\alpha}\,\frac{(1-x)(1+Rx)}{1-Rx^2} + \frac{\eta_* q_*^2}{\alpha_*}\,\frac{Dx}{1-Rx^2},$$

und folglich

$$uq^2 g = \frac{\eta q^2}{\alpha}\,\frac{(1-x)(1+Rx)}{1-Rx^2} + \frac{\eta_* q_*^2}{\alpha_*}\,\frac{Dx}{1-Rx^2}; \tag{13}$$

dabei ist zur Abkürzung

$$x = e^{-\alpha r}$$

gesetzt worden.

Wollen wir nunmehr das Axiom B (Axiom vom Ausgleich der Energieen jeder einzelnen Farbe) anwenden, so ist wegen (3)

$$u = \frac{\eta}{g\alpha}$$

und dadurch geht (13) in

$$\frac{\eta q^2}{\alpha}\left\{\frac{(1-x)(1+Rx)}{1-Rx^2} - 1\right\} + \frac{\eta_* q_*^2}{\alpha_*}\,\frac{Dx}{1-Rx^2} = 0$$

über. Wegen (11) folgt hieraus die zu beweisende Gleichung

$$\frac{\eta q^2}{\alpha} = \frac{\eta_* q_*^2}{\alpha_*}. \tag{14}$$

Andererseits soll nach Axiom C (Axiom von der physikalischen Natur der Strahlungsdichte) im Zustande des thermischen Gleichgewichts die Dichte der Strahlungsenergie allein durch die physi-

kalische Beschaffenheit der Materie an der betreffenden Stelle bestimmt sein; es muß daher der Ausdruck (13) rechter Hand von dem Radius r der Kugel d. h. von x unabhängig ausfallen. Dazu ist es offenbar notwendig und hinreichend, daß

$$\frac{\eta_* q_*^2}{\alpha_*} D = \frac{\eta q^2}{\alpha}(1-R)$$

wird und wegen (11) folgt hieraus wiederum die zu beweisende Gleichung (14).

Endlich ergibt sich dieselbe Gleichung auch auf Grund der Axiome A (Axiom vom Ausgleich der Gesamtenergie) und D (Axiom vom Vorhandensein gewisser Verschiedenartigkeiten der Stoffe).

Die aus Axiom A folgende Gleichung (4) nimmt unter Benutzung von (13) die Gestalt an

$$\int_0^\infty \left\{\eta - \eta \frac{(1-x)(1+Rx)}{1-Rx^2} - \frac{\alpha}{q^2}\frac{\eta_* q_*^2}{\alpha_*}\frac{Dx}{1-Rx^2}\right\} d\lambda = 0;$$

für $r = 0$ wird hieraus wegen (11)

$$\int_0^\infty \left\{\eta - \frac{\alpha}{q^2}\frac{\eta_* q_*^2}{\alpha_*}\right\} d\lambda = 0.$$

Ersetzen wir nunmehr den Stoff mit den optischen Koeffizienten q_*, α_*, η_* durch einen solchen Stoff mit den Koeffizienten q_{**}, α_{**}, η_{**} und subtrahieren die entsprechende Gleichung, so entsteht die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\alpha}{q^2}\left\{\frac{\eta_* q_*^2}{\alpha_*} - \frac{\eta_{**} q_{**}^2}{\alpha_{**}}\right\} d\lambda = 0$$

und aus dieser folgt nach Axiom D wegen der Willkür der Funktion $\frac{\alpha}{q^2}$ notwendig (14)[1]).

§ 3. Strahlungstheorie und elementare Optik.

Wenn auch die eben mitgeteilten einfachen und elementaren Beweise des Kirchhoffschen Satzes an sich allen Anforderungen der Strenge genügen, so bedarf doch noch eine Frage prinzipieller

1) Wie man sieht, ist hierbei die Heranziehung der Gleichung (11) ein notwendiges Erfordernis für die Durchführbarkeit des Beweises und es wird so offenbar, daß der von Herrn Pringsheim l. c. (Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie 1, S. 360, 1903) versuchte Beweis des Kirchhoffschen Satzes unzureichend ist.

Natur der Behandlung. Solange nämlich nicht feststeht, daß die sämtlichen Axiome eines Axiomensystems unter einander widerspruchslos sind, ist offenbar den Gesetzen der Logik zufolge die Möglichkeit vorhanden, daß auf Grund der Axiome des Systems jede beliebige Behauptung so z. B. auch eine Behauptung und ihr Gegenteil bewiesen werden könnte. Die auf Grund des Axiomensystems geführten Beweise sind dann zwar richtig, die gefundenen Resultate aber bedeutungslos.

Überblicken wir nun die mannigfaltigen von mir benutzten Axiome A, B, C, D und bedenken, daß einerseits die Möglichkeit des thermischen Gleichgewichts für ein beliebiges materielles System in jedem Falle gefordert worden ist, und andererseits für Brechung und Reflexion auch die elementaren optischen Gesetze gelten sollen, so ist von vorneherein keineswegs ersichtlich, warum nicht eine gewisse Gruppierung optisch verschiedenartiger Stoffe im Raume sich finden lassen sollte, bei der die gleichzeitige Befriedigung aller dieser Forderungen unmöglich ist. In diesem Falle wäre ein Teil der angenommenen und abgeleiteten Sätze jedenfalls nicht mathematisch genau formuliert. Die Frage nach der Widerspruchslosigkeit unserer Axiome läuft sonach zugleich darauf hinaus, zu entscheiden, ob und in welchem Sinne die Kirchhoffschen Sätze mathematisch genaue Sätze sind.

Um diese Entscheidung herbeizuführen, untersuchen wir zunächst, ob gewisse Sätze über die Energieverteilung auf die einzelnen Strahlen bei Brechung und Reflexion als notwendige Folgerungen unserer Axiome erscheinen. Bei dieser Untersuchung wollen wir aus der elementaren Optik lediglich die in Formel (5) ausgedrückte Tatsache über die reflektierte Energie eines Strahles bei senkrechter Inzidenz annehmen; ferner werde von unseren Axiomen nur Axiom A (Axiom vom Ausgleich der Gesamtenergie) und Axiom D (Axiom vom Vorhandensein gewisser Verschiedenartigkeiten der Stoffe) und zwar letzteres in der folgenden erweiterten Fassung zugrunde gelegt:

Axiom D^* (Axiom vom Vorhandensein optisch beliebig verschiedener Stoffe). Es gibt Stoffe derart, daß für dieselben die Größe q und der Absorptionskoeffizient α gleich willkürlich vorgeschriebenen Funktionen der Wellenlänge λ ausfallen.

Nach § 2 (S. 280) folgt aus (5) und den Axiomen A und D der Kirchhoffsche Satz.

Wir denken uns nun um einen Punkt O als Mittelpunkt eine Kugel, deren Oberfläche um die Stelle M herum ein kleines kreis-

förmiges Loch mit der Winkelöffnung ω und ebenso um den zu M vis à vis gelegenen Punkt N herum ein gleich großes kreisförmiges

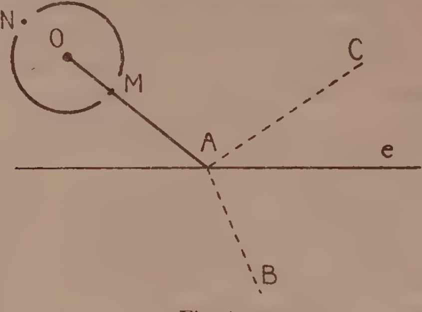


Fig. 1.

Loch besitzen möge; an allen übrigen Stellen soll die Kugeloberfläche von innen und außen spiegeln. Ferner sei e eine die Kugel nicht treffende Ebene: der durch dieselbe begrenzte und die Kugel enthaltende Halbraum sei von einem Stoffe mit den Koeffizienten q, α, η erfüllt und der den anderen Halbraum erfüllende Stoff habe die Koeffizienten q_*, α_*, η_*. Der Strahl OM treffe die Ebene e in A und werde dort nach B gebrochen und nach C reflektiert. Die Strahlungsdichte u einer bestimmten Wellenlänge in O ist, wie wir gefunden haben, durch Formel (2) bestimmt. Um für einen Strahl durch O, der die spiegelnde Kugelfläche trifft, die innere Integralsumme in (2) zu berechnen, haben wir nur

$$q(s) = q, \quad \eta(s) = \eta, \quad \alpha(s) = \alpha$$

zu nehmen und zu bedenken, daß wegen der totalen Reflexion an der inneren Kugelfläche P stets gleich 1 und der Strahl von unendlicher Länge ist. Für die spiegelnden Teile der Kugeloberfläche ist mithin

$$(15) \qquad \Big[\quad \Big] = \int_0^\infty e^{-\alpha s} \eta q^2 \, ds = \frac{\eta q^2}{\alpha}.$$

Den gleichen Wert erhalten wir für diejenige Winkelöffnung, innerhalb deren die durch das Loch der Kugel um N herum laufenden Strahlen liegen. Für die Richtung OM endlich erhalten wir, wenn $OA = l$ gesetzt wird:

$$\Big[\quad \Big] = \int_0^l e^{-\alpha s} \eta q^2 \, ds + R \int_0^\infty e^{-\alpha l - \alpha s} \eta q^2 \, ds$$
$$+ D \int_0^\infty e^{-\alpha l - \alpha_* s} \eta_* q_*^2 \, ds$$

und mit Benutzung des Kirchhoffschen Satzes (14)

$$(16) \qquad \Big[\qquad \Big] = \frac{\eta q^2}{\alpha} \{1 + e^{-\alpha l}(R + D - 1)\}.$$

Tragen wir die Werte (15) und (16) in (4) ein, so ergibt sich, wenn wir durch die Winkelöffnung ω des Loches in der Kugelfläche dividieren und zur Grenze $\omega = 0$ übergehen

$$\int_0^\infty \eta e^{-\alpha l}(R + D - 1)\, d\lambda = 0$$

oder, wenn wir

$$\eta = \frac{\alpha}{q^2} k(\lambda)$$

setzen — unter $k(\lambda)$ die universelle Funktion des Kirchhoffschen Satzes verstanden —

$$(17) \qquad \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha l}(R + D - 1) \frac{k(\lambda)}{q^2}\, d\lambda = 0.$$

Nun hängen R, D nur von q, q_*, nicht aber von α ab[1]); ferner ist α nach Axiom D* (Axiom vom Vorhandensein optisch beliebig verschiedener Stoffe) als eine willkürliche Funktion von λ anzusehen: daher folgt aus (17)

$$(18) \qquad R + D = 1$$

d. h. die von C und B kommenden nach A gerichteten Strahlen, auf gleiche Energie reduziert gedacht, vereinigen sich zu einem Strahle in Richtung AO, der wiederum die gleiche Energie besitzt.

Wir wollen nunmehr mit Hülfe derselben Axiome A und D* d. h. wiederum wesentlich aus der Energiegleichung (4) beweisen, daß der Strahl AO ein Strahl natürlichen (unpolarisierten) Lichtes ist. Zu dem Zwecke denken wir uns, wie vorhin um den Punkt O als Mittelpunkt eine Kugel, deren Oberfläche um die Stelle M herum ein kleines kreisförmiges Loch mit der Winkelöffnung ω und ebenso um den zu M vis à vis gelegenen Punkt N herum ein gleich großes kreisförmiges Loch besitzen möge; an allen übrigen Stellen soll die Kugeloberfläche von innen

1) Diese Voraussetzung trifft sicher für schwach absorbierende Medien zu und in der Tat wird zum Schluß dieses Paragraphen die nachstehende Betrachtung nur auf den Grenzfall eines unendlich wenig emittierenden und absorbierenden Mediums angewandt.

und außen spiegeln. Ferner seien e' und e zwei die Kugel nicht treffende Ebenen: der durch dieselben begrenzte und die Kugel

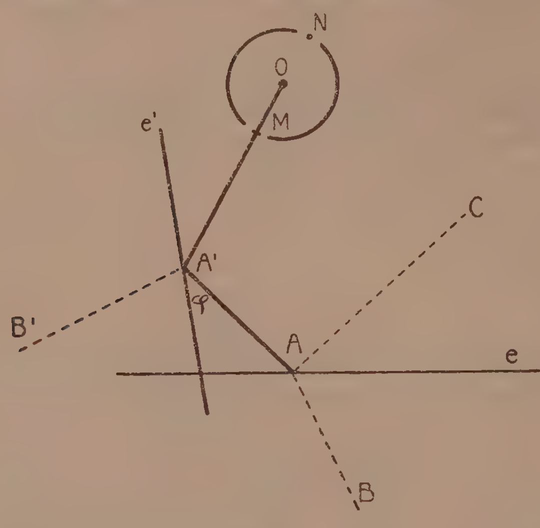


Fig. 2.

enthaltende Raumteil sei von einem Stoffe mit den Koeffizienten q, α, η erfüllt und der den übrigen Raum erfüllende Stoff habe die Koeffizienten q_*, α_*, η_*. Der Strahl OM treffe zunächst die Ebene e' in A', werde dort nach B' gebrochen, während der reflektierte Strahl die Ebene e in A treffen möge und von dort nach B gebrochen und nach C reflektiert werde. Nach Axiom A gilt im Punkt O die Gleichung (4), wobei wir wiederum bei der Summierung, wie sie das Zeichen $\sum$ in (2) andeutet, berücksichtigen müssen, daß bei dem Durchtritt des Strahles in A', die in der Richtung $B'A'O$ erfolgt, der Faktor D' und bei der Reflexion in A' der Faktor R', ferner bei dem Durchtritt in A, die in Richtung $BAA'O$ erfolgt, der Faktor DR' und bei der Reflexion in A der Faktor RR' hinzuzufügen ist. Behandeln wir dann die Energiegleichung (4) wie vorhin, indem wir ihre linke Seite durch ω dividieren und zur Grenze $\omega = 0$ übergehen, so ergibt sich für $OA' = l'$, $A'A = l$ mit Rücksicht auf (18) die Gleichung

$$\int_0^{\infty} \eta e^{-\alpha l'} (R' + D' - 1)\, d\lambda = 0$$

und hieraus, wie vorhin:

$$R' + D' = 1. \tag{19}$$

Jetzt denken wir uns die Ebene e und die Punkte A, A' festgehalten, ferner die Ebene e' mit der Kugel um O starr verbunden und drehen das aus der Ebene e' und der Kugel bestehende System um AA' als Achse derart, daß der Einfallswinkel φ unverändert bleibt. Bei der neuen Lage der Ebene e' ist der entsprechende Faktor D' derselbe, wie früher, da ja bezüglich des durchgehenden Strahles $B'A'O$ keinerlei Änderung gegen früher eingetreten ist; daher hat wegen (19) auch R' denselben Wert wie früher d. h. die Energie des reflektierten Strahles $A'O$ ist unabhängig von der Orientierung des einfallenden Strahles AA' und damit ist meine Behauptung, daß der letztere keinerlei Polarisation aufweist d. h. natürlichen Lichtes ist, als richtig erkannt.

Wir denken uns nun den Raum auf der einen Seite der Ebene e von einem Stoffe mit den optischen Koeffizienten q, α, η und auf der anderen Seite von einem Stoffe mit den optischen Koeffizienten q_*, α_*, η_* erfüllt; ferner treffe ein von O ausgehender Strahl die Ebene e im Punkte A und werde dort nach B gebrochen und nach C reflektiert. Halten wir jetzt q, q_* fest und lassen α, α_* und dem Kirchhoffschen Satze entsprechend auch η, η_* gegen Null abnehmen, so verschwindet überall im Endlichen die Energie emittierende und absorbierende Materie, während die von irgend einem Punkte des gebrochenen bez. reflektierten Strahles in's Unendliche erstrekten Integrale

$$\int_0^\infty e^{-\alpha s}\eta q^2\,ds, \qquad \int_0^\infty e^{-\alpha_* s}\eta_* q_*^2\,ds$$

stets denselben Wert k beibehalten.

Durch diese Überlegung gewinnen wir aus dem vorhin Bewiesenen den folgenden Satz:

Satz. Wenn der Raum von zwei durch eine Ebene von einander getrennten durchsichtigen Medien erfüllt ist und zwei Strahlen natürlichen Lichtes und gleicher Energie von irgend einer Wellenlänge von beiden Seiten her auf die gemeinsame Trennungsfläche in solchen Richtungen auffallen, daß der eine Strahl nach seinem Durchtritt und der andere nach seiner Reflexion dieselbe Richtung weist, so ist der durch die Vereinigung entstehende Strahl wiederum von natürlichem Lichte und der gleichen Energie.

Dieser Satz, den wir als eine Folgerung aus unseren Axiomen der Strahlungstheorie (Axiom A und D*) gefunden haben, gehört dem Gebiet der elementaren Optik an: er ist ein richtiger Satz dieser Wissenschaft, der aus den Fresnelschen Formeln über

Reflexion und Brechung in der Tat abgeleitet werden kann. *Unsere Überlegungen haben mithin auf keinerlei Widerspruch gegen die Gesetze der elementaren Optik geführt.*

§ 4. Die Widerspruchlosigkeit der Axiome.

Wir wenden uns nunmehr der Hauptaufgabe dieser Untersuchung zu, nämlich dem Nachweise, daß unsere Axiome weder mit sich selbst noch mit den Gesetzen der Optik in Widerspruch sind.

Zu dem Zwecke führen wir fortan der Kürze halber eine besondere Ausdrucksweise ein. Es sei AB ein aus geradlinigen Stücken zusammengesetzter Linienzug, der ein Strahlenweg ist: wir wollen dann das unter dem Summenzeichen $\sum$ in (2) vorkommende Teilintegral

$$\int_A^B P e^{-\int_A^s \alpha(s)\,ds} \eta(s)\, q^2(s)\, ds$$

als die Linearenergie des Strahles AB im Punkte A bezeichnen; ist AB' ein anderer von A ausgehender Strahlenweg, so werde die Summe der Linearenergien der Strahlen AB und AB' als die Linearenergie des aus AB und AB' zusammengesetzten Strahlensystems im Punkte A bezeichnet. Insbesondere hat darnach die Linearenergie eines geradlinigen im homogenen Medium verlaufenden Strahles AB von der Länge l den Wert

$$\int_A^B e^{-\int_A^s \alpha\,ds} \eta q^2\, ds = \left(1 - e^{-\alpha l}\right) k \tag{20}$$

und für $l = \infty$ ergibt sich hieraus der Wert k, wie er vorhin (S. 291) bereits benutzt worden ist.

Nunmehr werde zunächst von den bisherigen Axiomen abgesehen; wir legen vielmehr der weiteren Untersuchung lediglich folgende drei Annahmen zugrunde, die im Zustande des optischen Gleichgewichtes für ein beliebiges System von Medien gelten sollen:

Annahme 1: Es gelte Axiom D* (Axiom vom Vorhandensein optisch beliebig verschiedener Stoffe).

Annahme 2: Es gelte der Kirchhoffsche Satz

$$\frac{\eta(\lambda)\, q^2(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = k(\lambda),$$

wo $k(\lambda)$ eine von der Natur des Mediums unabhängige Funktion der Wellenlänge λ ist.

Annahme 3: Das durch Emission erzeugte Licht ist natürliches Licht; wenn zwei Strahlen natürlichen Lichtes und gleicher Linearenergie aus zwei verschiedenen Medien an der Grenze derselben zusammentreffen, so daß der reflektierte Strahl des einen und der gebrochene des anderen einen neuen Strahl bilden, so ist dieser Strahl wiederum von natürlichem Licht und gleicher Linearenergie.

Die Annahme 1 ordnet jedem Funktionenpaar $q(\lambda)$, $\alpha(\lambda)$ einen Stoff zu, der seinerseits dadurch optisch eindeutig charakterisiert ist. Die Annahme 2 bestimmt die zugehörige Funktion $\eta(\lambda)$. Die Annahme 3 entspricht den oben aus unseren Axiomen bewiesenen Folgerungen; sie ist nichts anderes als eine Festsetzung über die bei Reflexion und Brechung stattfindende Energieverteilung: wonach unter gewissen Umständen die Gleichung

$$R + D = 1 \tag{21}$$

statthat.

Die Annahmen 1 und 2 sind offenbar voneinander unabhängig. Auch die Annahme 3 könnte mit den Annahmen 1 und 2 selbst dann nicht in Widerspruch treten, wenn sie die bedingungslose Gültigkeit der Gleichung (21) aussagen würde. In der formulierten Aussage ist die Annahme 3 auch nach dem oben Gesagten verträglich mit den Gesetzen der Optik, und somit erkennen wir, daß die drei Annahmen gewiß weder untereinander noch mit den Gesetzen der Optik in Widerspruch sind.

Es gelingt nunmehr, die sämtlichen Aussagen, die in den Axiomen A, B, C enthalten sind, einschließlich des Bestehens eines optischen Gleichgewichtszustandes als strenge Folgerungen der Annahmen 1, 2 und 3 nachzuweisen.

Um dies einzusehen, fassen wir einen innerhalb des Körpersystems liegenden Punkt O und eine Richtung durch O ins Auge: der von O ausgehende in der bestimmten Richtung verlaufende Strahl spaltet sich, wenn er eine Trennungsfläche zweier Medien trifft, in zwei Strahlen, einen gebrochenen und einen reflektierten, diese wiederum erfahren beim Auftreffen auf eine Trennungsfläche das nämliche Schicksal, u. s. f. Jeder dieser von O in der bestimmten Richtung verlaufenden Strahlenwege s_i ist ein gebrochener von O aus in der bestimmten Richtung beginnender Linienzug; die geraden Stücke dieses Linienzuges s_i mögen von O aus anfangend bez. mit

$$s_{i1},\ s_{i2},\ s_{i3},\ \ldots$$

bezeichnet werden, und die zugehörigen optischen Koeffizienten auf s_{ik} seien allgemein q_{ik}, α_{ik}, η_{ik}.

Alsdann verstehen wir unter A irgend eine große Zahl und suchen auf jedem der Strahlenwege s_i je einen Punkt A_i derart, daß die Größe

$$\alpha_{i1} s_{i1} + \alpha_{i2} s_{i2} + \cdots + \alpha_{in_i} s_{in_i} \tag{22}$$

den Wert A erhält. Die Anzahl der in Betracht kommenden Strahlenwege s_i ist, wie wir annehmen können, endlich und wächst mit wachsendem A über alle Grenzen.

Wir wollen die gesamte auf den Wegen OA_i im Punkte O erzeugte Linearenergie, d. h. den Wert der Integralsumme

$$\sum_{i=1,2,\ldots} \int_O^{A_i} Pe^{-\int_0^s \alpha(s)\,ds} \eta(s)\, q^2(s)\, ds$$

berechnen.

Zu dem Zweck fassen wir zunächst den Weg OA_1 ins Auge (vgl. Fig. 3 S. 295). Der dem Endpunkte A_1 dieses Weges vorangegangene Knickpunkt sei B_1 und der zweite Weg OA_2 sei ein solcher, der bis B_1 mit OA_1 gemeinsam verläuft und dann in dem geradlinigen Wegstück $B_1 A_2$ endet. Da die Summen (22) für die beiden Wege OA_1 und OA_2 sich in diesem Falle nur durch das letzte Glied von einander unterscheiden, so müssen, da ja beide Summen den gleichen Wert A haben sollen, auch diese letzten Glieder miteinander übereinstimmen, d. h. es ist

$$\alpha_{1n_1} s_{1n_1} = \alpha_{2n_2} s_{2n_2};$$

wegen (20) ist daher auch die Linearenergie der beiden Strahlenwege $B_1 A_1$ und $B_1 A_2$ die gleiche. Da überdies in beiden Wegstücken $B_1 A_1$ und $B_1 A_2$ das Licht unmittelbar aus der Emission stammt, ohne Brechung oder Reflexion erlitten zu haben, so ist es natürliches Licht. Nach Annahme 3 vereinigen sich daher diese beiden längs $B_1 A_1$ und $B_1 A_2$ erzeugten Strahlen in B_1 zu einem Strahl natürlichen Lichtes von der gleichen Linearenergie

$$\left(1 - e^{-\alpha_{1n_1} s_{1n_1}}\right) k.$$

Ferner sei C_1 der B_1 vorangegangene Knickpunkt des Weges OA_1; dann herrscht in C_1 vermöge der beiden Strahlenwege $C_1 B_1 A_1$ und $C_1 B_1 A_2$ die Linearenergie

$$\begin{aligned} &\int_{C_1}^{B_1} e^{-\int_{C_1}^{s} \alpha_{1n_1-1}\,ds} \eta_{1n_1-1}\, q^2_{1n_1-1}\, ds + e^{-\alpha_{1n_1-1} s_{1n_1-1}} \left(1 - e^{-\alpha_{1n_1} s_{1n_1}}\right) k \\ &\qquad = \left(1 - e^{-\alpha_{1n_1-1} s_{1n_1-1} - \alpha_{1n_1} s_{1n_1}}\right) k. \end{aligned} \tag{23}$$

Alsdann sei der dritte Weg OA_3 ein solcher, der bis C_1 mit OA_1 und OA_2 gemeinsam verläuft; besteht derselbe von C_1 an aus einem einzigen geradlinigen Wegstücke bis A_3, so ist nach (20) die Linearenergie dieses Wegstückes $C_1 A_3$ in C_1

$$(24) \qquad \left(1 - e^{-\alpha_{3n_3} s_{3n_3}}\right) k$$

und da andererseits wegen der für (22) gemachten Festsetzung

$$\alpha_{1n_1-1} s_{1n_1-1} + \alpha_{1n_1} s_{1n_1} = \alpha_{3n_3} s_{3n_3}$$

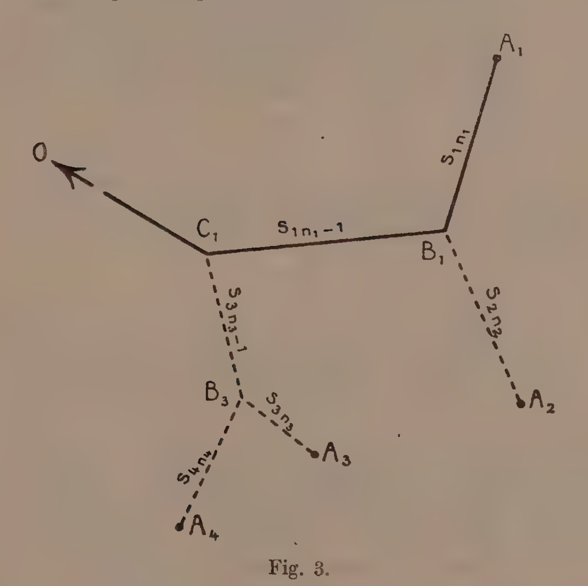


Fig. 3.

ausfällt, so wird diese Linearenergie (24) genau die gleiche wie (23). Da außerdem beide Strahlen nach Annahme 3 von natürlichem Lichte sind, so vereinigen sie sich in C_1 zu einem Strahle, der wiederum nach Annahme 3 natürlichen Lichtes und von der Linearenergie (23) ist. Sollte jedoch der dritte Weg OA_3 von C_1 an noch einen weiteren Knickpunkt B_3 aufweisen, so daß etwa der vierte Weg OA_4 bis B_3 mit OA_3 gemeinsam verliefe, so wenden wir auf diesen letzten Teil des Strahlenweges OA_4 die nämliche Betrachtung wie vorhin auf OA_1 an und erhalten dann, daß die beiden letzten Stücke $B_3 A_3$ und $B_3 A_4$ sich wegen

$$\alpha_{3n_3} s_{3n_3} = \alpha_{4n_4} s_{4n_4}$$

in B_3 zu einem natürlichen Strahl von der Linearenergie (24) vereinigen und demnach in C_1 einen natürlichen Lichtstrahl von der

Linearenergie

$$(25) \qquad \left(1-e^{-\alpha_{3n_3-1}s_{3n_3-1}-\alpha_{3n_3}s_{3n_3}}\right)k$$

erzeugen. Da wegen der für (22) gemachten Festsetzung nunmehr

$$\alpha_{1n_1-1}s_{1n_1-1}+\alpha_{1n_1}s_{1n_1} = \alpha_{3n_3-1}s_{3n_3-1}+\alpha_{3n_3}s_{3n_3}$$

ausfällt, so besitzt jene Linearenergie (25) in C_1 den gleichen Wert (23), wie er im vorigen Falle gefunden worden ist.

Durch Fortsetzung des eingeschlagenen Verfahrens gelangen wir schließlich zu dem Resultat, daß der auf unseren Wegen OA_i insgesamt erzeugte Strahl in O natürlichen Lichtes ist und dort die Linearenergie

$$\left(1-e^{-\alpha_{11}s_{11}-\alpha_{12}s_{12}-\cdots-\alpha_{1n_1}s_{1n_1}}\right)k = \left(1-e^{-\mathsf{A}}\right)k$$

besitzt. Dieser Ausdruck wird im Limes $\mathsf{A}=\infty$ gleich k und somit erhalten wir nach (2) für die Energiedichte

$$u = \frac{k}{q^2 g} = \frac{\eta}{\alpha g}.$$

Damit sind die Aussagen der Axiome C und B, mithin auch die des Axioms A als notwendige Folgerungen aus unseren Annahmen 1, 2, 3 erkannt.

Zugleich ergibt sich der Ausdruck für die Helligkeit eines Strahles, wie er in meiner ersten Mitteilung[1]) abgeleitet wurde, wiederum als gültig, womit insbesondere auch unter voller Berücksichtigung der Reflexion die Tatsache erwiesen ist, daß im Zustande des optischen Gleichgewichts *die Helligkeit an jeder Stelle von der Richtung des Strahles unabhängig ausfällt.* Darüber hinaus zeigt noch unsere Untersuchung, daß im Zustande des optischen Gleichgewichtes *an jeder Stelle jeder Strahl ein Strahl natürlichen Lichtes sein muß.*

Im vorstehenden haben wir zugleich erkannt, *daß die sämtlichen in unseren Axiomen A, B, C, D, D* enthaltenen Aussagen, einschließlich der Aussage, daß ein optisches Gleichgewicht für jede Gruppierung der Medien stets möglich ist, sowie der Kirchhoffsche Satz und unser Satz von der Zusammensetzung der Energieen bei Reflexion und Brechung, ferner die Formeln für die Energiedichte u und die Helligkeit H ein in sich abgeschlossenes System von Sätzen*

---

1) Vgl. diese Nachrichten 1912, S. 777—788. Neuerdings hat Levi-Civita die Formel für die Helligkeit auf neuem Wege abgeleitet. Rend. d. R. Accademia dei Lincei 1914, S. 12.

bildet, die in logischem Zusammenhang miteinander stehen und untereinander widerspruchsfrei sowie mit den Gesetzen der elementaren Optik verträglich sind.

Aber von diesem erkenntnistheoretischen Gewinn abgesehen, hat uns die obige Untersuchung zugleich in anschaulicher Weise vor Augen geführt, *wie es möglich wird, daß im Zustande des optischen Gleichgewichts die von den verschiedenen Stellen im Raum emittierten, teilweise absorbierten, und durch Reflexion und Brechung mannigfach polarisierten Strahlen* — deren Menge schon in den einfachsten Beispielen nicht mehr abzählbar ist — *sich gerade zu einem Strahle von der konstanten Linearenergie $k(\lambda)$ und von natürlichem Lichte vereinigen und daß so schließlich die Unabhängigkeit der Linearenergie eines Strahles von Ort und Richtung zustande kommt:* auf Grund der in Annahme 3 ausgedrückten Tatsache zeigt sich eben, daß im Zustande des optischen Gleichgewichtes ein Strahl beim Übertritt von einem Körper in einen anderen gerade so viel an Linearenergie durch Reflexion auf der einen Seite verliert als ihm durch Reflexion von der anderen Seite zugute kommt und daß zugleich der Austausch dieser beiden Linearenergien unter solchen Polarisationsverhältnissen stattfindet, daß der durchgetretene Strahl wiederum als natürliches Licht erscheint[1]).

Das Axiom D ist eine spezielle Fassung des Axioms D*. Es liegt andrerseits nahe, auch die folgenden von Axiom D verschiedenen speziellen Fassungen des Axioms D* in Betracht zu ziehen.

Axiom D′. (Axiom vom Vorhandensein beliebig brechbarer Stoffe.) Es gibt Stoffe derart, daß die Größe q gleich einer willkürlich vorgeschriebenen Funktion der Wellenlänge λ ausfällt.

Axiom D″. (Axiom vom Vorhandensein optisch beliebig durchlässiger Stoffe.) Es gibt Stoffe, welche Strahlen von irgend einer beliebigen Wellenlänge ungebrochen durchlassen, die Strahlen aller anderen Wellenlängen dagegen total reflektieren.

---

1) Eine vollkommnere Bestätigung konnte die von mir in meiner zweiten Mitteilung (diese Nachrichten 1913, S. 410 und Anmerkung 1), sowie Physik. Zeitschrift 1913, S. 592 und Anmerkung 3) ausgesprochene und axiomatisch formulierte Auffassung von der Rolle, die die Reflexion im Zustande des optischen Gleichgewichts spielt, kaum erfahren; ist doch der Fall des kontinuierlich veränderlichen Mediums nichts anderes als ein Grenzfall des von mir hier betrachteten Systems homogener Körper. Die an meiner Bemerkung geübte Kritik von Herrn E. Pringsheim (l. c., Physik. Zeitschrift 1913, S. 849) ist daher sachlich ebenso verfehlt, wie sie der Form nach unangebracht war.

Das Axiom D″ läßt sich auch als Korollar zu Axiom D′ ansehen.

Aus Axiom D″ kann mittelst des Axioms A das Axiom B (Axiom vom Ausgleich der Energieen jeder einzelnen Farbe) abgeleitet werden.

Um dies zu erkennen, denken wir uns einen Punkt O von einer Kugelschale umgeben und diese Kugelschale von einem Stoffe verfertigt, der für die Strahlen von der Wellenlänge λ_0 die in Axiom D″ ausgedrückte Eigenschaft hat. Für die von λ_0 verschiedenen Werte der Wellenlänge λ ergibt sich dann wegen der totalen Reflexion an der inneren Fläche der Kugelschale sofort

$$\sum \int_0^\infty P e^{-\int_0^s \alpha(s)\, ds} \eta(s)\, q^2(s)\, ds = \frac{\eta q^2}{\alpha} = k(\lambda)$$

und infolgedessen wird nach (2) für alle diese Werte λ die Strahlungsdichte u gleich $\frac{\eta}{\alpha g}$. Daher erhält für dieselben Werte λ der Integrand in (4) den Wert Null und die Gleichung (4) verlangt mithin, daß der Integrand auch für $\lambda = \lambda_0$ verschwindet d. h. es gilt für $\lambda = \lambda_0$ notwendig

$$\eta = g\alpha u,$$

und da λ_0 ein beliebiger Wert von λ ist, so enthält diese Gleichung die vollständige Aussage des Axioms B für das ursprünglich zugrunde gelegte beliebige optische System.

Wie aus Axiom B der Kirchhoffsche Satz folgt, ist oben (S. 283 und S. 285—286) gezeigt worden.

Beiträge zur Mathematischen Statistik II.

(Aus dem Seminar von F. Bernstein, Göttingen.)

Integralungleichungen konvexer Funktionen.

Von

F. Bernstein und M. Krafft.

Vorgelegt von Herrn Lexis in der Sitzung vom 9. Mai 1914.

1.

Im Artikel 10 seiner „Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae“ spricht C. F. Gauß folgenden Lehrsatz aus:

Satz 1. Es sei $\varphi(x)$ eine positive Funktion von x, welche mit wachsendem absoluten Werte von x immer abnimmt oder wenigstens nicht wächst. Wir bezeichnen das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) x^2 \, dx$$

mit m^2, das von $x = -\lambda . m$ bis $x = +\lambda . m$ genommene Integral $\int \varphi(x) dx$ mit μ und nehmen $\mu = 1$ für $\lambda = \infty$ an, so ist

λ kleiner oder wenigstens nicht größer als $\mu\sqrt{3}$, wenn μ kleiner ist als $\frac{2}{3}$,

λ nicht größer als $\dfrac{2}{3\sqrt{1-\mu}}$, wenn μ größer ist als $\frac{2}{3}$.

Für $\mu = \frac{2}{3}$ fallen beide Grenzen zusammen und λ kann alsdann nicht größer als $\sqrt{\frac{4}{3}}$ sein.

In der Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung heißt das folgendes — wobei wir die Anzeige der genannten Abhandlung in Göttingische gelehrte Anzeigen Stück 33 (1821) zitieren —:

„Wenn die Funktion, welche die relative Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Fehlers ausdrückt, unbekannt ist, so bleibt natürlich auch die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler

zwischen gegebene Grenzen falle, unmöglich: dem ungeachtet muß, wenn nur allemal größere Fehler geringere (wenigstens nicht größere) Wahrscheinlichkeit haben als kleinere, die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen die Grenzen $-x$ und $+x$ falle, notwendig größer (wenigstens nicht kleiner) sein als $\frac{x}{m}\sqrt{\frac{1}{3}}$, wenn x kleiner ist als $m\sqrt{\frac{4}{3}}$, und nicht kleiner als $1-\frac{4m^2}{9x^2}$, wenn x größer ist als $m\sqrt{\frac{4}{3}}$, wobei m den bei den Beobachtungen zu befürchtenden mittleren Fehler bedeutet."

Unter den gleichen Voraussetzungen, wie das voranstehende, von ihm selbst als merkwürdig bezeichnete Theorem behauptet dann C. F. Gauß die Richtigkeit des folgenden Satzes (Theoria combinationis Art. 11):

Satz 2. Bezeichnet man mit n^4 das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4\varphi(x)\,dx$, so ist — unter den gemachten Voraussetzungen —

$$\frac{n^4}{m^4} \text{ größer oder gleich } \tfrac{9}{5}.$$

Um den allgemeinen Charakter dieser beiden Sätze deutlicher hervortreten zu lassen, geben wir dieselben in einer Umformung, welche übrigens durch den Gaußschen Beweis nahegelegt wird. Wir setzen

$$y = \int_{-x}^{+x} \varphi(x)\,dx$$

und

$$x = \psi(y).$$

Dann folgt sofort, daß $\psi(y)$ eine im Intervall $(0,1)$ eindeutige positive konvexe Funktion ist, die für $y=0$ verschwindet. Bemerkt man, daß durch diese Umformung $m^2 = \int_0^1 \psi^2(y)\,dy$ wird, so kann man die beiden Gaußschen Sätze in folgender Fassung aussprechen:

Satz 1. Es sei $\psi(x)$ eine im Intervall $(0,1)$ definierte stetige konvexe positive Funktion, welche jedoch für $x=1$ unendlich werden kann, und es sei $\psi(0)=0$. Ferner existiere das Integral $\int_0^1 \psi^2(x)\,dx$. Dann ist

(1) $$\psi^2(x) \leqq 3x^2 \int_0^1 \psi^2(x)\,dx \qquad (0 \leqq x \leqq \tfrac{2}{3}),$$

dagegen

(2) $$\psi^2(x) \leqq \frac{4}{9(1-x)} \int_0^1 \psi^2(x)\,dx \qquad (\tfrac{2}{3} \leqq x \leqq 1).$$

Satz 2. Es ist unter den gleichen Voraussetzungen

(3) $$\left(\int_0^1 \psi^2(x)\,dx\right)^2 \leqq \tfrac{5}{9} \int_0^1 \psi^4(x)\,dx.$$

Eine Bemerkung ist vielleicht nicht überflüssig. Die Funktion $\psi(x)$ kann für $x = 1$ unendlich werden, darf jedoch auch endlich bleiben. Der letztere Fall würde dem Umstande entsprechen, daß die Fehlerfunktion, wie es tatsächlich der Fall ist, für größere Fehler verschwindet. Genau genommen ist dann $\psi(x)$ für $x = 1$ nicht eindeutig, sondern nimmt jeden Wert oberhalb $\lim\limits_{x=1-0} \psi(x) = \psi(1)$ an, sodaß wir der ψ-Kurve im Punkte $(x = 1, y = \psi(1))$ ein senkrechtes geradliniges Stück anschließen müssen.

In unserer Fassung erinnert der Satz 2 an eine wohlbekannte von Bessel herrührende allgemeine Integralbeziehung: Es ist, was auch $f(x)$ für eine integrierbare Funktion sein mag,

(4) $$\left(\int_0^1 f^2(x)\,dx\right)^2 \leqq \int_0^1 f^4(x)\,dx.$$

Der Satz 2 stellt daher eine Verschärfung der genannten Besselschen Ungleichheitsbeziehung dar, unter der Voraussetzung, daß wir es mit positiven konvexen Funktionen zu tun haben, die die Nebenbedingung $\psi(0) = 0$ erfüllen. Man überblickt sofort, daß diese Bedingung, welche also vorschreibt, daß die Kurve vom Nullpunkt ausgeht, durchaus wesentlich ist. In der Tat ist die Ungleichung (4) nicht zu verschärfen, wenn man beliebige konvexe Kurven zuläßt, denn es tritt für $f(x) = \text{const.}$ das Gleichheitszeichen ein, und diese Funktion ist Grenzfall einer konvexen Funktion. Andrerseits ist die Funktion $f(x) = \text{const.}$ auch Grenzlage einer Schar stetiger, an der Stelle $x = 0$ ungleichmäßig konvergierender Funktionen, welche für $x = 0$ verschwinden, und daher ist die Bestimmung, positiv und konvex zu sein, ebenfalls für die Verschärfung notwendig. Der Spezialfall $f(x) = c \cdot x$ ($c = \text{const.}$) zeigt, daß die Verschärfung exakt ist, so daß also die C. F. Gaußsche Zahl $\frac{5}{9}$ nicht weiter verkleinert werden kann.

Ebenso werden wir zeigen, daß die Grenzen des Satzes 1 genau sind.

Um den Sinn dieser Behauptung näher zu erläutern, betrachten wir, indem wir $\frac{\psi(x)}{\sqrt{\int_0^1 \psi^2(x)\,dx}}$ einführen (es ist dies dasselbe, was Gauß tut, wenn er statt x die Größe $\frac{x}{m} = \lambda$ einführt), die Gesamtheit der positiven konvexen Kurven, welche den beiden Bedingungen genügen:

$$\text{(a)} \qquad \psi(0) = 0$$

$$\text{(b)} \qquad \int_0^1 \psi^2(x)\,dx = 1.$$

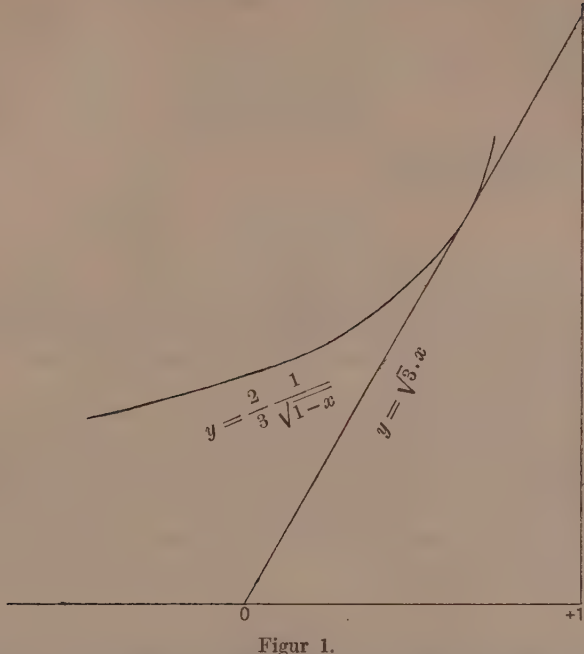
Dann behauptet unser Satz 1, daß diese Kurven das ganze Gebiet, welches oberhalb der Abszissenachse und unterhalb der durch die Gleichungen

$$y = \sqrt{3}\,.\,x \qquad 0 \leqq x \leqq \tfrac{2}{3}$$

$$y = \frac{2}{3\sqrt{1-x}} \qquad \tfrac{2}{3} \leqq x \leqq 1$$

bestimmten Grenze liegt, lückenlos ausfüllen.

Der Beweis ist jetzt leicht zu geben. Die Gerade $y = \sqrt{3}\,.\,x$ ist die vom Nullpunkt an die kubische Hyperbel $y = \frac{2}{3\sqrt{1-x}}$ gelegte Tangente. Diese Hyperbel selbst ist die Enveloppe der Schar von Geraden, welche von dem rechten Winkel, dessen Scheitel der Punkt $x = 1$ und dessen Schenkel die x-Axe von $-\infty$ bis $+1$ und die Parallele zur positiven y-Axe im Punkte $x = +1$ sind (Fig. 1), Dreiecke ABC vom konstanten Integral $\int y^2\,dx = 1$ abschneiden. Befindet sich nun der Punkt A auf der x-Axe innerhalb des Stückes von 0 bis 1, so ist die Kurve, welche aus dem geradlinigen Stück OA und der Seite AC besteht, eine unsere Voraussetzungen (a) und (b) erfüllende positive konvexe Kurve. Andrerseits füllen diese stückweise geradlinigen Kurven, die wir geometrisch zweckmäßig so ergänzen, daß sie von $x = -\infty$ über AC nach $y = +\infty$ für $x = +1$ laufen, das durch die Ungleichungen bestimmte Gebiet lückenlos aus. Ferner ist evident, daß jeder andere derartige Streckenzug K' innerhalb dieses Gebietes liegt, wenn die bewegliche Seite $A'C'$ ein Dreieck $A'BC'$, für welches $\int y^2\,dx$ kleiner als 1 ist, abschneidet.



Figur 1.

Jede im Nullpunkte beginnende positive konvexe Kurve gehört Punkt für Punkt einer zugehörigen Kurve K' an und liegt also Punkt für Punkt im betrachteten Gebiet. Denn die Tangente in irgend einem ihrer Punkte liegt unterhalb der Kurve und trifft die x-Axe notwendig zwischen 0 und 1. Da das Integral $\int \psi^2(x)\,dx = 1$ durch das Einsetzen der kleineren Ordinaten der Tangente für $\psi(x)$ verkleinert wird, schneidet die Tangente ein Dreieck $A'BC'$ ab vom Integral $\int y^2\,dx$ kleiner als 1. Der betrachtete Punkt liegt daher auf einer durch die in ihm gezogene Tangente bestimmten Kurve K' und demnach innerhalb des Gebietes. Dieser Schluß gilt natürlich auch, wenn die Kurve Ecken besitzt; er gilt, wie ersichtlich, für irgendwie beschaffene stetige konvexe Kurven, die unsere beiden Bedingungen (a) und (b) erfüllen. Damit ist der Satz 1 bewiesen.

Endlich läßt der Beweis auch klar erkennen, warum ein geradliniges Stück Teil der Gebietsgrenze ist: es liegt dies an dem Umstande, daß die konvexe Kurve durch den Nullpunkt gehen muß.

Diese Beschränkung fällt fort, wenn wir statt des Intervalls von 0 bis 1 das Intervall von $-\infty$ bis 1 betrachten. Setzen wir x statt $1-x$, so besteht also der einfachere

Satz 3. Es sei $\psi(x)$ eine solche nie zunehmende positive konvexe Kurve des Intervalles 0 bis ∞, daß das Integral

$$m^2 = \int_0^{\infty} \psi^2(x)\,dx$$

existiert. Dann ist stets

$$\psi(x) \leqq \frac{2}{3\sqrt{x}} \cdot m \qquad (0 < x).$$

Ein zweites geradliniges Stück tritt auf, wenn wir annehmen, daß die konvexe Funktion $\psi(x)$ des Satzes 1 für $x = 1$ einen bestimmten endlichen Wert Am nicht überschreiten kann, wie es tatsächlich der Fall ist.

Wir erhalten folgenden eingehenderen

Satz 4. Ist es sicher, daß der Fehler innerhalb der Grenzen $\pm A.m$ liegt, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler innerhalb der Grenzen $\pm y.m$ liege ($y \leqq A$), für y kleiner als $\sqrt{\frac{4}{3}}$ größer als $y\sqrt{\frac{1}{3}}$, für y größer als $\sqrt{\frac{4}{3}}$ und kleiner als $\frac{2}{3}A$ größer als $1 - \frac{4}{9y^2}$, für y größer als $\frac{2}{3}A$ und kleiner als A größer als $1 - \frac{3}{A^3}(A-y)$. Hierbei ist notwendig A größer als $\sqrt{3}$. In allen Beziehungen kann auch Gleichheit eintreten.

In der Tat ist das Gebiet der konvexen Kurve $y = \psi(x)$ unter der Nebenbedingung $1 = \int_0^1 \psi^2(x)\,dx$ jetzt außer durch $y = \sqrt{3}.x$ und $y = \frac{2}{3\sqrt{1-x}}$ auch noch durch die vom Punkte ($x = 1$, $y = A$) an die Kurve $y = \frac{2}{3\sqrt{1-x}}$ gelegte Tangente begrenzt, welche die Gleichung, unter (x_1, y_1) den Berührungspunkt verstanden,

$$\frac{A-y}{1-x} = y_1' = \tfrac{1}{3}(1-x_1)^{-\frac{3}{2}}$$

besitzt. Infolge von

$$\frac{A-y_1}{1-x_1} = \tfrac{1}{3}(1-x_1)^{-\frac{3}{2}}$$

ist

$$A = y_1 + \tfrac{1}{3}(1-x_1)^{-\frac{1}{2}} = (1-x_1)^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{3}{2}y_1,$$

also ist

$$\frac{A-y}{1-x} = \frac{A^3}{3}$$

die definitive Gleichung. Hieraus folgt für alle konvexen Kurven, welche der genannten Bedingung genügen,

$$y \leqq + A - \frac{A^3}{3}(1-x) \quad \text{für } x \geqq x_1$$

oder

$$x \geqq 1 - \frac{3}{A^3}(A-y) \quad \text{für } y \geqq y_1, \text{ d. h. für } y \geqq \tfrac{2}{3}A.$$

Man bemerkt sofort, daß

$$A \geqq \sqrt{3}$$

ist, denn im Intervall von $\frac{2}{3}$ bis 1 wäre anderenfalls $y = \sqrt{3}\,.\,x$ größer als die Grenze $A - \frac{A^3}{3}(1-x)$, also wäre $\int_0^1 \psi^2(x)\,dx$ kleiner als $\int_0^1 3\,.\,x^2\,dx$, d. h. kleiner als 1, was zu unseren Voraussetzungen im Widerspruch steht.

Man sieht also, daß das fragliche Gebiet von einem geradlinigen, einem krummlinigen und einem zweiten geradlinigen Stück begrenzt ist, und daß nur für $A = \sqrt{3}$ der krummlinige Teil verschwindet.

2.

Um den zweiten Satz zu beweisen, bilden wir

$$\int_0^1 (\psi_1^4(x) - \psi_2^4(x))\,dx = \int_0^1 (\psi_1^2(x) + \psi_2^2(x))\,(\psi_1^2(x) - \psi_2^2(x))\,dx,$$

unter $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ zwei unseren Voraussetzungen (a) und (b) genügende positive konvexe Kurven verstanden.

Schneidet nun, wie wir weiter voraussetzen wollen, $\psi_1(x)$ die Kurve $\psi_2(x)$ nur in einem einzigen Punkt $x = \alpha$ und ist $\psi_1(x) \geqq \psi_2(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq \alpha$, im Intervall $\alpha \leqq x \leqq 1$ daher $\psi_1(x) \leqq \psi_2(x)$ (der Fall, daß $\psi_2(x)$ für $x = \alpha$ die Kurve $\psi_1(x)$ nur berührt und sonst überall unterhalb von $\psi_1(x)$ bleibt, kann wegen (b) offenbar nicht vorkommen), so zerfällt unser Integral in einen positiven Teil $\int_0^\alpha (\psi_1^4 - \psi_2^4)\,dx$ und einen negativen Teil $\int_\alpha^1 (\psi_1^4 - \psi_2^4)\,dx$. Da ψ_1 und ψ_2 ständig zunehmende Funktionen sind, so ist auch

$\psi_1^2 + \psi_2^2$ monoton zunehmend, und wir erhalten daher

$$\int_0^1 (\psi_1^4(x) - \psi_2^4(x))\, dx \leqq (\psi_1^2(\alpha) + \psi_2^2(\alpha)) \int_0^1 (\psi_1^2(x) - \psi_2^2(x))\, dx,$$

und die Bedingung (b) ergibt

$$\int_0^1 \psi_1^4(x)\, dx \leqq \int_0^1 \psi_2^4(x)\, dx.$$

Das Minimum des Integrals $\int_0^1 \psi_1^4(x)\, dx$ erhalten wir daher, wenn wir für $\psi(x)$ eine Kurve wählen, die alle zulässigen Kurven nur einmal schneidet. Die einzige solche Kurve ist aber die Gerade $y = \sqrt{3}\,.\,x$, und für diese ist der Integralwert gleich $\frac{9}{5}$. Hiermit ist nicht nur der Satz 2 bewiesen, sondern auch gezeigt, daß die Grenzen exakt sind. Geben wir die Normierung von $\psi(x)$ auf, so ergibt sich der Satz in der Form

$$\int_0^1 \psi^4(x)\, dx \geqq \frac{9}{5}\left(\int_0^1 \psi^2(x)\, dx\right)^2.$$

Das hier zur Auffindung des Extremums von $\int_0^1 \psi^4(x)\, dx$ angewandte Verfahren läßt sich offenbar bei anderer Normierung von $\psi(x)$ allgemein auf das Integral $\int_0^1 \psi(x)^n\, dx$ für ganzzahliges n anwenden.

3.

Für den Satz 2 läßt sich leicht ein vom Beweis des Satzes 1 unabhängiger Beweis angeben. Wir gehen dabei auf die ursprüngliche Form der Integrale zurück und verstehen unter $\varphi(x)$ eine mit wachsendem absoluten Betrage von x abnehmende oder wenigstens nie zunehmende stets positive Funktion. Es ist keine Beschränkung, wenn wir annehmen, daß $\varphi(x)$ eine gerade Funktion, d. h. $\varphi(x) = \varphi(-x)$ ist, denn wäre dies nicht der Fall, so betrachten wir statt $\varphi(x)$ nur die gerade Funktion $\dfrac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2}$. Wir wollen weiter voraussetzen, daß $\varphi(x)$ einmal differenzierbar

sei. Setzt man dann allgemein für beliebiges nicht negatives m

$$K_m(x) = \int_0^x \varphi(\xi)\,\xi^m\,d\xi,$$

so ist

$$(m+1)\,K_m(x) = \varphi(x)\,x^{m+1} - \int_0^x \varphi'(\xi)\,\xi^{m+1}\,d\xi.$$

Bildet man nun mit zwei beliebigen Zahlen s und t die quadratische Form

$$(2m+n+1)\,K_{2m+n}(x)\,s^2 + 2\,(m+n+1)\,K_{m+n}(x)\,st + (n+1)\,K_n(x)\,t^2,$$

so ist diese identisch gleich

$$\varphi(x)\,x^{n+1}\,(x^m s + t)^2 - \int_0^x \varphi'(\xi)\,\xi^{n+1}\,(\xi^m s + t)^2\,d\xi.$$

Unter unseren Voraussetzungen ist aber $\varphi'(\xi)$ stets negativ oder Null, unsere quadratische Form ist daher, da $x > 0$ sein soll, stets positiv oder, und das nur bei überall verschwindendem $\varphi'(\xi)$, d. h. konstantem $\varphi(x)$, für einzelne s und t Null, d. h. sie ist positiv definit oder semidefinit, und ihre Diskriminante kann daher nicht negativ sein.

Wir erhalten so den

Satz 5. Ist $\varphi(x)$ eine nie zunehmende positive Funktion und ist

$$K_m(x) = \int_0^x \varphi(\xi)\,\xi^m\,d\xi,$$

so ist die quadratische Form

$$(2m+n+1)\,K_{2m+n}\,s^2 + 2\,(m+n+1)\,K_{m+n}\,st + (n+1)\,K_n\,t^2$$

positiv definit oder semidefinit, d. h. es ist

$$(2m+n+1)\,K_{2m+n}\,.\,(n+1)\,K_n - (m+n+1)^2\,K_{m+n}^2 \geqq 0.$$

Ist nun $\varphi(x)$ eine Fehlerfunktion und dehnen wir die Integration über das ganze Fehlerintervall aus, so erhalten wir, da dann

$$2K_0 = \int_{-a}^{+a} \varphi(\xi)\,d\xi = 1;\quad 2K_2 = \int_{-a}^{+a} \varphi(\xi)\,\xi^2\,d\xi = m^2;$$

$$2K_4 = \int_{-a}^{+a} \varphi(\xi)\,\xi^4\,d\xi = n^4$$

ist, aus unserem Satz 5 als Spezialfall für $n = 0$, $m = 2$ den zweiten Gaußschen Satz

$$5 n^4 \geqq 9 m^4.$$

Der Beweis zeigt wieder, daß die Grenzen der Ungleichung exakt sind.

Beiträge zur Mathematischen Statistik III.

(Aus dem Seminar von F. Bernstein, Göttingen.)

Zur Methode der kleinsten Quadrate.

Von

S. Halberstadt.

Vorgelegt durch Herrn Lexis in der Sitzung vom 9. Mai 1914.

Die vorliegende Arbeit entstand im Anschluß an Vorlesungen, die Herr Prof. Bernstein im Wintersemester 1913/14 über die Methode der kleinsten Quadrate gehalten hat. Es handelt sich darum, eine möglichst klare und knappe Übersicht von den algebraischen Operationen zu geben, auf denen die Methode der kleinsten Quadrate beruht.

Zu diesem Zweck entwickele ich im ersten Teile dieser Arbeit einen Kalkül mit rechteckigen Matrizen, für den das assoziative Gesetz nicht gilt. Im zweiten Teil werden mit seiner Hülfe die wesentlichen algebraischen Resultate von Gauß [1]) zur Darstellung gebracht.

I. Über rechteckige Matrizen.

Seien $m < n$ zwei fest gegebene ganze Zahlen. Wir betrachten rechteckige Matrizen von folgendem Typus:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot\,\cdot & a_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \cdot\,\cdot & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Aus zwei solchen Matrizen A und A leiten sich zwei neue ab:

$$A\mathrm{A} = \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}\,\alpha_{k\nu}\right)\left({i \atop k} = 1,\ldots,m\right);\quad \overline{A\mathrm{A}} = \left(\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu i}\,\alpha_{\mu k}\right)\left({i \atop k} = 1,\ldots,n\right).$$

---

1) Cf. Carl Friedrich Gauß, Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate. Deutsch von Börsch und Simon, Berlin 1887.

$A\mathrm{A}$ ist eine quadratische Matrix Q_m vom Grade m, $\overline{A\mathrm{A}}$ eine solche Q_n des Grades n. Eine rechteckige Matrix soll durch das Zeichen R angedeutet werden. Die zu A konjugierte Matrix werde, wie üblich, mit A' bezeichnet. Endlich gelte folgende Regel: Wird $\left.\begin{matrix}\text{zeilen-}\\ \text{spalten-}\end{matrix}\right\}$ weise komponiert, so soll die 1. $\left.\begin{matrix}\text{Zeile}\\ \text{Spalte}\end{matrix}\right\}$ der 1. Komponente die 1. $\left.\begin{matrix}\text{Zeile}\\ \text{Spalte}\end{matrix}\right\}$ der resultierenden Matrix erzeugen. Nach demselben Verfahren werden auch quadratische Matrizen mit rechteckigen und untereinander komponiert.

Sätze über drei Matrizen:

1. A, A_1, A_2 seien R,

$$A\,\overline{(A_1 A_2)} = \overline{A_2 (A_1 A)}$$ [1];

2. A, A seien R, B sei Q_m,

a) $(AB)\,\mathrm{A} = (A\mathrm{A})\,B$,

b) $\mathrm{A}'\,\overline{(BA)} = (\mathrm{A}'B)\,A' = \overline{A\,(B\mathrm{A}')}$;

3. A, A seien R, C sei Q_n,

a) $(AC)\,\mathrm{A} = A\,(\mathrm{A}C')$,

b) $(AC)\,\mathrm{A} = (A\mathrm{A})\,C$;

4. A sei R, B, $\mathbf{B}$ seien Q_m,

$$A'(B\mathbf{B}) = (A'B')\,\mathbf{B};$$

5. A sei R, C, Γ seien Q_n,

$$(AC)\,\Gamma = A\,(\Gamma C');$$

6. A sei R, B sei Q_m, C sei Q_n,

$$\overline{(AB)}\,C = \overline{(AC)}\,\overline{B};$$

7. Sind A, A_1, A_2 gleichartige quadratische Matrizen, so gilt der Satz:

$$A\,(A_1 A_2) = (AA_2')\,A_1.$$

Diesen Sätzen seien folgende Bemerkungen hinzugefügt:

1) Jede Gleichung ist rückwärts lesbar.

2) In der Hauptoperation jeder Gleichung dürfen gleichzeitig rechter und linker Hand die Komponenten vertauscht werden.

---

1) Seien a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} die Elemente von A, A_1, A_2, so sind die Elemente von $A_1 A_2$ folgende $f_{ki} = \sum b_{\mu i}\, c_{\mu k}$ (i gibt die Zeile, k die Spalte an). Ebenso die Elemente von $A_1 A$ folgende $g_{ik} = \sum b_{i\nu}\, a_{k\nu}$. $AF = \overline{A_2 G}$ hat die Elemente: $\sum_{\mu,\nu} a_{k\nu}\, b_{\mu\nu}\, c_{\mu i}$.

3) Sind M_1, M_2 irgend zwei Matrizen von gleichen oder verschiedenen Typen, so ist

a) $\overline{M_1}\,\overline{M_2} = M_2' M_1'$,
b) $(M_1 M_2)' = M_2 M_1$.

II. Anwendung des Kalküls auf die Methode der kleinsten Quadrate.

§ 1. Algebraische Lösung des ersten Minimalproblems.

In der Methode der kleinsten Quadrate stellt man sich folgende Aufgabe[1]):

Gegeben sind n Linearformen für $m < n$ Unbekannnte:

$$\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu k} x_\mu \qquad (k = 1, 2, .., n).$$

Ihnen entsprechen n beobachtete Werte $l_1, .., l_n$ und n Fehler:

$$\Delta_k = \sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu k} x_\mu - l_k \qquad (k = 1, .., n).$$

Den Unbekannten $x_1, .., x_m$ sollen solche Werte beigelegt werden, daß $\sum_{k=1}^{n} \Delta_k^2$ möglichst klein wird.

Es ist evident, daß die x_ι sich als Linearformen der l_i ergeben werden:

$$x_\iota = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{i\nu} l_\nu.$$

An diese Bemerkung knüpft sich eine zweite Formulierung des Grundproblems unserer Methode:

Die Matrix A der mn Koeffizienten α_{ik} soll folgenden Anforderungen genügen:

1. $A\mathrm{A} = E_m$ (E_m die Einheitsmatrix vom Grade m),

2. $\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\iota\nu}^2 = \text{Min.}$ $(i = 1, .., m)$.

Die Beantwortung der aufgeworfenen Fragen liefert der folgende

---

1) Vgl. Gauß, l. c. p. 23.

Satz: Ist die zu den Linearformen $\sum a_{\mu k} x_\mu$ gehörige Matrix A genau vom Range m, so ist die Matrix A in beiden Fällen eindeutig bestimmt[1]) durch die Gleichung:

$$\overline{\mathrm{A}^* A^2} = A. \tag{1}$$

Beweis (für das erste Minimalproblem): Sei X die quadratische Matrix:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

L die rechteckige Matrix:

$$\begin{pmatrix} l_1 & 0 & \dots & 0 \\ l_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

so ist:

$$X = \mathrm{A} L. \tag{2}$$

Mit A bezeichnen wir die rechteckige Matrix:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

mit C die Matrix $\overline{\mathrm{A} A}$. Es gilt die Gleichung:

$$A = L(C - E_n), \tag{3}$$

wo E_n die Einheitsmatrix n-ten Grades darstellt. Daraus folgt ohne Mühe:

$$A^2 = [A(C' - E_n)]L = [L(C' - E_n)^2]L. \quad \text{(Sätze 3a, 5)}$$

Die Matrix $(C' - E_n)^2$ heiße Γ. Es resultiert die Darstellung:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 = \sum_{\varrho, \sigma = 1}^{n} \gamma_{\varrho\sigma} l_\varrho l_\sigma.$$

Aus $C' E_n = C'$, $E_n C' = C$ folgt noch:

$$\Gamma = C'^2 - C - C' + E_n. \tag{4}$$

---

1) Wenn A vom Range m ist, so ist die Determinante $|A^2| \neq 0$ und jede Zeile von A* die eindeutige Lösung eines Systems von m linearen Gleichungen mit der Determinante $|A^2|$.

Zerlegen wir die willkürliche Matrix A in zwei Summanden $A^* + A^{**}$, wo A^* die Lösung der Gleichung (1) bedeutet, A^{**} beliebig wählbar ist, so entsprechen dem die Gleichungen:

$$C = C^* + C^{**}, \quad C^* = \overline{A^* A},$$
$$C' = C'^* + C'^{**}, \quad C^{**} = \overline{A^{**} A},$$
$$\Gamma = (C'^* + C'^{**} - E_n)^2$$
$$= (C'^* - E_n)^2 + C'^{**2} + C'^* C'^{**} + C'^{**} C'^* - C^{**} - C'^{**}.$$

Auf Grund der Sätze 3b und 1 von I ergibt sich:

$$C'^* C'^{**} = C'^* \overline{A A^{**}} = \overline{A^{**}(A C'^*)},$$
$$A C'^* = A(\overline{A A^*}) = \overline{A^* A^2} = A \text{ (Gleichung (1))},$$
$$C'^* C'^{**} = \overline{A^{**} A} = C^{**}.$$

Durch Übergang zu den konjugierten Matrizen erhält man:

$$C'^{**} C'^* = C'^{**}$$

und endlich das fundamentale Resultat:

(5) $$\Gamma = (C'^* - E_n)^2 + C'^{**2}.$$

Damit ist die positiv-definite quadratische Form $\sum_{\varrho, \sigma = 1}^{n} \gamma_{\varrho\sigma} l_\varrho l_\sigma$ als Summe von zwei positiv-definiten quadratischen Formen dargestellt [1]).

Daraus folgt sofort: Für $A = A^*$ wird

$$\sum_{\varrho, \sigma = 1}^{n} \gamma_{\varrho\sigma} l_\varrho l_\sigma = \sum_{k=1}^{n} A_k^2$$

möglichst klein, denn dann ist die Matrix $C'^{**2} = 0$ und ebenso $C^{**} = 0$. Das ist folgendermaßen zu interpretieren:

Definieren wir die quadratische Matrix:

(6) $$X^{**} = A^{**} L,$$

so ist nach Satz 1

$$\overline{A X^{**}} = L(\overline{A^{**} A}) = L C^{**} = 0,$$

d. h. es bestehen für deren nichtverschwindende Elemente $x_1^{**}, \ldots, x_m^{**}$ die Relationen:

1) In unserm Kalkül entspricht jeder Matrix von der Form C^2 eine positiv-definite quadratische Form. Diese läßt sich so darstellen: $\sum_{\varrho=1}^{n} (\sum_{\sigma=1}^{n} c_{\sigma\varrho} l_\sigma)^2$

$$\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu k} x_{\mu}^{**} = 0 \qquad (k = 1, .., n). \tag{7}$$

Weil A vom Range m ist, folgt daraus:

$$x_{\mu}^{**} = 0 \qquad (\mu = 1, .., m).$$

Der Zerlegung $\mathrm{A} = \mathrm{A}^* + \mathrm{A}^{**}$ entspricht:

$$X = X^* + X^{**}. \tag{8}$$

Die Werte der Unbekannten $x_1, .., x_n$ sind also durch unsere Forderungen eindeutig festgelegt.

Für die Matrix A^{**} schließt man aus (6) die Gleichungen:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\mu\nu}^{**} l_{\nu} = 0 \qquad (\mu = 1, .., m). \tag{9}$$

Da die allgemeine Matrix A und folglich A^{**} nicht von den Größen $l_1, .., l_n$ abhängen soll, so folgt das identische Verschwinden von A^{**}.

Damit ist der erste Teil des aufgestellten Theorems vollinhaltlich bewiesen.

§ 2. Ergänzende Betrachtungen.

Zu dieser Lösung fügen wir noch einige Bemerkungen über die wichtige, dort auftretende Matrix C'^* hinzu.

Es ist:

$$C'^* = \overline{A}\overline{\mathrm{A}^*},$$

$$AC'^* = A \tag{10}$$

nach Satz 1 und Gleichung (1); ferner:

$$C'^* = \overline{A\mathrm{A}^*} = \overline{(AC'^*)\mathrm{A}^*} = \overline{(A\mathrm{A}^*)}\, C'^* = C'^{*2} \tag{11}$$

auf Grund von 3b. Endlich ist leicht einzusehen, daß die Matrix C'^* genau vom Range m sein wird.

Die erwähnten drei Eigenschaften sind für die Matrix C'^* charakteristisch. Doch soll der Kürze wegen der Beweis für diese Tatsache unterdrückt werden.

Die zweite Eigenschaft enthält als spezielle Folgerung: $C^* = C'^*$ ist eine symmetrische Matrix.

Auf Grund dieser Bemerkungen reduziert sich die gemäß Gleichung (4) zu definierende Matrix

$$\Gamma^* \text{ auf } E_n - C^*.$$

Diese Matrix genügt 1) der Gleichung $A\Gamma^* = 0$, 2) der Bedingung $\Gamma^{*2} = \Gamma^*$, 3) ist Γ^* genau vom Range $n-m$.

Die Behauptung 1) liegt auf der Hand, 2) ergibt sich unmittelbar daraus, daß $C^* = C^{*2} = C'^*$ ist, 3) erhält man durch folgende Schlußweise: Nach einem bekannten Satz über quadratische Matrizen besitzt C^{*2} die charakteristischen Wurzeln $\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2$, wenn $\omega_1, \ldots, \omega_n$ die charakteristischen Wurzeln von C^* sind. $C^* = C^{*2}$ besagt also: Wenn mit $\omega_1, \ldots, \omega_m$ die nichtverschwindenden charakteristischen Wurzeln von C^* bezeichnet werden, so ist:

$$\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_m = (\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_m)^2 = +1.$$

Ferner ist kein $\omega_i > 1$; denn, transformieren wir die Form C^* mittels einer orthogonalen Substitution auf die Hauptaxen:

$$C^* = \omega_1 y_1^2 + \cdots + \omega_m y_m^2,$$

so geht die positiv-definite Form Γ^* in die folgende über:

$$(1-\omega_1) y_1^2 + \cdots + (1-\omega_m) y_m^2 + y_{m+1}^2 + \cdots + y_n^2$$

und folglich ist:

$$\omega_i \leqq 1 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Mithin kann auch kein $\omega_i < 1$ sein; sonst wäre:

$$\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_m < 1.$$

Es ist also:

$$\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_m = 1.$$

Die Form Γ^* ist als Summe von $(n-m)$ linear unabhängigen Quadraten dargestellt, also genau vom Range $n-m$. Damit ist 3) bewiesen.

Diese drei Eigenschaften legen die Matrix Γ^* eindeutig fest. Denn aus der Annahme des Gegenteils folgte, daß die Matrix C^* durch ihre Eigenschaften nicht eindeutig bestimmt wäre, was doch nicht zutrifft.

Nebenbei hat sich noch das interessante Resultat ergeben: C^* wie Γ^* besitzen als charakteristische Wurzeln nur die Werte 0 und 1 in den Vielfachheitsgraden $n-m$ bez. m und m bez. $n-m$.

Endlich sei noch folgende Tatsache erwähnt. Die Summe der Diagonalelemente von Γ^* ist unabhängig von der Matrix A, nämlich [1]

$$n-m.$$

1) Vgl. Gauß, l. c. p. 48.

§ 3. Beweis für das zweite Minimalproblem.

Wir gehen dazu über, den zweiten Teil unseres Haupttheorems nachzuweisen.

Die Matrix A ist von vornherein der Bedingung $A\mathrm{A} = E_m$ unterworfen. Wir beweisen zunächst, daß die durch (1) definierte Matrix A^* dieser Bedingung genügt: Nach (1) ist:

$$A^2 = \overline{\mathrm{A}^*\,\overline{A^2}}\,.\,A = \overline{(\mathrm{A}^*A)\,\overline{A^2}} \text{ (Satz 2a).}$$

Die eindeutige[1]) Lösung dieser Gleichung ist offenbar:

$$(12) \qquad \mathrm{A}^*A = A\mathrm{A}^* = E_m\,{}^{2)}.$$

Die Differenz $\mathrm{A}^{**} = \mathrm{A} - \mathrm{A}^*$ genügt also der Gleichung:

$$(13) \qquad A\mathrm{A}^{**} = 0.$$

Daraus ergibt sich:

$$0 = \mathrm{A}^{**}A = \mathrm{A}^{**}.(\overline{\mathrm{A}^*}\,\overline{A^2}) = \overline{A^2(\overline{\mathrm{A}^*}\,\mathrm{A}^{**})}.$$

Da nach Voraussetzung die Determinante von A^2 nicht verschwindet, so folgt die wichtige Gleichung:

$$(14) \qquad \mathrm{A}^*\mathrm{A}^{**} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{i\nu}^2 = \sum \alpha_{i\nu}^{*2} + \sum \alpha_{i\nu}^{**2} + 2\sum \alpha_{i\nu}^{*}\,\alpha_{i\nu}^{**} = \sum \alpha_{i\nu}^{*2} + \sum \alpha_{i\nu}^{**2}$$
$$(i = 1, .., m).$$

Das besagt: die fraglichen Summen erreichen ihr Minimum für:

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}^*, \quad \mathrm{A}^{**} = 0.$$

Also löst der Ansatz (1) auch das zweite Minimalproblem.

§ 4. Eine Korrektionsaufgabe.

Im Anschluß hieran sind noch einige weitere Probleme zu behandeln, zunächst die Frage, wie man die Werte der Unbekannten, also die Matrix X, abzuändern hat, wenn nachträglich eine neue Annäherungsgleichung hinzutritt[3]).

Der neuen Beobachtungsgleichung entsprechen die Größen:

$$a_{\mu,\,n+1}\,;\ \alpha_{\mu,\,n+1} \qquad (\mu = 1, .. m).$$

Wir verstehen von jetzt ab unter A, A die früheren, doch

---

1) Vgl. Fußnote 1) von S. 4.

2) s. Gauß, l. c. p. 30.

3) Gauß, l. c. p. 41.

durch eine $(n+1)$-te Nullzeile ergänzten Matrizen. Außerdem definieren wir zwei neue Matrizen vom selben Typus durch die Gleichungen:

$$(15)\qquad A_1 = \begin{Bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \\ a_{1,n+1} & \dots & a_{m,n+1} \end{Bmatrix}; \quad L_{n+1} = \begin{Bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{1,n+1} & \dots & a_{m,n+1} \end{Bmatrix},$$

sodaß:

$$(16)\qquad \begin{aligned} A_1 &= A + L_{n+1}, \\ A_1^2 &= A^2 + L_{n+1}^2 \end{aligned}$$

ist. Wie früher A, ist auch A_1 genau vom Range m. Folglich definiert die Gleichung:

$$(17)\qquad \overline{\mathrm{A}_1 A_1^2} = A_1$$

eindeutig die rechteckige Matrix A_1. Endlich sei

$$\mathrm{A}_1 - \mathrm{A} = \mathrm{A}^*,$$

$$(18)\qquad A_{n+1} = \begin{Bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \\ \alpha^*_{1,n+1} & \dots & \alpha^*_{m,n+1} \end{Bmatrix}.$$

Aus (17) und (16) folgt wegen $\overline{\mathrm{A}A^2} = A$:

$$(19)\qquad \overline{\mathrm{A}^*(A^2 + L_{n+1}^2)} = L_{n+1} - \overline{\mathrm{A}L_{n+1}^2} = L_{n+1}(E_{n+1} - \overline{L_{n+1}\mathrm{A}}).$$

Dadurch ist die Korrektion A^* eindeutig bestimmt. Etwas übersichtlicher wird das Ergebnis, wenn man bemerkt, daß A^* sich zerlegen läßt in:

$$A_{n+1} - A_{n+1}(\overline{L_{n+1}\mathrm{A}}).$$

A_{n+1} genügt der einfachen Gleichung:

$$(20)\qquad \overline{A_{n+1}(A^2 + L_{n+1}^2)} = L_{n+1}.$$

Der Beweis ist nach Satz 6 leicht zu erbringen. Neu zu lösen sind also die Gleichungen (20).

Interessant ist die Tatsache, daß A^* im Sinne des Matrizenkalküls durch A_{n+1} teilbar ist.

Die Änderungen der Unbekannten selbst sind leicht anzugeben. Definieren wir L, L^* analog wie A, A^*, so ist die verbesserte Matrix:

$$(21)\qquad X_1 = X + A_{n+1}(L^* - L(\overline{\mathrm{A}L_{n+1}})).$$

Die Matrix Λ_{n+1} entspricht dem auch bei Gauß deutlich zu Tage tretenden Proportionalitätsfaktor [1]). — Die Gewichte [2]) bestimmen sich mittels der Diagonalelemente von A_1^2.

Benutzt man die Zerlegungen:

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{A} + \overline{\mathrm{A}^*}, \quad \mathrm{A}^* = \Lambda_{n+1} - \Lambda_{n+1}\overline{(L_{n+1}\,\mathrm{A})},$$

so lehrt eine kurze Rechnung [3]), daß:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_1^2 = \mathrm{A}^2 + \Lambda_{n+1}^2 \Big(1 + \sum_{\varrho,\,\sigma=1}^{m} \alpha_{\varrho\sigma}^{(2)} a_{\varrho,\,n+1} a_{\sigma,\,n+1}\Big) \\ - \overline{(L_{n+1}\,\mathrm{A}^2)}\,\Lambda_{n+1} - \Lambda_{n+1}\,\overline{(L_{n+1}\,\mathrm{A}^2)}.\end{aligned} \tag{22}$$

Setzen wir:

$$\sum_{\varrho=1}^{m} \alpha_{\mu\varrho}^{(2)} a_{\varrho,\,n+1} = F_\mu, \qquad (\mu = 1, \ldots, m),$$

so folgt hieraus für die Änderung der Gewichtsfunktionen:

$$\begin{aligned}\frac{F_\mu}{1 + \Sigma F_\sigma a_{\sigma,\,n+1}} \left[\frac{F_\mu}{1 + \Sigma F_\sigma a_{\sigma,\,n+1}} (1 + \Sigma F_\sigma a_{\sigma,\,n+1}) - 2F_\mu\right] \\ = -\frac{F_\mu^2}{1 + \Sigma F_\sigma a_{\sigma,\,n+1}}.\end{aligned}$$

Man stützt sich zweckmäßig auf die explizite Darstellung [4]):

$$\Lambda_{n+1} = \frac{1}{1 + \Sigma F_\sigma a_{\sigma,\,n+1}} \overline{(L_{n+1}\,\mathrm{A}^2)}. \tag{23}$$

Die Gewichte selber ergeben sich erst als reziproke Werte.
Die $(n+1)$-te Linearform nimmt für die ohne ihre Kenntnis bestimmten Werte der Unbekannten folgenden Ausdruck:

$$\sum_{\mu,\,\nu} a_{\mu,\,n+1}\,\alpha_{\mu\nu}\,l_\nu$$

an. Durch unsere Neubestimmung ändert er sich um den Betrag:

$$\sum_{\mu,\,\nu} a_{\mu,\,n+1}\,\alpha_{\mu\nu}^*\,l_\nu.$$

Er ist das einzige nichtverschwindende Element der Matrix $L_1\overline{(\mathrm{A}^* L_{n+1})}$

$$\overline{\mathrm{A}^* L_{n+1}} = \overline{\Lambda_{n+1} L_{n+1}} - (\overline{\Lambda_{n+1}\,\overline{L_{n+1}}\,\mathrm{A})\,L_{n+1}}.$$

1) Gauß, l. c. p. 43.
2) ibidem.
3) $\alpha_{\varrho\sigma}^{(2)}$ seien die Elemente von A^2.
4) Diese ist leicht mittels (20) zu verifizieren.

Auf Grund von (23) ergibt sich leicht:

$$\overline{A_{n+1} L_{n+1}} = \frac{1}{1+\omega} \begin{pmatrix} 0 \, . \, . \, 0 \\ 0 \, . \, . \, 0 \\ 0 \, . \, . \, \omega \end{pmatrix},$$

wenn:

$$\omega = \sum_{\sigma=1}^{m} a_{\sigma, n+1} F_\sigma = \sum_{\varrho, \sigma} a_{\varrho, n+1} a_{\sigma, n+1} \alpha_{\varrho\sigma}^{(2)}$$

gesetzt wird [1]), und ähnlich:

$$\overline{\mathrm{A}^* L_{n+1}} = \frac{\omega}{1+\omega} \begin{Bmatrix} 0 \, . \, . -\Sigma a_{\mu, n+1} \alpha_{\mu 1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 \, . \, . \, 0 \;\; \Sigma a_{\mu, n+1} \alpha_{\mu n} \\ 0 \, . \, . \, . \qquad 1 \end{Bmatrix}$$

und folglich:

$$\Sigma a_{\mu, n+1} \alpha_{\mu\nu}^{*} \bar{l}_\nu = \frac{\omega}{1+\omega} (\Sigma a_{\mu, n+1} \alpha_{\mu\nu} l_\nu - l_{n+1}), \tag{24}$$

d. h. der ursprüngliche $(n+1)$-te Fehler f_{n+1} geht über in:

$$\frac{f_{n+1}}{1+\omega}.$$

Endlich sind noch die Abänderungen anzugeben, welche die Summe der Fehlerquadrate erleidet. Das ist identisch mit der Aufgabe, die neuen Werte der Matrizen C und Γ zu finden [2]).

1. Der Summe von n Quadraten entspricht die Matrix:

$$C^* = \overline{(\mathrm{A}+\mathrm{A}^*) A}.$$

Unter Berücksichtigung der wichtigen Relation [3]):

$$\mathrm{A}C = \mathrm{A} \tag{25}$$

findet man:

$$C^* = C + \frac{1}{1+\omega} \{ \overline{L_{n+1} \mathrm{A}} - \overline{(L_{n+1} \mathrm{A})^2} \}.$$

Daraus wird:

$$\Gamma^* = C'^{*2} - C^* - C'^* + E_{n+1}$$

und wegen:

$$C\overline{\mathrm{A}L_{n+1}} = \overline{L_{n+1} \mathrm{A}}$$

---

1) Gauß, l. c. p. 42.

2) Unter C und Γ sind die früheren, durch eine $(n+1)$-te Nullzeile und Nullspalte ergänzten Matrizen zu verstehen.

3) $\mathrm{A}\,\overline{(A\mathrm{A})} = \overline{\mathrm{A}(A\mathrm{A})} = \overline{\mathrm{A}E_m} = \mathrm{A}$.

$$(26) \qquad \Gamma^* = \Gamma + \frac{\omega}{(1+\omega)^2}\left(\overline{(L_{n+1}\mathrm{A})^2} - \overline{L_{n+1}\mathrm{A}} - \overline{\mathrm{A}L_{n+1}} + E\right),$$

wenn:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & .. & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & .. & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Q_{n+1}-Matrix bedeutet.

Die Quadratsumme hat sich also um $\frac{\omega}{(1+\omega)^2} K^2$ vergrößert, wenn K der auf Grund von A berechnete Wert des $(n+1)$-ten Fehlers ist [1]).

2. Der Summe von $(n+1)$ Quadraten entsprechen die Matrizen:

$$C_1 = \overline{(\mathrm{A}+\mathrm{A}^*)(A+L_{n+1})}, \quad \Gamma_1 = E_{n+1} - C_1,$$
$$C_1 = C^* + \overline{(\mathrm{A}+\mathrm{A}^*)L_{n+1}}.$$

Schon oben p. 11 fanden wir:

$$\overline{\mathrm{A}^* L_{n+1}} = \frac{\omega}{1+\omega}\left(E - \overline{\mathrm{A}L_{n+1}}\right),$$

also ist

$$(27) \quad \begin{cases} C_1 = C + \frac{1}{1+\omega}\left\{\overline{L_{n+1}\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{A}L_{n+1}} - \overline{(L_{n+1}\mathrm{A})^2} + \omega E\right\}, \\ \Gamma_1 = \Gamma + \frac{1}{1+\omega}\left\{\overline{(L_{n+1}\mathrm{A})^2} - \overline{L_{n+1}\mathrm{A}} - \overline{\mathrm{A}L_{n+1}} + E\right\}. \end{cases}$$

Dem entspricht [2]) die Änderung der Fehlerquadratsumme um:

$$\frac{1}{1+\omega} K^2.$$

§ 5. Der Fall der Bedingungsgleichungen [3]).

Sind die beobachteten Größen nicht unabhängig, so finden sich bei Gauß zwei Methoden, dieses Problem direkt zu behandeln.

Die erste Lösung ist auf den Fall zugestutzt, wo nur eine Unbekannte aus den Beobachtungen zu bestimmen ist. Sie beruht auf dem Gedanken, zu einer vorliegenden Funktion der Beob-

1) Gauß, l. c. p. 44.
2) Gauß, ib.
3) Gauß, l. c. p. 54 ff.

achtungsgrößen eine passend gewählte Funktion zu addieren, die für die beobachteten Werte auf Grund der Bedingungsgleichungen von der zweiten Ordnung verschwindet. Führt man diese Idee durch, so stößt man genau auf dasjenige Problem, das in § 1 dieser Arbeit gelöst wurde.

Wir wenden uns daher sofort zur zweiten Lösung, die auch zur Bestimmung mehrerer Unbekannten dienen kann. Die Zahl der beobachteten Größen sei, wie bisher, mit n bezeichnet; dagegen bedeute m im Folgenden die Anzahl der Bedingungsgleichungen, deren linke Seiten wir als lineare Funktionen der beobachteten Größen voraussetzen wollen.

Seien $\varLambda_1, .., \varLambda_n$ die beobachteten Größen, weiter:

$$0 = X_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \varLambda_\nu + x_\mu \qquad (\mu = 1, .., m)$$

die Bedingungsgleichungen, ferner $\lambda_1, .., \lambda_n$ die beobachteten Werte, sowie:

$$\mathfrak{A}_\mu = \sum a_{\mu\nu} \lambda_\nu + x_\mu,$$

so sind dadurch eine rechteckige Matrix A und zwei quadratische Matrizen:

$$(28) \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 .. X_m \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 .. \mathfrak{A}_m \\ 0 \end{pmatrix}$$

definiert. Wir versuchen, n Zahlen $\varepsilon_1, .., \varepsilon_n$ und entsprechend eine rechteckige Matrix:

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \\ : & 0 \\ \varepsilon_n & \end{pmatrix}$$

anzugeben, sodaß:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \varepsilon_\nu = \mathfrak{A}_\mu \qquad (\mu = 1, .., m),$$

also:

$$(29) \qquad AE = \mathfrak{A}$$

wird. Dann ist offenbar:

$$0 = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} (\lambda_\nu - \varepsilon_\nu) + x_\mu \qquad (\mu = 1, .., m),$$

d. h. die Korrektionen $-\varepsilon_\nu$ bewirken, daß die Bedingungsgleichungen exakt erfüllt sind.

Wir unterwerfen die ε_ν der weiteren Bedingung: $\sum \varepsilon_\nu^2 = \text{Min.}$ und behaupten:

Wenn die Matrix A genau vom Range m ist, so sind die ε_ν durch diese Forderungen eindeutig bestimmt.

Wir beweisen statt dessen einen noch etwas allgemeineren Satz, der dieselbe Behauptung für eine beliebige Matrix $\mathfrak{A}$ ausspricht.

Ist $\mathfrak{A}$ eine beliebige Q_m-Matrix, so gibt es eine und nur eine Matrix A, sodaß die Bedingungen erfüllt sind:

$$1.\quad A\mathrm{A} = \mathfrak{A},$$

$$2.\quad \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\mu\nu}^2 = \text{Min.} \qquad (\mu = 1, .., m).$$

Beweis: Sei $\overline{\mathrm{A}_0 A^2} = A$, so genügt die Matrix $\overline{\mathrm{A}_0 \mathfrak{A}}$ den gestellten Bedingungen. Denn 1) ist $A(\overline{\mathrm{A}_0 \mathfrak{A}}) = \overline{\mathfrak{A}(\mathrm{A}_0 A)} = \mathfrak{A}$ nach Satz 2a und einer früher bewiesenen Eigenschaft von A_0. 2) Sei A^* die Differenz irgend zweier Lösungen der Gleichung (1), so ist $A\mathrm{A}^* = 0$ und weiter:

$$0 = \overline{(A\mathrm{A}^*)\mathrm{A}_0^2} = \mathrm{A}_0\mathrm{A}^* \quad (\text{Satz } 2\text{a}),$$
$$0 = \overline{(\mathrm{A}_0\mathrm{A}^*)\mathfrak{A}} = \overline{(\mathrm{A}_0\mathfrak{A})}\mathrm{A}^* = \mathrm{A}\mathrm{A}^*.$$

Daraus folgt in bekannter[1]) Art die Minimumseigenschaft und Eindeutigkeit der Matrix A.

Gauß selbst operiert in etwas anderer Weise[2]). Nach ihm definieren wir eine Matrix A_1 durch die Gleichung:

$$(30) \qquad A_1 = \mathrm{A}_0 E,$$

wenn E irgend eine Lösung der Gleichung $AE = \mathfrak{A}$ ist. A_1 besitzt für alle derartigen E die feste Form: $\overline{\mathfrak{A}\mathrm{A}_0^2}$. An Stelle von E darf z. B. die Matrix der wahren Fehler:

$$E_1 = \begin{pmatrix} l_1 & \\ \vdots & 0 \\ l_n & \end{pmatrix}$$

oder die Matrix E treten.

Daraus folgt die Quadratsumme der ε_ν:

$$(31) \qquad E^2 = \overline{(\mathrm{A}_0\mathfrak{A})E} = \overline{(\mathrm{A}_0 E)\mathfrak{A}} \neq \overline{A_1\mathfrak{A}}.$$

Für A_1 hat man die unabhängige Definition:

$$(32) \qquad \overline{A_1 A^2} = \mathfrak{A},$$

und darauf gründet sich die Bestimmung:

1) Diese Arbeit, § 3.

2) Gauß, l. c. p. 62—65.

(33) $$E = \overline{AA_1},$$

der sich die Relation:

(34) $$\mathfrak{A} = AE$$

anfügt.

Mittels der Korrektion E ist dann leicht die Korrektion jeder Linearfunktion der beobachteten Größen anzugeben.

Gauß[1]) zerlegt den Korrektionsprozeß in zwei Teile. Unvollständig heißt eine Korrektion oder Ausgleichung, wenn sie in der Form $\overline{AA_1}$ enthalten ist, A_1 aber eine beliebige Matrix bezeichnet, vollständig, wenn A_1 wie vorhin bestimmt ist. Es gilt nun der

Satz: Die vollständige Ausgleichung von unvollständig ausgeglichenen Beobachtungen liefert dasselbe Ergebnis wie die vollständige Ausgleichung der ursprünglichen Werte.

Der Beweis ist sehr einfach. Es werde zunächst die unvollständige Korrektion $E_1 = \overline{AB}$ vorgenommen. Dann geht $\mathfrak{A}$ über in $\mathfrak{A} - AE_1$. Wenden wir darauf eine vollständige Ausgleichung an, so ergibt sich:

$$\overline{\mathrm{A}_0(\mathfrak{A} - AE_1)}$$

als ihr Ausdruck. Nun ist:

$$AE_1 = A(\overline{AB}) = \overline{BA^2}.$$

$$\overline{\mathrm{A}_0(AE_1)} = \overline{(\mathrm{A}_0 A^2)B} = \overline{AB} = E_1 \quad \text{(Satz 4).}$$

Die Gesamtkorrektion ist also:

$$E_1 + \overline{\mathrm{A}_0\mathfrak{A}} - E_1 = \overline{\mathrm{A}_0\mathfrak{A}}, \text{ w. z. b. w.}$$

Die vorstehenden Ausführungen dürften im wesentlichen ausreichen, die von Gauß erzielten algebraischen Resultate wiederzugeben.

---

1) Gauß, l. c. p. 74.

Beiträge zur Mathematischen Statistik IV.

Berechnung der Korrelation zwischen zwei Argumenten, für die nur die Häufigkeitskurve ihres Produktes gegeben ist.

Von

F. Bernstein.

Vorgelegt durch Herrn Lexis in der Sitzung vom 9. Mai 1914.

Vorbemerkung.

Die folgende Untersuchung entstand auf Grund einer Anregung aus der Praxis. Eine wichtige Größe zur Beurteilung des Gesundheitsstandes einer Gesamtheit bildet der Quotient aus Gewicht und Körpergröße der beobachteten Personen, und es existieren umfangreiche Statistiken dieser Größe bei verschiedenen Personengruppen. Die Verteilungskurve erweist sich, wie längst bekannt, als asymmetrisch. Herr Dr. Rietz in Berlin, welcher eine größere Zahl von Messungen im genannten Sinne bei Schulkindern ausgeführt hat, kam auf den Gedanken, diese Asymmetrie dadurch zu erklären, daß er die fragliche Größe, welcher die Dimension des Produkts zweier Längen gegeben werden kann, als Produkt zweier Variablen auffaßte, welche in positiver Korrelation zu ein-

ander stehen. Er wandte sich an den Verfasser mit der Bitte, die Häufigkeitskurven für die einzelnen Variablen zu bestimmen. Diese Aufgabe wurde vom Verfasser durchgeführt und die Formeln Herrn O. Wicke zur weiteren Bearbeitung der entstandenen Fragen übergeben, von dem die §§ 4 und 5 herrühren; die Formeln des § 5 wurden dann von Herrn W. S. Baer vereinfacht.

§ 1. Wir bezeichnen mit $\varphi(u)$ die gegebene Verteilungsfunktion, für die

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du = 1$$

sei, und setzen

$$u = xy. \tag{1}$$

Die Verteilungsfunktion $Z = Z(x, y)$ der in Korrelation[1]) stehenden Variablen x und y habe die Galtonsche Form

$$Z(x, y) = \frac{N}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left\{\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2xyr}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right\}}; \tag{2}$$

hierbei bedeuten:

N die Anzahl der überhaupt beobachteten Wertepaare x, y,
σ_1 und σ_2 die mittleren Fehler von x bzw. y,
r den Korrelationskoeffizienten zwischen x und y.

Hieraus folgt unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (1) und indem wir weiterhin anstelle von x und y als Integrationsvariable x und u nehmen, aus (2) der Ansatz

$$\varphi(u) = \underset{(xy=u)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}} \frac{Z(x,y)}{N}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z\left(x, \frac{u}{x}\right)}{N} D_{(x,u)}\,dx,$$

wo $D_{(x,u)} = \frac{1}{x}$ die Funktionaldeterminante ist; also

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left\{\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2ru}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{u^2}{\sigma_2^2 x^2}\right\}} \frac{1}{x}\,dx; \tag{3}$$

1) Im Folgenden legen wir die Korrelationslehre zu Grunde, wie sie in den klassischen Arbeiten von K. Pearson entwickelt worden ist. Den Leser verweisen wir auf das einführende Buch: Frequency-Curves and Correlation by Palin Elderton, C. a. E. Layton London, wo sich auch ausführliche Literaturnachweise finden.

wegen

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Z(x,y)}{N}\,dx\,dy = 1$$

ist für $\varphi(u)$ die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\,du = 1$$

erfüllt.

Der Ansatz (3) läßt sich bei beliebiger Wahl von $\varphi(u)$ durch Wahl der Konstanten der Funktion $Z(x, y)$ natürlich nicht exakt befriedigen. Es kann sich daher nur darum handeln, eine praktisch ausreichende Annäherung zu bestimmen. Diese denken wir uns dadurch definiert, daß wir fordern, daß die Momente der linken und rechten Seite von (3) von dem niedersten anfangend soweit als möglich zur Übereinstimmung gebracht werden. Für eine Übereinstimmung der sämtlichen Momente müßte $\varphi(u)$ bestimmte Bedingungen in diesen erfüllen, deren Aufstellung kaum noch Interesse bietet. Ebensowenig erörtern wir hier die naheliegende Frage, wie durch die Wahl einer Reihe mit unendlich vielen Konstanten für $Z(x, y)$ sich die genannten Bedingungen vermeiden lassen.

§ 2. Nehmen wir zunächst an, daß die Argumente x und y vom Nullpunkte der xy-Ebene aus gemessen werden, so ist das k-te Moment von $\varphi(u)$ definiert als

$$M_k = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\,u^k\,du = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Z(x,y)}{N}\,x^k y^k\,dx\,dy$$

(4)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\,x^k y^k\,e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left\{\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2xyr}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right\}}\,dx\,dy.$$

Zur Auswertung der rechten Seite integrieren wir zunächst nach der Variablen x und erhalten

$$M_k = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}y^k\,e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\,e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x}{\sigma_1}-\frac{ry}{\sigma_2}\right)^2}\,dx\,dy;$$

setzen wir $X = x - \frac{r\sigma_1 y}{\sigma_2}$, so folgt

$$M_k = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} y^k e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(X+\frac{r\sigma_1 y}{\sigma_2}\right)^k e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\frac{X^2}{\sigma_1^2}}\,dX\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} y^k e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}X^{k-i}\left(\frac{r\sigma_1 y}{\sigma_2}\right)^i e^{-\frac{X^2}{2(1-r^2)\sigma_1^2}}\,dX\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{r\sigma_1}{\sigma_2}\right)^i\int_{-\infty}^{+\infty} y^{k+i} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} X^{k-i} e^{-\frac{X^2}{2(1-r^2)\sigma_1^2}}\,dX\,dy.$$

Nun ist allgemein

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^\lambda e^{-\frac{u^2}{\mu^2}}\,du = \begin{cases} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\cdot(\mu^2)^{\frac{\lambda+1}{2}} & \text{für gerade } \lambda, \\ 0 & \text{für ungerade } \lambda, \end{cases}$$

wo $\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) = \sqrt{\pi},\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi},\ \frac{1.3}{2^2}\sqrt{\pi},\ \frac{1.3.5}{2^3}\sqrt{\pi}, \ldots$ für $\lambda = 0, 2, 4, 6, \ldots$

ist. Also geht unser Integral, falls $k+i$ und daher auch $k-i$ gerade sind, über in

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{r\sigma_1}{\sigma_2}\right)^i\int_{-\infty}^{+\infty} y^{k+i} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}\,\Gamma\left(\frac{k-i+1}{2}\right)\left(2(1-r^2)\sigma_1^2\right)^{\frac{k-i+1}{2}}\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{r^i\sigma_1^i}{\sigma_2^i}\left(2(1-r^2)\sigma_1^2\right)^{\frac{k-i+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k-i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+i+1}{2}\right)(2\sigma_2^2)^{\frac{k+i+1}{2}}$$

$$= \frac{(2\sigma_1\sigma_2)^k}{\pi}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}r^i(1-r^2)^{\frac{k-i}{2}}\Gamma\left(\frac{k-i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+i+1}{2}\right)$$

oder

$$(5)\quad M_k = \frac{(2\sigma_1\sigma_2 r)^k}{\pi}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\Gamma\left(\frac{k-i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+i+1}{2}\right)\left(\frac{1-r^2}{r^2}\right)^{\frac{k-i}{2}}$$

mit der Bedingung:

$k+i$ gerade.

Für $k = 1, 2, 3$ u. s. w. finden wir insbesondere

$$(6)\quad \begin{cases} M_1 = \sigma_1\sigma_2 r, \\ M_2 = \sigma_1^2\sigma_2^2(1+2r^2), \\ M_3 = \sigma_1^3\sigma_2^3(9r+6r^3) \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

§ 3. Fassen wir die Gleichungen (6) als Bestimmungsgleichungen für die Konstanten σ_1, σ_2 und r auf, so folgt aus den ersten beiden

$$(7)\qquad \begin{cases} \sigma_1^2 \sigma_2^2 = M_2 - 2M_1^2, \\ r^2 = \dfrac{M_1^2}{M_2 - 2M_1^2}. \end{cases}$$

Die beiden Konstanten σ_1 und σ_2 lassen sich im einzelnen nicht berechnen, da sie nach (5) in sämtlichen Momenten als Potenzen des Produktes $\sigma_1 \sigma_2$ auftreten; nur ihr Produkt $\sigma_1 \sigma_2$ sowie der Korrelationskoeffizient r zwischen den Variablen x und y sind bestimmbar.

§ 4. Wer verallgemeinern unsere Betrachtung, indem wir die bisher gemachte einschränkende Bedingung, daß die Argumente x und y vom Nullpunkte der xy-Ebene aus gemessen seien, fallen lassen. Bei beliebigem Nullpunkte ist das k-te Moment $\overline{M}_k$ von $\varphi(u)$ definiert als

$$(8)\qquad \begin{aligned} \overline{M}_k &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z(x, y)}{N}(x+x_0)^k (y+y_0)^k \, dx\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}(x+x_0)^k (y+y_0)^k e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left\{\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2xyr}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right\}} dx\, dy. \end{aligned}$$

Diese Integrale lassen sich ähnlich wie früher auswerten. Es ist nämlich

$$\overline{M}_k = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z(x, y)}{N} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p} x_0^p \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} y^{k-q} y_0^q \, dx\, dy.$$

Da wir endliche, von einander unabhängige Summen haben, können wir nach Vertauschung der Integration und Summation schreiben

$$(9)\qquad \overline{M}_k = \sum_{p=0}^{k} \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{p}\binom{k}{q} x_0^p y_0^q M_{k-p,\,k-q},$$

wo

$$(10)\qquad \begin{aligned} M_{k-p,\,k-q} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z(x, y)}{N} x^{k-p} y^{k-q} \, dx\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} x^{k-p} y^{k-q} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left\{\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2xyr}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right\}} dx\, dy. \end{aligned}$$

ist. Wir können also die verallgemeinerten Momente $\overline{M_k}$ berechnen, falls wir die $M_{m,n}$ kennen. Dazu integrieren wir in (10) zunächst nach x und erhalten

$$M_{m,n} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} y^n e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x}{\sigma_1}-\frac{ry}{\sigma_2}\right)^2} dx dy;$$

setzen wir wieder $X = x - \frac{r\sigma_1 y}{\sigma_2}$, so folgt ähnlich wie früher

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} y^n e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\left(X+\frac{r\sigma_1 y}{\sigma_2}\right)^m e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\frac{X^2}{\sigma_1^2}} dX dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\left(\frac{r\sigma_1}{\sigma_2}\right)^i \int_{-\infty}^{+\infty} y^{n+i} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} X^{m-i} e^{-\frac{X^2}{2(1-r^2)\sigma_1^2}} dX dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\left(\frac{r\sigma_1}{\sigma_2}\right)^i \Gamma\left(\frac{n+i+1}{2}\right)(2\sigma_2^2)^{\frac{n+i+1}{2}} \Gamma\left(\frac{m-i+1}{2}\right)(2(1-r^2)\sigma_1^2)^{\frac{m-i+1}{2}}$$

mit den Bedingungen $n+i$ und $m-i$, also auch $m+n$ gerade, und weiter

$$(11)\quad M_{m,n} = \frac{2^{\frac{m+n}{2}}\sigma_1^m\sigma_2^n}{\pi} r^m \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\Gamma\left(\frac{m-i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+i+1}{2}\right)\left(\frac{1-r^2}{r^2}\right)^{\frac{m-i}{2}}$$

mit den Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{c} m-i \\ n+i \\ m+n \end{array}\right\} \text{gerade.}$$

Für die niedrigsten Werte von m und n ergibt sich insbesondere

$M_{0,0} = 1,$

$M_{1,1} = \sigma_1\sigma_2 r,$

$M_{2,0} = \sigma_1^2,$ $\qquad M_{0,2} = \sigma_2^2,$

$M_{2,2} = \sigma_1^2\sigma_2^2 + 2\sigma_1^2\sigma_2^2 r^2,$

$M_{3,1} = 3\sigma_1^3\sigma_2 r,$ $\qquad M_{1,3} = 3\sigma_1\sigma_2^3 r,$

$M_{3,3} = 9\sigma_1^3\sigma_2^3 r + 6\sigma_1^3\sigma_2^3 r^3,$

$M_{4,0} = 3\sigma_1^4,$ $\qquad M_{0,4} = 3\sigma_2^4,$

$$M_{4,2} = 3\sigma_1^4\sigma_2^2 + 12\sigma_1^4\sigma_2^2 r^2, \qquad M_{2,4} = 3\sigma_1^2\sigma_2^4 + 12\sigma_1^2\sigma_2^4 r^2,$$
$$M_{4,4} = 9\sigma_1^4\sigma_2^4 + 72\sigma_1^4\sigma_2^4 r^2 + 24\sigma_1^4\sigma_2^4 r^4,$$
$$M_{5,1} = 15\sigma_1^5\sigma_2 r, \qquad M_{1,5} = 15\sigma_1\sigma_2^5 r,$$
$$M_{5,3} = 45\sigma_1^5\sigma_2^3 r + 60\sigma_1^5\sigma_2^3 r^3, \qquad M_{3,5} = 45\sigma_1^3\sigma_2^5 r + 60\sigma_1^3\sigma_2^5 r^3,$$
$$M_{5,5} = 225\sigma_1^5\sigma_2^5 r + 600\sigma_1^5\sigma_2^5 r^3 + 120\sigma_1^5\sigma_2^5 r^5,$$

u. s. w.

Aus diesen Werten der $M_{m,n}$ erhalten wir schließlich, wenn wir noch beachten, daß $m+n = k-p+k-q$, also auch $p+q$ gerade sein müssen, für die gesuchten Momente $\overline{M}_k$ bei beliebigem Nullpunkte

$$(12)\quad \begin{cases} \overline{M}_0 = 1, \\ \overline{M}_1 = \sigma_1\sigma_2 r + x_0 y_0, \\ \overline{M}_2 = \sigma_1^2\sigma_2^2 + 2\sigma_1^2\sigma_2^2 r^2 + \sigma_1^2 y_0^2 + \sigma_2^2 x_0^2 + 4\sigma_1\sigma_2 r x_0 y_0 + x_0^2 y_0^2, \\ \overline{M}_3 = 9\sigma_1^3\sigma_2^3 r + 6\sigma_1^3\sigma_2^3 r^3 + 9\sigma_1^3\sigma_2 r y_0^2 + 9\sigma_1\sigma_2^3 r x_0^2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 x_0 y_0 \\ \qquad + 18\sigma_1^2\sigma_2^2 r^2 x_0 y_0 + 3\sigma_1^2 x_0 y_0^3 + 3\sigma_2^2 x_0^3 y_0 + 9\sigma_1\sigma_2 r x_0^2 y_0^2 + x_0^3 y_0^3, \\ \overline{M}_4 = 9\sigma_1^4\sigma_2^4 + 72\sigma_1^4\sigma_2^4 r^2 + 24\sigma_1^4\sigma_2^4 r^4 + 18\sigma_1^4\sigma_2^2 y_0^2 + 18\sigma_1^2\sigma_2^4 x_0^2 \\ \qquad + 72\sigma_1^4\sigma_2^2 r^2 y_0^2 + 72\sigma_1^2\sigma_2^4 r^2 x_0^2 + 3\sigma_1^4 y_0^4 + 3\sigma_2^4 x_0^4 + 144\sigma_1^3\sigma_2^3 r x_0 y_0 \\ \qquad + 96\sigma_1^3\sigma_2^3 r^3 x_0 y_0 + 48\sigma_1^3\sigma_2 r x_0 y_0^3 + 48\sigma_1\sigma_2^3 r x_0^3 y_0 + 36\sigma_1^2\sigma_2^2 x_0^2 y_0^2 \\ \qquad + 72\sigma_1^2\sigma_2^2 r^2 x_0^2 y_0^2 + 6\sigma_1^2 x_0^2 y_0^4 + 6\sigma_2^2 x_0^4 y_0^2 + 16\sigma_1\sigma_2 r x_0^3 y_0^3 + x_0^4 y_0^4, \\ \overline{M}_5 = 225\sigma_1^5\sigma_2^5 r + 600\sigma_1^5\sigma_2^5 r^3 + 120\sigma_1^5\sigma_2^5 r^5 + 450\sigma_1^5\sigma_2^3 r y_0^2 + 450\sigma_1^3\sigma_2^5 r x_0^2 \\ \qquad + 600\sigma_1^5\sigma_2^3 r^3 y_0^2 + 600\sigma_1^3\sigma_2^5 r^3 x_0^2 + 75\sigma_1^5\sigma_2 r y_0^4 + 75\sigma_1\sigma_2^5 r x_0^4 \\ \qquad + 225\sigma_1^4\sigma_2^4 x_0 y_0 + 1800\sigma_1^4\sigma_2^4 r^2 x_0 y_0 + 600\sigma_1^4\sigma_2^4 r^4 x_0 y_0 + 150\sigma_1^4\sigma_2^2 x_0 y_0^3 \\ \qquad + 150\sigma_1^2\sigma_2^4 x_0^3 y_0 + 600\sigma_1^4\sigma_2^2 r^2 x_0 y_0^3 + 600\sigma_1^2\sigma_2^4 r^2 x_0^3 y_0 + 15\sigma_1^4 x_0 y_0^5 \\ \qquad + 15\sigma_2^4 x_0^5 y_0 + 900\sigma_1^3\sigma_2^3 r x_0^2 y_0^2 + 600\sigma_1^3\sigma_2^3 r^3 x_0^2 y_0^2 + 150\sigma_1^3\sigma_2 r x_0^2 y_0^4 \\ \qquad + 150\sigma_1\sigma_2^3 r x_0^4 y_0^2 + 100\sigma_1^2\sigma_2^2 x_0^3 y_0^3 + 200\sigma_1^2\sigma_2^2 r^2 x_0^3 y_0^3 + 10\sigma_1^2 x_0^3 y_0^5 \\ \qquad + 10\sigma_2^2 x_0^5 y_0^3 + 25\sigma_1\sigma_2 r x_0^4 y_0^4 + x^5 y_0^5, \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

§ 5. Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir

$$(13)\quad \begin{cases} \sigma_1\sigma_2 = s, \\ x_0 y_0 = t, \\ \sigma_1^2 y_0^2 + \sigma_2^2 x_0^2 = v^2, \\ rs = \sigma_1\sigma_2 r = w. \end{cases}$$

Die Gleichungen (12) gehen dann über in

$$
(14)\quad \left\{\begin{aligned}
\overline{M}_1 &= w + t,\\
\overline{M}_2 &= s^2 + 2w^2 + v^2 + 4wt + t^2,\\
\overline{M}_3 &= 9s^2 w + 6w^3 + 9wv^2 + 9s^2 t + 18w^2 t + 3v^2 t + 9wt^2 + t^3,\\
\overline{M}_4 &= 9s^4 + 72s^2 w^2 + 24w^4 + 18s^2 v^2 + 72w^2 v^2 + 3v^4 + 144s^2 wt\\
&\quad + 96w^3 t + 48wv^2 t + 30s^2 t^2 + 72 w^2 t^2 + 6v^2 t^2 + 16wt^3 + t^4,\\
\overline{M}_5 &= 225s^4 w + 600s^2 w^3 + 120w^5 + 450s^2 wv^2 + 600w^3 v^2 + 75wv^4\\
&\quad + 225s^4 t + 1800s^2 w^2 t + 600w^4 t + 150s^2 v^2 t + 600w^2 v^2 t + 15v^4 t\\
&\quad + 750s^2 wt^2 + 600 w^3 t^2 + 150wv^2 t^2 + 70s^2 t^3 + 200w^2 t^3 + 10v^2 t^3\\
&\quad + 25wt^4 + t^5,\\
&\qquad\qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}\right.
$$

Zur Berechnung der vier Unbekannten s, t, v, w genügen die vier ersten Gleichungen (14). Eliminieren wir nämlich nach der ersten Gleichung von (14)

$$
(15)\qquad w = \overline{M}_1 - t,
$$

so ergeben die drei darauf folgenden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\overline{M}_2 - 2\overline{M}_1^2 &= s^2 + v^2 - t^2,\\
\overline{M}_3 - 6\overline{M}_1^3 &= 9\overline{M}_1 s^2 + 9\overline{M}_1 v^2 + 4t^3 - 9\overline{M}_1 t^2 - 6v^2 t,\\
\overline{M}_4 - 24\overline{M}_1^4 &= 9s^4 + 72\overline{M}_1^2 s^2 + 3v^4 + 72\overline{M}_1^2 v^2 + 18s^2 v^2 - 15t^4 + 64\overline{M}_1 t^3\\
&\quad - 72\overline{M}_1^2 t^2 - 42s^2 t^2 + 30v^2 t^2 - 96\overline{M}_1 v^2 t
\end{aligned}
$$

oder, wenn wir bei der zweiten die erste, bei der dritten die beiden vorangehenden Gleichungen benutzen und zur Abkürzung

$$
(16)\quad \left\{\begin{aligned}
A^2 &= \overline{M}_2 - 2\overline{M}_1^2\\
B^3 &= \overline{M}_3 - 9\overline{M}_1 \overline{M}_2 + 12\overline{M}_1^3,\\
C^4 &= \overline{M}_4 - 16\overline{M}_1 \overline{M}_3 + 72\overline{M}_1^2 \overline{M}_2 - 72\overline{M}_1^4
\end{aligned}\right.
$$

setzen,

$$
(17)\quad \left\{\begin{aligned}
A^2 &= s^2 + v^2 - t^2,\\
B^3 &= 4t^3 - 6v^2 t,\\
C^4 &= 9s^4 + 3v^4 + 18s^2 v^2 - 15t^4 - 42s^2 t^2 + 30v^2 t^2.
\end{aligned}\right.
$$

Eliminieren wir weiter s durch die Gleichung

$$
(18)\qquad s^2 = A^2 - v^2 + t^2,
$$

so gehen die beiden letzten Gleichungen (17) über in

$$(19)\qquad \begin{cases} B^3 = 4t^3 - 6v^2 t, \\ D^4 = -6v^4 - 48t^4 - 24A^2t^2 + 72v^2t^2, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung

$$(20)\quad D^4 = C^4 - 9A^4 = \overline{M}_4 - 9\overline{M}_2^2 - 16\overline{M}_1\overline{M}_3 + 90\overline{M}_1^2\overline{M}_2 - 108\overline{M}_1^4$$

gesetzt wurde. Eliminieren wir endlich aus (19) noch

$$(21)\qquad v^2 = \frac{4t^3 - B^3}{6t},$$

so bleibt für t die Gleichung sechsten Grades

$$(22)\qquad 16t^6 + 144A^2t^4 + 64B^3t^3 + 6D^4t^2 + B^6 = 0,$$

worin A, B, D durch (16) und (20) gegeben sind. Aus (22), (21) (18) und (15) bestimmen sich die Hilfsgrößen t, v, s und w. Unter der Voraussetzung, daß t reell, $v^2 \geqq 0$ und $s^2 > 0$ ist, läßt sich weiter der Korrelationskoeffizient

$$r = \frac{w}{s}$$

sofort bestimmen; dagegen kann man für die anderen vier Unbekannten x_0, y_0, σ_1, σ_2 nur den Grad ihrer Unbestimmtheit erniedrigen, indem man

$$\sigma_1 y_0 + \sigma_2 x_0 = \pm\sqrt{v^2 + 2st}, \qquad \sigma_1 y_0 - \sigma_2 x_0 = \pm\sqrt{v^2 - 2st}$$

und daraus $\sigma_1 y_0$ und $\sigma_2 x_0$ erhält.

Das erhaltene Resultat ist also im wesentlichen folgendes:

Definiert man die angenäherte Darstellung von $\varphi(u)$ mittels der Galtonschen Verteilungsfunktion $Z(x, y)$ der in Korrelation stehenden Argumente durch die Forderung der Übereinstimmung der ersten Momente, so fällt die Bestimmung der Konstanten der Galtonschen Funktion verschieden aus, je nachdem ihr Maximum im Nullpunkt oder nicht im Nullpunkt liegend angenommen wird. Im ersten Falle läßt sich die Übereinstimmung der Momente bis zum zweiten genau erzielen, und wir erhalten nur eine eindeutige Bestimmung der Korrelation und des Produktes der Quadrate der mittleren Fehler von x und y; aber auch bei exakter oder angenäherter Übereinstimmung der höheren Momente lassen sich die mittleren Fehler nicht getrennt bestimmen.

Wird das Maximum als nicht im Nullpunkt liegend angenommen, so kann die Übereinstimmung bis zum vierten Moment exakt erreicht werden; aber auch dann bleibt eine Konstante unbestimmt, z. B. der mittlere Fehler einer Variablen, und diese Unbestimmtheit bleibt auch dann erhalten, wenn wir die Übereinstimmung der höheren Momente als exakt oder angenähert erfüllt ansehen.

Über den molekularen Aufbau fester, isotroper und anisotroper binärer Mischungen.

Von

G. Tammann.

Mit 7 Figuren im Text.

Vorgelegt in der Sitzung vom 25. Juli 1914.

Die Verteilung der beiden Molekülarten einer binären Mischung ist aus theoretischen Gründen im isotropen und im anisotrope Zustande der Mischung eine grundverschiedene.

In einer isotropen Mischung ist sie eine vollkommen ungeordnete und ungleichmäßige. Diese ungleichmäßige Verteilung läßt sich auf Grund von Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung angeben.

In einer anisotropen Mischung sind die beiden Molekülarten in einem Raumgitter geordnet und bis zu einem gewissen Grade gleichmäßig in demselben verteilt.

Ist die eine Molekülart in einem gewissen Lösungsmittel löslich, die andere dagegen unlöslich, und bleibt während des Lösungsvorganges die ursprüngliche Anordnung der Moleküle in dem Sinne erhalten, daß ein Platzwechsel der beiden Molekülarten nicht stattfindet, so könnte man aus der ursprünglichen Molekular-Verteilung die Menge des im Rückstande verbleibenden löslichen Stoffes ableiten, indem man über die Schutzwirkung der unlöslichen Moleküle auf die löslichen gewisse geometrisch begründete Annahmen einführt.

Wenn die berechnete Zusammensetzung der Rückstände in ihrer Abhängigkeit von der Zusammensetzung der ursprünglichen Mischungen mit der wirklichen übereinstimmt, so dürfte damit

vor allem die Richtigkeit der Annahmen über die Verteilung der beiden Molekülarten und auch das Zutreffen der Vorstellungen über die Schutzwirkungen der unlöslichen auf die löslichen Moleküle wahrscheinlich gemacht sein.

Die Verteilung der Moleküle zweier Stoffe in einer homogenen, isotropen, starren Mischung und die Schutzwirkung der Moleküle des unlöslichen Stoffes auf die des löslichen.

Die Gesamt-Zahl der Moleküle des Stoffes A sei M und die des Stoffes B N. Die Molenbrüche sollen abgekürzt mit p und q bezeichnet werden:

$$\frac{M}{M+N} = p, \qquad \frac{N}{M+N} = q, \qquad p+q = 1.$$

p und q können als die Wahrscheinlichkeiten der A- und B-Moleküle in den Mischungen aufgefaßt werden.

Eine Anzahl nebeneinander liegender Moleküle bezeichnen wir als einen Komplex, ein solcher kann 2, 3 ... s Moleküle umfassen. Die Zahl der Moleküle im Komplex, aus dem die ganze Mischung aufgebaut ist, wird späterhin durch die Zahl der unlöslichen Moleküle, welche ein lösliches Molekül vor der Wirkung des Lösungsmittels schützen, bestimmt werden.

Als Komplex ist eine zu rechnerischen Zwecken als abgesondert betrachtete Zahl von Molekülen zu denken, nicht aber eine faktisch bestehende besondere Anhäufung von Molekülen.

Man kann sich nun fragen: welche Wahrscheinlichkeit haben Komplexe von $s - A$-Molekülen, welche Wahrscheinlichkeit haben Komplexe mit $(s-1) - A$- und einem B-Molekül u. s. w. Die Antwort auf diese Frage gibt ein Theorem von Bernoulli. Die Wahrscheinlichkeiten dieser Komplexe sind nämlich gegeben durch die aufeinander folgenden Glieder der nach fehlenden Potenzen von p geordneten Entwicklung des Binoms:

$$(p-q)^s.$$

Entwickelt man in der beschriebenen Weise das Binom, so ergibt sich:

$$p^s + \frac{s!}{(s-1)!\ 1!} p^{s-1} \cdot q + \frac{s!}{(s-2)!\ 2!} p^{s-2} q^2 + \cdots$$

$$+ \frac{s!}{m!\,(s-m)!} p^m q^{s-m} + \cdots + \frac{s!}{1!\,(s-1)!} p \cdot q^{s-1} + q^s.$$

Die Glieder dieser Reihe geben also die Wahrscheinlichkeiten der Komplexe mit sA-, $(s-1)A$- und $1B$-, $(s-2)A$- und $2B$-, $(s-m)A$- und $(m)B$-, $1A$- und $(s-1)B$-, und sB-Molekülen für verschiedene p- und q-Werte an. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Komplexe ist $(p+q)^s = 1$, weil wenn wir nach der Wahrscheinlichkeit eines Komplexes überhaupt, der nicht näher bezeichnet ist, fragen, diese Wahrscheinlichkeit zur Gewißheit wird.

Beispielsweise erhält man für die Mischung, in der gleiche Zahlen von A- und B-Molekülen vorhanden sind, also $M = N$, $p = q = \frac{1}{2}$, für die Komplexionen mit $s = 5$, welche verschiedene Zahlen von B-Molekülen enthalten, folgende Wahrscheinlichkeiten:

	$0B$	$1B$	$2B$	$3B$	$4B$	$5B$
$(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^5 =$	$(\frac{1}{2})^5$	$+5(\frac{1}{2})^4\frac{1}{2}$	$+10(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^2$	$+10(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^3$	$+5\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^4$	$+(\frac{1}{2})^5$
Wahrscheinlichkeiten:	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$.

Nun kann man auch die Wahrscheinlichkeit der Schutzwirkung von $(s-1)$-Molekülen des unlöslichen Stoffes A auf 1 Molekül des löslichen Stoffes B vor der Wirkung eines Lösungsmittels berechnen.

Über diese Zahl brauchen wir keine spezielle Annahme zu machen. Wenn der Komplex, in dem sich ein geschütztes B-Molekül befindet, s-Moleküle enthält, also $(s-1)A$-Moleküle ein B-Molekül schützen, so darf man sich den Komplex als polyedrisches Gebilde vorstellen, in dessen Innerm sich das B-Molekül, umgeben von den an den Polyederecken sitzenden A-Molekülen, befindet Diese Anordnung kann bei s-Komplexen mit $(s-1)A$- und $1B$-Molekül nur einmal eintreten. Die Wahrscheinlichkeit dieser Schutzstellung ist also

$$(1) \qquad \frac{1}{s} \cdot \frac{s!}{(s-1)!} p^{s-1} \cdot q = p^{s-1} \cdot q.$$

Für das obige Beispiel ist diese Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{32}$.

Außer der Schutzstellung, bei der ein B-Molekül von mehreren A-Molekülen umgeben ist, gibt es auch für 2, 3 oder mehr B-Moleküle in einem Komplex Schutzstellungen. Ein Komplex mit 2 und mehr geschützten B-Molekülen wird naturgemäß mehr Moleküle enthalten als ein Komplex mit nur einem geschützten B-Molekül. Daher ist die Wahrscheinlichkeit dieser Schutzstellungen viel geringer als die der Schutzstellung für die Komplexe mit einem B-Molekül, mit der Zahl der geschützten B-Moleküle nimmt ihre Wahrscheinlichkeit schnell ab. Infolgedessen würden

verschiedene Annahmen über die Art der Umhüllung mehrerer B-Moleküle durch eine entsprechende Zahl von A-Molekülen und den hierdurch bedingten Schutz der B-Moleküle nur einen geringen Einfluß auf das Resultat haben.

Über die Beziehung der Schutzstellungen bei 2 und mehr B-Molekülen zu der Schutzstellung eines B-Moleküls wollen wir die Annahme machen, daß sich die Schutzstellungen mehrerer B-Moleküle aus der eines B-Moleküls durch Vereinigung der beiden Polyeder mit einem zentralen B-Molekül unter Austritt von 2 A-Molekülen ableiten lassen. Wenn also 1 B-Molekül durch 4 dasselbe umgebende A-Moleküle geschützt wird, so würden 2 B-Moleküle durch 6, 3 B-Moleküle durch 8 und $r - B$-Moleküle durch $r(s-1) - 2(r-1)$ A-Moleküle geschützt werden.

Die Wahrscheinlichkeit eines Komplexes mit $rs - 2(r-1)$ Molekülen, von denen r B-Moleküle sind, ist

$$\frac{[rs - 2(r-1)]!}{[r(s-1) - 2(r-1)]!\ r!} p^{r.(s-1) - 2(r-1)} \cdot q^r$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß in einem Komplex von dieser Zahl von Komplexen die bezeichnete Schutzstellung vorkommt, ist

$$\frac{[r(s-1) - 2(r-1)]!\ r!}{[rs - 2(r-1)]!}.$$

Dementsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Komplex von $r(s-1) - 2(r-1)$ Molekülen mit $r\,B$-Molekülen in Schutzstellung in der Mischung vorkommt:

$$p^{r(s-1) - 2(r-1)} \cdot q^r. \qquad (2)$$

Für $r = 1$ geht diese Formel in die Formel (1) über. Es können also mit Hilfe der Formel (2) die Wahrscheinlichkeiten der Schutzstellungen für 1, 2 ... r B-Moleküle berechnet werden.

Außer den Schutzwirkungen in den Komplexen selbst sind noch Schutzwirkungen der Komplexe durch schützende Umhüllung eines Komplexes durch andere Komplexe, die nur A-Moleküle oder 1 B-Molekül in zentraler, geschützter Stellung enthalten, zu berücksichtigen.

Die Wahrscheinlichkeit dieser Umhüllungen ist eine Summe von Wahrscheinlichkeiten, von denen jede ein Produkt der Anzahl der zu schützenden mit der Anzahl der schützenden Komplexe darstellt. Diese Anzahl ist so viel mal zu nehmen als der zu schützende Komplex B-Moleküle an den Polyederecken enthält. Dieses Produkt ist dann noch mit der Wahrscheinlichkeit, daß

die schützenden und geschützten Komplexe zu einander in Schutzstellung treten, zu multiplizieren.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der schützenden Komplexe, welche entweder nur A-Moleküle oder ein B-Molekül in zentraler, geschützter Stellung enthalten, ist: $p^s + p^{s-1} . q$.

Die zu schützenden Komplexe sind nach der Zahl der an den Polyederecken befindlichen B-Moleküle zu unterscheiden:

1) Komplexe mit einem B-Molekül an einer Polyederecke können entweder 1 oder 2 B-Moleküle enthalten,

2) Komplexe mit 2 B-Molekülen an 2 Polyederecken können 2 oder 3 B-Moleküle enthalten, u. s. w.

Die Wahrscheinlichkeit der Aneinanderlagerung der schützenden und geschützten Komplexe erhält man durch Multiplikation ihrer beiden Wahrscheinlichkeiten.

Der Schutz der B-Moleküle an den Polyederecken wird nur dann eintreten, wenn der schützende Komplex an den zu schützenden sich in geeigneter Weise anlegt. Nimmt man an, daß der Schutz nur dann eintritt, wenn der schützende Komplex sich an die mit dem B-Molekül besetzte Polyederecke anlagert, so würde die Wahrscheinlichkeit des Schutzes durch Multiplikation der Wahrscheinlichkeit der Anlagerung mit den Quotienten: $\frac{1}{s-1}$ respective $\frac{2}{(s-1)(s-2)}$ u. s. w. erhalten werden. Man erhält also als Wahrscheinlichkeit des Schutzes der zu schützenden Komplexe mit einem B-Molekül an den Polyederecken:

$$(3) \qquad \frac{1}{s-1}(p^s + p^{s-1} \cdot q)[(s-1)p^{s-1} \cdot q + (s-1)p^{s-2} \cdot q^2];$$

für die der zu schützenden Komplexe mit zwei B-Molekülen an den Polyederecken:

$$(4) \quad \frac{2}{(s-1)(s-2)}(p^s + p^{s-1} \cdot q)^2 \Big[\frac{(s-1)(s-2)}{2} p^{s-2} \cdot q^2 + \Big(\frac{s!}{(s-3)!\ 3!} - \frac{(s-1)(s-2)}{2}\Big) p^{s-3} q^3\Big].$$

Die Wahrscheinlichkeiten des Schutzes der zu schützenden Komplexe mit 3 und mehr B-Molekülen an den Polyederecken würden nur für Mischungen, bei denen p sich dem Werte 1 nähert, zu berücksichtigen sein.

Man darf also sagen, daß die Schutzstellungen in zwei Arten zu teilen sind, die der ersten Klasse sind durch Stellungen der

Moleküle in den Komplexen selbst, die der zweiten Klasse werden durch die Lagerung der geschützten Komplexe an einen anderen Komplex mit ungeschützten Molekülen, bedingt.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten, $\sum w$, der Schutzstellungen beider Klassen gibt den Bruchteil der Moleküle des löslichen Stoffes B, bezogen auf die Gesamtheit der Moleküle der Mischung, an, der durch die Moleküle des unlöslichen Stoffes vor der Wirkung des Lösungsmittels geschützt wird.

$$(5) \qquad \left.\begin{array}{l} \sum w = p^{s-1} \cdot q + p^{2s+4} \cdot q^2 + p^{3s-7} \cdot q^3 \cdots \\ \qquad + \text{Glied } 3) + \text{Glied } 4) \cdots \end{array}\right\} .$$

Für die Mischungen, bei denen die Zahl der Moleküle des unlöslichen Stoffes A kleiner als die des löslichen Stoffes B, für die also $p < 0.5$, kommt von allen Gliedern dieser Summe nur das erste Glied in Betracht.

Kieselsäure-Anhydrid und Borsäure-Anhydrid.

Schmilzt man amorphes Kieselsäure-Anhydrid mit Borsäure-Anhydrid im Kohle-Rohr zusammen, so erhält man glasige, durch etwas Kohle und Bor oder ein Borkarbid schwarz gefärbte Massen, die beim Übergießen mit Wasser um so schneller zerfallen, je mehr B_2O_3-Anhydrid sie enthalten und um so höher die Temperatur ist, bei der man das Wasser auf die glasigen Massen wirken läßt. Kocht man die Schmelzen von SiO_2- und B_2O_3-Anhydrid längere Zeit mit Wasser, so erhält man Rückstände, die in lufttrocknem Zustand recht wasserhaltig sind und nicht unerhebliche Mengen von B_2O_3 enthalten. Außerdem geht Kieselsäure in Lösung und zwar in um so größerer Menge, je B_2O_3-reicher das Glas ist.

Zur Entscheidung der Frage, ob der Borsäuregehalt dieser Rückstände bei längerem Kochen konstant wird, wurden folgende Versuche ausgeführt. Die beiden von Kahlbaum bezogenen Anhydride SiO_2 und B_2O_3 wurden, da sie noch etwas Wasser enthielten, stark erhitzt und vor dem Abwägen wieder gepulvert. Die Mischungen von SiO_2 und B_2O_3 wurden in molaren Verhältnissen hergestellt, in der Weise, daß auf 1 B_2O_3-Anhydrid 0,25; 0,5; 1; 2 und 4 Mol. SiO_2 kamen. Nach guter Mengung wurden die Mischungen im Kohle-Rohr auf ca. 1800° erhitzt. Bei den B_2O_3-reichen Mischungen entwickelten sich in der ziemlich zähflüssigen Schmelze, die durch Rühren mit einem Kohle-Stab möglichst gut gemischt wurde, Blasen, die CO, B_2O_3 und Spuren von H_2O enthielten. Die CO-Entwicklung war bei den B_2O_3-reichsten

Schmelzen während ihrer Erhitzung auf ca. 1800° so lebhaft, daß sich eine Flamme von ca. 3 cm Länge über dem Rohr bildete; mit abnehmendem Gehalt an B_2O_3 nahm die Höhe der CO-Flamme ab und betrug bei den SiO_2-reichsten Schmelzen bei der höchsten Temperatur nur ca. 0.5 cm. Weil durch die Bildung von CO die Massen sich aufblähten und auch bei starkem Rühren nicht schnell genug zusammenfielen, war die Erhitzung auf noch höhere Temperaturen nicht auszuführen. Die so gewonnenen Schmelzen waren, ihrem Bruch nach zu urteilen, durch und durch glasig.

Von den erhaltenen Gläsern wurden je 4 gr eine bestimmte Zeit lang, die in der folgenden Tabelle (Tab. 1) angegeben ist, mit ca. 200 ccm H_2O gekocht. Darauf wurde der Rückstand von der Lösung getrennt, ausgewaschen und an der Luft getrocknet. Der erhaltene Rückstand war hellgrau gefärbt. Diese Färbung wurde wahrscheinlich nur durch Kohlepartikel und nicht durch Bor oder Borkarbid verursacht. Der lufttrockne Rückstand wurde zur Wasserbestimmung stark geglüht. Hierbei verbrannte die Kohle und die Graufärbung des Rückstandes verschwand. Darauf wurde dieser Rückstand mit einem Gemenge von gleichen Teilen Na_2CO_3 und K_2CO_3 aufgeschlossen und mit Wasser aufgenommen. Zur SiO_2-Bestimmung wurde die Lösung mit HCl zur Trockne gedampft, nach dem Eindampfen auf 100° erhitzt und wieder mit Wasser aufgenommen. Die ausgeschiedene Kieselsäure wurde abfiltriert, stark geglüht und gewogen. Die Differenz des geglühten wasserfreien Rückstandes und der gefundenen Menge SiO_2 gibt die Menge des in dem Rückstand vorhandenen wasserfreien B_2O_3 an.

Tabelle 1.

Zusammensetzung des Glases in Mol.	Zeit des Kochens in Stunden	H_2O-Gehalt des Rückstandes	SiO_2-Gehalt des Rückstandes	B_2O_3-Gehalt des Rückstandes
0,97 SiO_2; 2,00 B_2O_3	2	—	88,6 %	11,4 %
"	2	31,5 %	87,2	12,8
1,0 SiO_2; 1,0 B_2O_3	1	35,6	96,21	3,79
"	1	34,2	97,06	2,94
"	2	34,9	97,08	2,92
1,81 SiO_2; 1,00 B_2O_3	2	21,2	93,36	6,64
"	2	21,3	95,59	4,41
"	2	22,5	96,16	3,84

Aus der Tabelle ist zu ersehen, daß sich in dem Glase mit 1 Mol. SiO_2 auf 1 Mol. B_2O_3 die Zusammensetzung des beim Auskochen erhaltenen Rückstandes nach zweistündigem Kochen nur außerordentlich wenig ändert. Bei dem Glas mit 1,8 SiO_2 auf 1 B_2O_3 wird eine von der Zeit des Kochens unabhängige Zusammensetzung des Rückstandes nach ca. 6stündigem Kochen erreicht. Bei dem Glase, das auf 1 SiO_2 ca. 2 B_2O_3 enthielt, war die Menge des analysierten Rückstandes nur ca. 0,1 gr; der Fehler in der SiO_2-Bestimmung war hier größer als in der vorhergehenden; infolgedessen ist wohl der Umstand, daß nach dem zweiten 2stündigen Kochen etwas weniger SiO_2 im Rückstand gefunden wurde als im ersten, auf einen Analysenfehler zurückzuführen.

Um der Homogenität der B_2O_3-SiO_2-Gläser sicher zu sein, wurde in einer zweiten Versuchsreihe das wie bei den ersten Versuchen erhaltene Glas grob gepulvert und unter starkem Umrühren nochmals umgeschmolzen.

Tabelle 2.

Zusammensetzung des Glases in Mol.	Zeit des Kochens in Stunden	H_2O-Gehalt d. lufttrocknen Rückstandes	SiO_2-Gehalt des Rückstandes	B_2O_3-Gehalt des Rückstandes
1 SiO_2; 4 B_2O_3	8	46,8 %	59,02 %	40,98 %
1,05 SiO_2; 2 B_2O_3	4	19,6	89,51	10,49
"	4	22,3	89,58	10,42
1,01 SiO_2; 1 B_2O_3	8	—	96,10	3,90
1,99 SiO_2; 1 B_2O_3	8	21,6	96,07	3,93
4,13 SiO_2; 1 B_2O_3	8	1,6	77,43	22.57

Vergleicht man den B_2O_3-Gehalt der Rückstände in Tab. 1 und Tab. 2, so darf man wohl annehmen, daß schon nach dem ersten Zusammenschmelzen von B_2O_3 und SiO_2 die erhaltenen Gläser soweit homogen waren, daß eine dem ersten Zusammenschmelzen folgende Zerkleinerung und Schmelzung die Homogenität der Gläser nicht mehr änderte.

In der Tab. 3 sind für alle hergestellten Gläser ihre molekularen Zusammensetzungen entsprechend dem Befunde ihrer Analyse und für ihre nach hinreichend langem Kochen mit Wasser hinterbliebenen Rückstände der Gehalt an B_2O_3 in Gewichtsprozenten angegeben. Der Gehalt von 41 % B_2O_3 im Glase mit 4 B_2O_3 und SiO_2-Mol. ist unsicher, weil die Menge dieses Rückstandes nur 80 mgr betrug.

Aus einem Glase, welches gleiche Mengen von SiO_2- und B_2O_3-

Tabelle 3.

Zusammensetzung des Glases	B_2O_3-Gehalt des wasserfreien Rückstandes	Mittelwerte
4 B_2O_3; 1 SiO_2	41 %	
2 B_2O_3; 0,97 SiO_2	12,8	11,6
2 B_2O_3; 1,05 SiO_2	10,42	
1 B_2O_3; 1 SiO_2	3,0	
1 B_2O_3; 1,0 SiO_2	2,92	3.27
1 B_2O_3; 1,01 SiO_2	3,90	
1 B_2O_3; 1,81 SiO_2	3,84	3,88
1 B_2O_3; 1,99 SiO_3	3,93	
1 B_2O_3; 4,13 SiO_2	22,57	

Molekülen enthält, bildet sich beim Behandeln mit Wasser ein Rückstand, der im wasserfreien Zustande im Mittel aus 3 Analysen 3,27 ± 0.42 Gewichtsprozente B_2O_3 enthält.

Auch ein Glas mit 8 SiO_2 auf 1 B_2O_3 zerfällt unter Wasser langsam in grobe Stücke, doch haben dieselben nach Ablauf eines Jahres noch eine erhebliche Körnergröße, bis zu einigen cbmm.

Aus den in der beschriebenen Weise hergestellten Gläsern von SiO_2 und B_3O_3-Anhydrid kann die Borsäure noch in anderer Weise entfernt werden. P. Jannasch[1]) empfiehlt zur Entfernung des B_2O_3, eine Mischung von Boraten und Silikaten mit einer Lösung von Salzsäure in Methylalkohol zu kochen.

Zur Herstellung dieser Lösung wurde nach Jannasch Methylalkohol mit Salzsäure gesättigt, die Lösung überdestilliert und der zwischen 66—80° übergehende Teil aufgefangen. Kocht man mit dieser Lösung von Salzsäure in Methylalkohol die grob gepulverten Gläser am Rückflußkühler, so setzt sich an den offenen Enden des Rückflußkühlers das durch Zersetzung mit Wasserdampf aus dem Borsäure-Methyläther stammende Borsäurehydrat ab. Die Behandlung der Gläser mit dem salzsauren Methylalkohol wurde solange fortgesetzt, bis sich am offenen Ende des Kühlers kein Borsäurehydrat mehr ausschied. Die Zeit, während der die Gläser zur Entfernung der Borsäure gekocht wurden, ist in der Tabelle 4 angegeben.

Wenn sich keine Borsäure mehr verflüchtigte, wurde der von Bor und Borcarbid sowie Kohle-Partikeln dunkel gefärbte Rück-

---

1) Zeitschr. f. anorg. Chemie 12, S. 208. 1896.

stand durch Einblasen von trockner Luft bei 100° getrocknet, darauf gewogen und im Pt-Schiffchen im Sauerstoffstrom geglüht. Nach dem Glühen wurde der Rückstand mit Wasser ausgekocht und das B_2O_3-Anhydrid im Rückstande durch eine Kieselsäure-Bestimmung des Rückstandes indirekt, wie früher, bestimmt.

Tabelle 4.

Zusammensetzung des Glases	Zeit der Behandlung mit HCl-Methylalkohol	Gehalt des Rückstandes an Wasser und Alkohol	Gehalt des trocknen Rückstandes an B_2O_3
4 B_2O_3; 1 SiO_2	28 Tage	0,99 %	15,30 %
2 B_2O_3; 1 SiO_2	26 „	1,23 „	5,00 „
1 B_2O_3; 1 SiO_2	24 „	3,11 „	4,31 „
1 B_2O_3; 2 SiO_2	25 „	6,59 „	11,42 „

Die Mengen von SiO_2, die sich bei der Behandlung der Gläser mit kochendem Wasser lösen, sind für die Mischung: 1 B_2O_3 auf 1 SiO_2, und die SiO_2 reicheren Mischungen sehr gering. Aus der Mischung mit 2 B_2O_3 auf 1 SiO_2 gehen schon 16 % SiO_2 und aus der Mischung mit 4 B_2O_3 auf 1 SiO_2 25 % des SiO_2 in Lösung. Wahrscheinlich lösen sich die von einer größeren Anzahl B_2O_3-Molekülen umgebenen SiO_2-Moleküle. Durch die Lösung von SiO_2 wird der B_2O_3-Gehalt der Rückstände größer, als wenn die ganze Menge des SiO_2 bei der Extraktion mit Wasser unlöslich zurückbliebe. Um den B_2O_3-Gehalt der Rückstände aus den B_2O_3-reicheren Gläsern nach Wirkung von Wasser mit dem nach der Wirkung von HCl + Methylalkohol vergleichen zu können, sind unter „korrigiert" Tab. 5 die B_2O_3-Gehalte der Rückstände, welche gefunden werden würden, falls das SiO_2 nicht teilweise in Lösung gehen würde, angegeben.

Die B_2O_3-Gehalte der Rückstände desselben Glases nach der Wirkung von Wasser und HCl + Methylalkohol stimmen nicht gut überein. Außerdem sind die Rückstände nach der Wirkung von Wasser viel wasserreicher als die nach der Wirkung von HCl + Methylalkohol.

Rechnet man den Gehalt der trocknen Rückstände an B_2O_3, der in den Tab. 3 und 4 in Gewichtsprozenten a angegeben ist, auf den Molenbruch $\frac{N}{M+N}$ um, indem man $\frac{a}{100-a}\cdot 1{,}005$ durch die Gesamtzahl der Mol. in der Mischung dividiert, so erhält man die Molekülzahlen B_2O_3 der Tab. 5.

Tabelle 5.

Zusammensetzung des Glases	$\frac{N}{M+N}$ · Zahl der B_2O_3-Moleküle im Rückstande bezogen auf die Gesamtmenge der Moleküle in der Mischung nach Wirkung von			
	Wasser	korrigiert	HCl + Methylalkohol	berechnet
4 B_2O_3; 1 SiO_2	0,146	0,110	0,0364	0,0003
2 B_2O_3; 1 SiO_2	0,0440	0,0370	0,0176	0,0028
1 B_2O_3; 1 SiO_2	0,0170		0,0225	0,0176
1 B_2O_3; 2 SiO_2	0,0137		0,0430	0,0573
1 B_2O_3; 4 SiO_2	0,0586		—	0,0999

Die Molenbrüche des B_2O_3 in den Rückständen nach Wirkung von HCl + Methylalkohol sind wahrscheinlich etwas zu groß, weil bei der Herstellung der Gläser im Kohlenrohr sich Bor und Borcarbid gebildet hatte und nach dem Glühen im Sauerstoff und Auswaschen des B_2O_3 ein Teil desselben im Rückstande geblieben sein kann.

Vergleich der in den Rückständen gefundenen Molenbrüche $\frac{N}{M+N}$ B_2O_3 mit den berechneten Molenbrüchen des in den Gläsern geschützten B_2O_3.

Der Rückstand des Glases mit 1 B_2O_3, 1 SiO_2 enthält nach Extraktion mit HCl + Methylalkohol 0,0225 Mol. B_2O_3. Diese Zahl liegt am nächsten demjenigen Werte von $p^{s-1} \cdot q$, für den $s = 6$ ist. $p^{s-1} \cdot q = (\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{64} = 0{,}0156$.

Dementsprechend darf man annehmen, daß, wenn ein Molekül B_2O_3 von 5 Molekülen SiO_2 umhüllt wird, es vor der Wirkung des Lösungsmittels geschützt wird.

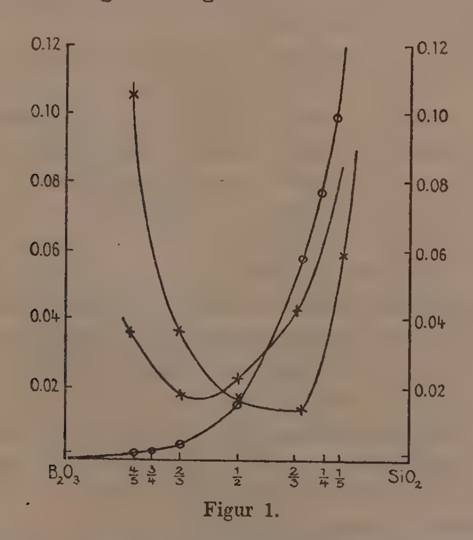
Um diese Annahme näher zu prüfen, sind in der Tab. 6 für die Gläser verschiedener Zusammensetzung für $s = 6$ die Werte der Glieder von Gleichung (5), der Wahrscheinlichkeiten der Schutzstellungen der B_2O_3-Moleküle berechnet.

Tabelle 6.

$s = 6$.

p SiO_2	q B_2O_3	$p^{s-1} \cdot q$	$p^{2s-4} \cdot q^3$	$p^{3s-7}\, q^2$	Glied 3 $p^9\, q$	Glied 4 $4p^{28}\, q$	Σw
$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0,0003					0,00026
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0,0007					0,00074
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0,0027	0,0001				0,0028
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0,0156	0,0010		0,0010		0,0176
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0,0439	0,0043	0,0004	0,0087		0,0573
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0,0593	0,0063	0.0007	0,0187		0,0681
$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0,0655	0,0067	0,0007	0,0268	0,00002	0,0999

Die berechnete Kurve, die durch die Kreise der Fig. 1 geht, weicht bei den B_2O_3-reicheren Gläsern von den gefundenen Werten, den mit liegenden Kreuzen für die Rückstände nach der Wirkung von kochendem Wasser und den mit stehenden Kreuzen für die Rückstände nach der Wirkung von HCl + Methylalkohol, sehr stark ab. Die beiden Kurven der gefundenen Werte haben ausgesprochene Minima, während die berechnete Kurve mit wachsendem SiO_2-Gehalt des Glases vom Werte 0 zuerst langsam, dann aber beschleunigt ansteigt.



Figur 1.

Das Verhalten der Gläser gegenüber Wasser entspricht aber auch nicht der der Rechnung zu Grunde liegenden unveränderten

Molekülverteilung bei der Extraktion der B_2O_3-Moleküle. Denn die Moleküle des unlöslichen Stoffes, des SiO_2, hydratisieren sich sehr stark. Hierbei wird aller Wahrscheinlichkeit nach eine Umgruppierung der Moleküle stattfinden. In den B_2O_3-reicheren Gläsern wird diese Umgruppierung von einer Adsorption von B_2O_3, $3H_2O$ durch die hydratische Kieselsäure begleitet, wodurch die bei Nichteintreten dieser Reaktion zu erwartenden Werte vollständig verdeckt werden. Bei den SiO_2-reicheren Gläsern scheint die Hydratisierung die ursprüngliche Molekülverteilung weniger zu stören.

Bei der Wirkung von HCl + Methylalkohol auf die Gläser kann die Hydratation oder Bindung von Methylalkohol, welche hier in beschränkterem Maße eintritt, nur eine sekundäre Reaktion sein, indem die Rückstandspartikel Wasser und Methylalkohol nach ihrer Bildung absorbieren, wobei die Rückstandskomplexe selbst sich in ihrer sonstigen Zusammensetzung nicht zu verändern brauchen.

Aber auch hier ist der B_2O_3-Gehalt der Rückstände aus B_2O_3-reicheren Gläsern sehr viel größer als der berechnete Gehalt der Rückstände. Mit wachsendem B_2O_3-Gehalt des Glases nimmt die Teilchengröße der Rückstände sehr stark ab, es können daher dieselben um so mehr $B_2O_3 3H_2O$ absorbieren, je B_2O_3-reicher das Glas ist, aus dem sie sich bildeten.

Nimmt man an, daß durch Adsorption der B_2O_3-Gehalt im Rückstande der Gläser mit $q = \frac{4}{5}$ und $\frac{2}{3} B_2O_3$ erheblich zu groß geworden ist, so darf man auf Grund der Differenzen zwischen den gefundenen und den berechneten B_2O_3-Gehalten der Rückstände aus diesen beiden Gläsern die adsorbierten B_2O_3-Mengen für die B_2O_3-ärmeren Gläser extrapolieren. Man findet, wie aus Fig. 1 ersichtlich, daß die adsorbierten Mengen für die Gläser mit $q < \frac{1}{2} B_2O_3$ verschwindend klein sein müssen.

Hierauf gründend darf man die Übereinstimmung der gefundenen B_2O_3-Gehalte der Rückstände aus den Gläsern mit $q = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{2}{3}$ als eine Bestätigung der dargelegten Theorie betrachten.

Aus der Übereinstimmung der berechneten und gefundenen B_2O_3-Gehalte der Rückstände darf man schließen, daß die mittleren Molekulargewichte von SiO_2 und B_2O_3 in ihren isotropen Mischungen im Verhältnis der durch die beiden Formeln gegebenen Molekulargewichte stehen.

Die Analyse der Rückstände von Gläsern kann nach Erledigung des Falls, in dem die beiden Komponenten keine Verbindung

eingehen, zur Feststellung von Verbindungen in Gläsern benutzt werden.

Bilden die beiden Komponenten A und B, von denen A unlöslich ist, eine unlösliche Verbindung $AmBn$, so wird die Zusammensetzung des Rückstandes der Gläser zwischen B und $AmBn$ gleich sein der Zusammensetzung der Verbindung plus der umhüllten Menge B, falls die Dissoziation von $AmBn$ in $mA+nB$ zu vernachlässigen ist, und die Menge des Rückstandes wird fast proportional der A-Konzentration im Glase zunehmen.

Binäre Mischkrystalle.

Ein zwei Molekülarten enthaltender Mischkrystall könnte nach zwei grundverschiedenen Regeln aus seinen beiden Molekülarten aufgebaut sein. Erstens könnte derselbe aus den A- und B-Molekülen nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Weise zusammengesetzt sein, daß die A- und B-Moleküle vollkommen ungeordnet im Raumgitter verteilt sind. Zweitens könnten die A- und B-Moleküle gleichmäßig im Raumgitter verteilt sein. Zwischen beiden Möglichkeiten würde folgender Versuch zu entscheiden haben. Läßt man auf die Mischkrystalle verschiedener Zusammensetzung ein Lösungsmittel wirken, welches nur die Moleküle des Stoffes A löst, die des Stoffes B aber nicht aufzulösen vermag, so müßte, wenn die A- und B-Moleküle sich in vollkommener Unordnung befinden, der Rückstand die Moleküle des löslichen Stoffes A in der Menge enthalten, in welcher sie sich auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung berechnen. Die Wahrscheinlichkeit der geschützten A-Moleküle im Mischkrystall würde also nach der Gleichung (4) wie die der geschützten Moleküle einer isotropen festen Mischung zu berechnen sein. Wenn aber die Verteilung der A- und B-Moleküle in den Mischkrystallen eine regelmäßige ist, so würden Mischkrystalle, welche gleiche Mengen von B- und A-Molekülen enthalten, Rückstände hinterlassen, welche ungleich reicher am löslichen Stoff A sind als die Rückstände aus Mischungen mit regelloser Verteilung der A- und B-Moleküle, und die Menge des löslichen Stoffes, der im Rückstande verbleibt, würde bei gleichmäßiger Molekularverteilung in ganz anderer Weise von der Zusammensetzung des Mischkrystalls abhängen, als wenn die Molekularverteilung eine regellose wäre.

Die Frage nach der Verteilung der A- und B-Moleküle in Mischkrystallen ist also der experimentellen Entscheidung zugänglich, aber auch theoretisch läßt sich die Zulässigkeit der beiden

Annahmen beurteilen. Wären die Volumen der anisotropen Moleküle der beiden Stoffe *A* und *B* einander genau gleich und wären auch die Attraktionskräfte in krystallographisch gleichwertigen Richtungen der *A*- und *B*-Krystalle einander gleich, dann wäre kein Grund vorhanden, warum die Verteilung der *A*- und *B*-Moleküle in dem gemeinsamen Raumgitter nicht eine regellose entsprechend den Forderungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sein sollte. Es würde dann die Verteilung der Moleküle in Mischungen gleicher Molekülzahl bei den Mischkrystallen und ihren Schmelzen dieselbe sein.

Wenn aber die Gleichheit der Attraktionskräfte der *A*- zu *A*-Molekülen, der *B*- zu *B*- und der *A*- zu *B*-Molekülen in entsprechenden krystallographischen Richtungen bei beiden Stoffen *A* und *B* nicht besteht, die das Raumgitter zusammenhaltenden Kräfte in gleichwertigen Richtungen also verschieden sind, so würde eine Häufung der Moleküle einer Art in gewissen Gebieten des Raumgitters eine Erhöhung oder Erniedrigung der Kräfte in diesem Gebiet bedeuten, und es müßte die Tendenz zum Ausgleich dieser Ungleichmäßigkeit bestehen. Die stabilste Anordnung zweier Molekülarten in einem Raumgitter wird also die gleichmäßige sein.

Bei der Krystallisation von Mischkrystallen tritt bekanntlich sehr häufig die Bildung von Schichtkrystallen ein. Dieselbe ist, wie B. Roozeboom gezeigt hat, durch die Konzentrationsdifferenz zwischen dem Mischkrystall und der isotropen Phase, aus der seine Bildung erfolgt, bedingt. Abgesehen von dieser Inhomogenität des entstandenen Mischkrystalls, wird derselbe aber noch eine atomistische Inhomogenität aufweisen, welche dadurch entsteht, daß die beiden Molekülarten, die in der Schmelze entsprechend dem wahrscheinlichsten Zustande vollkommen ungleichmäßig verteilt sind, sich bei ihrer Einordnung ins Raumgitter nicht hinreichend gleichmäßig verteilen. Damit sich die Inhomogenität der Schichtkrystalle und die atomistische Inhomogenität der Mischkrystalle ausgleichen können, ist eine gewisse Beweglichkeit der Moleküle im Raumgitter erforderlich, die bei Temperaturen in der Nähe des Schmelzintervalls des Mischkrystalls immer so groß wird, daß sich die Homogenisierung des Mischkrystalls relativ schnell vollzieht. Bei der Bildung von Mischkrystallen aus Lösungen ist aber die Temperatur häufig so weit vom Schmelzintervall des Mischkrystalls entfernt, daß jene Inhomogenitäten sich dauernd erhalten. Dadurch entstehen Spannungen im Mischkrystall,

---

1) Ztschr. f. phys. Chem. 30, 385. 1899.

deren Folge eine anormale Doppelbrechung[1]) durch eine isomorphe Beimischung ist.

Es scheint, daß die atomistische Inhomogenität zu ihrem Verschwinden längere Zeit erfordert als die zonale Inhomogenität. Jedenfalls sind in den Mischkrystallen von Silber und Gold Änderungen ihrer Lösungsgeschwindigkeiten noch deutlich nachweisbar, nachdem mikroskopische Unterschiede im Verhalten der inneren und äußeren Schichten im Mischkrystall gegenüber Ätzmitteln längst verschwunden sind.

Aus den Kupfer-Gold-Schmelzen krystallisieren viel leichter Schichtkrystalle als aus den Silber-Gold-Schmelzen, und diese Kupfer-Gold-Mischkrystalle sind auch schwerer zu homogenisieren.

Über die Gleichmäßigkeit der Verteilung beider Molekülarten im Raumgitter ist Folgendes zu bemerken. Wenn das Elementarelement des Raumgitters 8 mit je einem Molekül zu besetzende Punkte besitzt, so kann bei den Verhältnissen der A- und B-Molekülmengen: $\frac{M}{M+N} = \frac{0}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$ und $\frac{8}{8}$ die Verteilung der A- und B-Moleküle im Raumgitter eine besonders regelmäßige sein, da bei diesen, aber eben nur bei diesen Mischungsverhältnissen, in jedem Elementarelement das Mischungsverhältnis dasselbe ist. Bei einem Mischungsverhältnis, welches zwischen jenen Mischungsverhältnissen liegt, unterscheiden sich die Elementarelemente in ihrem molekularen Aufbau von einander, die Gesamtbesetzung des Raumgitters kann aber noch eine regelmäßige sein. Denn jedes Mischungsverhältnis, welches das Mittel je zweier Mischungsverhältnisse ist, kann durch Aufbau des Raumgitters aus 2 in verschiedener Weise besetzten Elementarelementen hergestellt werden, wobei die Elementarelemente wieder gleichmäßig verteilt werden können. Diese Operation kann man sich weiter fortgesetzt denken. Man kann also die Moleküle aller Mischungsverhältnisse gleichmäßig im Raumgitter verteilen.

Den Kräften, welche auf eine gleichmäßige Molekularverteilung im Raumgitter wirken, arbeitet die Molekularbewegung entgegen. Diese strebt die ungleichmäßige Molekül-Verteilung isotroper Phasen herzustellen. Das Resultat dieses Kompromisses ist eine Raumgitterbesetzung, die in der Hauptsache eine regelmäßige ist, in der aber beständig Unregelmäßigkeiten entstehen und vergehen. Je größer die Energie der Molekularbewegung und je kleiner die Kräfte der gleichmäßigen Verteilung sind, um so größer wird die Abweichung von der gleichmäßigen Verteilung sein.

---

1) R. Brauns, Die optischen Anomalien der Krystalle, Leipzig 1891.

Es wird sich bei jeder Temperatur offenbar ein stationärer Zustand ausbilden, der dahin definiert werden kann, daß die Zahl der Moleküle, welche die Stellungen gleichmäßiger Verteilung verlassen, gleich ist der Zahl, welche durch die inneren Kräfte in diese Stellungen zurückgetrieben werden.

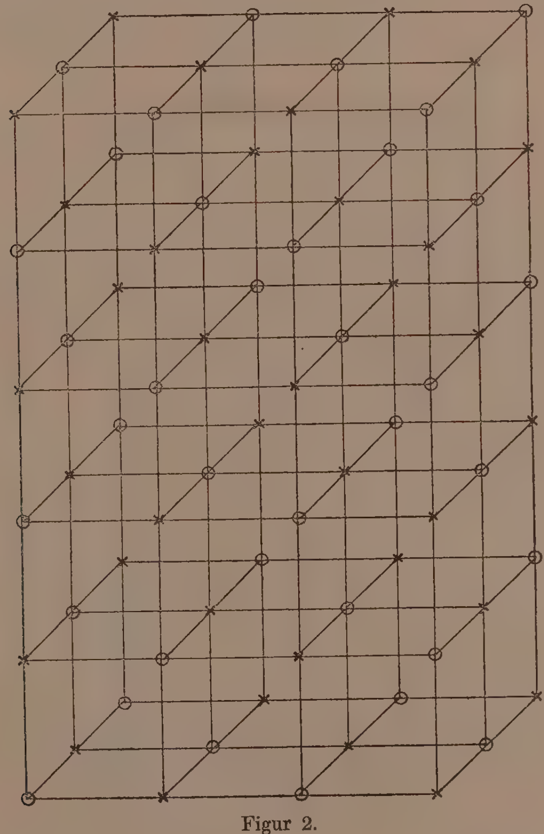
Über die Größe dieser Abweichung kann man auf folgendem Wege etwas erfahren. Wenn man aus gewissen Erscheinungen die wirkliche Verteilung der Moleküle im Raumgitter abgeleitet hat und dieselbe mit der gleichmäßigen Verteilung vergleicht, so würde dieser Vergleich uns eine Vorstellung von dem Betrag der Abweichung von der gleichmäßigen Molekularverteilung geben. Man wird sehen, daß die Abweichung von der gleichmäßigen Verteilung eine überraschend kleine ist, daß also die gleichmäßige Verteilung der Moleküle im Raumgitter eines Mischkrystalls wirklich nahezu besteht.

Um uns von der Menge der löslichen A-Komponente eines Mischkrystalls, die bei der Wirkung eines Lösungsmittels in Lösung geht, eine Vorstellung zu machen, nehmen wir an: 1. eine vollkommen gleichmäßige Verteilung der A- und B-Moleküle im Raumgitter, dessen Elemente je 8 Moleküle enthalten; 2. daß bei Entfernung der A-Moleküle durch ein geeignetes Lösungsmittel das Raumgitter bestehen bleibt, daß also die B-Moleküle ihre Stellungen nicht verlassen.

Zwei Mischkrystalle verdienen unsere Beachtung in besonderem Maße. Dieselben haben die Mischungsverhältnisse $\frac{M}{M+N} = 0{,}5$ ($M = N$) und $\frac{M}{M+N} = \frac{5}{5+3} = 0{,}625$.

Im ersten Mischkrystall besetzen die A- und B-Moleküle abwechselnd die Punkte des Raumgitters in den 3 Hauptrichtungen desselben. In Fig. 2 sind die A-Moleküle durch Kreuze, die B-Moleküle durch Kreise bezeichnet. Die abwechselnde Aufeinanderfolge der A- und B-Moleküle besteht in den 3 Hauptrichtungen und in den Diagonalen durch die Ecken der Raumgitterelemente, nicht aber in den Richtungen der Seitendiagonalen der Raumgitterelemente. Bei dieser Verteilung der A- und B-Moleküle schützen die B-Moleküle der Oberflächen des Mischkrystalls die unter ihnen liegenden A-Moleküle vor der Wirkung des Lösungsmittels, so daß nur die A-Moleküle der Oberfläche der Wirkung des Lösungsmittels zugänglich sind. In den Richtungen der Seitendiagonalen sind aber die A-Moleküle nicht von B-Molekülen gedeckt. Wir machen nun die 3. Annahme: daß das Lösungs-

mittel die A-Moleküle der Oberfläche schnell angreift, die anderen Moleküle der A-Reihen aber ungleich langsamer löst. Wir nehmen also an, daß ein Silberatom von Salpetersäure, wenn sie in den Hauptrichtungen des Raumgitters wirkt, mit maximaler, wenn sie in den Richtungen der Seitendiagonalen des Raumgitterelements wirkt, aber mit minimaler Geschwindigkeit gelöst wird. Diese Annahme ist

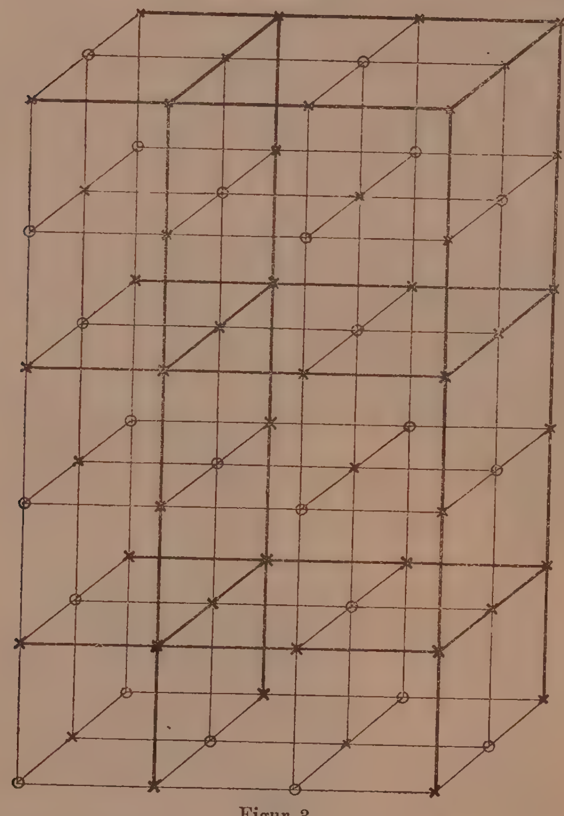


Figur 2.

notwendig, um die Resistenz der Legierung mit gleichen Molenbrüchen der A- und B-Moleküle gegenüber der Wirkung des Lösungsmittels zu deuten.

Den Mischkrystall mit dem Mischungsverhältnis $\frac{M}{M+N} = \frac{5}{5+3}$ kann man sich aus dem Mischkrystall mit dem Mischungsverhältnis

$N = M$ durch Ersatz von je einem B-Molekül durch ein A-Molekül in jedem Elementarelement entstanden denken. Damit die Verteilung beider Molekülarten eine gleichmäßige bleibt, darf dieser Ersatz nicht willkürlich vorgenommen werden, sondern muß in der Weise erfolgen, daß nur die A-Moleküle der den drei Hauptrichtungen parallelen Punktreihen abwechselnd ersetzt werden. Man erhält dann das Raumgitter Fig. 3, in dem die



Figur 3.

Kreuze die A- und die Kreise die B-Moleküle vorstellen sollen. Auf den stärker ausgezogenen Geraden, welche als die Seiten von Raumgitterelementen mit je 8 Elementarelementen zu betrachten sind, finden sich nur noch lösliche A-Moleküle. Das Lösungsmittel kann infolgedessen diese Reihen von A-Molekülen schnell auflösen und wohl auch das zentrale A-Molekül a.

Während also bei gleichmäßiger Verteilung der A- und B-Moleküle aus dem Mischkrystall mit $\frac{M}{M+N} = 0{,}5$ schnell nur sehr geringe Mengen von A-Molekülen nämlich die aus der Oberflächenschicht gelöst werden können, werden aus dem Mischkrystall mit $\frac{M}{M+N} = 0{,}625$ alle A-Moleküle gelöst. Der Quotient α: die gelöste dividiert durch die ursprünglich vorhandene A-Menge, wird also vom Werte 1 bei 0,625 auf einen verschwindenden Betrag bei 0,5 abnehmen.

Die bei der Extraktion mit Salpetersäure verbleibenden Rückstände der Gold-Silber und Gold-Kupfer-Legierungen.

Es ist bekannt, daß kochende Salpetersäure einer Gold-Silber-Legierung mit etwa 25 % fast alles Silber entzieht. Dabei behält das extrahierte Stück seine ursprüngliche Gestalt bei, allerdings wird die Festigkeit des Stückes außerordentlich herabgesetzt. Hierauf beruht die bekannte Quartprobe. Merkwürdiger Weise liegen über die Zusammensetzung der Rückstände, die beim Behandeln von Gold-Silber-Legierungen hinterbleiben, in ihrer Abhängigkeit von der Zusammensetzung der Legierungen keine Bestimmungen vor. Da die Atomistik über die Zusammensetzung dieser Rückstände in Abhängigkeit von der ursprünglichen Zusammensetzung der Legierungen uns, wie wir gesehen haben, recht bestimmte Vorstellungen zu machen gestattet, so hatte eine diesbezügliche Untersuchung ein besonderes Interesse. Untersucht wurden sowohl die Gold-Silber- als auch die Gold-Kupfer-Legierungen, welche sich, wie zu erwarten war, ganz analog verhalten sollten.

Der Deutschen Gold- und Silber-Scheideanstalt, vormals Rößler, in Frankfurt am Main bin ich für die Überlassung der betreffenden Legierungen und die Angabe ihres Gold-Gehaltes zu Dank verpflichtet.

Die Legierungen wurden in Form von kleinen Plättchen ($2 \times 4 \times 0{,}01$ cm), nachdem sie sorgfältig gereinigt waren, mit Salpetersäure von 1,3 spez. Gewicht bestimmte Zeiten in meterlangen Glasröhren, die wie Rückflußkühler wirkten, gekocht. Darauf wurde mit Wasser ausgewaschen, im Vakuum über P_2O_5 bei 18^0 getrocknet und durch die Änderung des Gewichtes die gelöste Silber- bezw. Kupfermenge festgestellt. Die Plättchen wurden

sowohl im „harten“ Zustande, wie sie aus der Walze kamen, als auch im „weichen“ Zustande, nachdem sie längere Zeit geglüht waren, extrahiert.

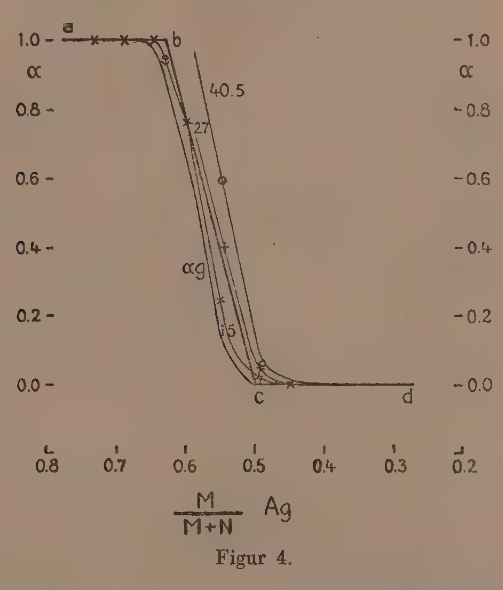
Außerdem wurde von der Deutschen Gold- und Silberscheideanstalt eine Versuchsreihe in der Art durchgeführt, daß die Legierungen kürzere Zeit extrahiert und nach jeder Extraktion geglüht wurden.

Die Menge des gelösten Silbers hängt ab von der Zeit der Einwirkung, von der Konzentration der wirkenden Salpetersäure, von den Dimensionen und dem Zustande der Legierungen.

Vergleicht man den Einfluß der Extraktionsdauer auf die Menge des gelösten Silbers — die Säurekonzentration und die Temperatur der Einwirkung darf man als unverändert betrachten —, so sieht man, daß bei der zweiten Extraktion die in derselben Zeit gelöste Silbermenge größer ist als die bei den auf sie folgenden Extraktionen. Die bei den dritten und den ihr folgenden Extraktionen gelösten Silbermengen sind angenähert proportional der Extraktionsdauer. Es gilt das für die Legierungen mit $\frac{M}{M+N} = 0{,}5$ bis $0{,}6$ Silber, bei den silberreicheren Legierungen ist die Menge des nach der ersten Extraktion zurückgebliebenen Silbers schon sehr klein, so daß über die Änderungen dieses geringen Silbergehaltes schwerer zu urteilen ist.

Jedenfalls lehren diese Versuche, daß bei der Silberextraktion zwei Reaktionen: eine schneller verlaufende und eine viel langsamere, neben einander sich abspielen. Die Geschwindigkeit der schnell verlaufenden Reaktion nimmt mit abnehmendem Silbergehalt in der Legierung ab, bei der langsam verlaufenden Reaktion ändert sich aber die Geschwindigkeit der Silber-Auflösung bei derselben Legierung nur wenig mit der noch vorhandenen Silbermenge. Im Diagramm, Fig. 4, ist der Quotient: $\frac{\text{gelöste Silbermenge}}{\text{ursprüngliche Silbermenge}} = \alpha$ in Abhängigkeit von der Molekularkonzentration des Silbers $\frac{M}{M+N}$ dargestellt. Bei vollständig gleichmäßiger Verteilung der Silber- und Gold-Moleküle im Raumgitter sollte der Quotient α bei Änderung der Molekularkonzentration sich auf der gebrochenen Linie *abcd* ändern, er ändert sich aber bei 15,5 stündiger Extraktionsdauer auf der Kurve *aehd*, die sich der gebrochenen Linie *abcd* ziemlich nahe anschmiegt. Bei Vergrößerung der Extraktionsdauer rückt die α-Kurve nach rechts und steilt sich dabei auf. (Kurven für die Extraktionsdauer 27,5 und 40,5 Stunden.) Mit wachsender

Extraktionsdauer wird also den Legierungen infolge von langsam verlaufenden Reaktionen immer mehr und mehr Silber entzogen. Es existiert aber eine α-Grenzkurze, die dadurch definiert ist, daß den Legierungen das durch die schnell verlaufende Reaktion entziehbare Silber gerade entzogen ist. (Siehe auch die Versuche der Tab. 3.) Die Koordinaten dieser Kurve findet man angenähert, indem man von den Ordinaten der α-Kurve für 15,5 stündige Extraktion die Änderung der α-Werte für eine weitere Extraktionsdauer von 15,5 Stunden abzieht. Die so erhaltenen Koordinaten ergeben die α-Grenzkurve: α—G.



Figur 4.

Auf die Lage der α-Grenzkurve ist der Zustand der Legierungen von Einfluß. Durch Glühen der Legierungen wird die α-Grenzkurve nach höheren Silberkonzentrationen hin verschoben, den Legierungen wird um so weniger Silber entzogen, je länger sie geglüht wurden. Durch Glühen werden also die Silber-Gold-Legierungen edler. Vergleicht man die α-Werte nach 9,5 stündiger Extraktion derselben Legierungen, wenn sie nicht geglüht und wenn sie 41 Stunden lang geglüht waren, so findet man:

Gewichtsprozente Ag	ungeglüht α	41 Stunden geglüht α
44,9	0,218	0,076
39,9	0,041	0,015
34,9	0,0010	0,00046

Die Lösungsgeschwindigkeit des Silbers der ungeglühten ist also erheblich größer als die der geglühten Legierungen. Beim Glühen ändert sich aber die Struktur; die Fluidalstruktur der „harten“ gewalzten Plättchen verwandelt sich in die grob krystallinische der „weichen“ Plättchen. Aber auch nachdem diese Veränderung stattgefunden hat, ist der Unterschied noch deutlich wahrnehmbar, obwohl die geätzten Oberflächen der 41 und 111 Stunden geglühten Plättchen im wesentlichen dasselbe Ätzbild zeigen. Bei 28 stündiger Extraktion ergaben sich folgende α-Werte:

Legierung mit	41 Stunden geglüht α	111 Stunden geglüht α
34,9 % Ag	0,0090	0,0069

Bei der Deutung der Abnahme des Lösungsgeschwindigkeit infolge von Glühen der Legierungen sind folgende Dinge zu berücksichtigen:

1. Die Bildung von Schichtkrystallen bei der Krystallisation der Legierungen. Dem Zustandsdiagramm der Silber-Gold-Legierungen entsprechend müssen die zuerst gebildeten Schichten der Silber-Gold-Mischkrystalle goldreicher sein als die folgenden Schichten. Beim Walzen der Legierungen würden diese Schichten verschiedener Zusammensetzung sich regellos verteilen. Beim Glühen der Legierungen würden sich die Unterschiede ausgleichen und die Legierung würde edler erscheinen.

2. Der Übergang der Fluidalstruktur der „harten“ in die gröbere krystallinische Struktur der „weichen“ Legierungen kann wegen Verschwindens von Gleitebenen und wegen Umorientierung der Krystallite die Lösungsgeschwindigkeit verkleinern[1]).

3. Beim Vorgang der Krystallisation verteilen sich die in der Schmelze ungleichmäßig verteilten Silber- und Gold-Moleküle möglichst gleichmäßig im Raumgitter. Es wäre aber sehr wohl möglich, daß je schneller die Krystallisation verläuft, um so mehr sich die Molekülverteilung im Mischkrystall von der stabilsten gleichmäßigen Verteilung unterscheidet. Je gleichmäßiger die Verteilung der Ag- und Au-Moleküle wird, um so mehr sind die Ag-Moleküle durch die Au-Moleküle vor der Wirkung der Säure geschützt, und je länger die Legierungen einer höheren Temperatur, bei der die Diffusionsgeschwindigkeit höhere Werte hat, ausgesetzt werden, um so edler können sie werden.

Das hier mitgeteilte Beobachtungsmaterial reicht noch nicht hin, um die Wirkungen jener 3 Ursachen auf die Lösungsgeschwin-

1) Lehrbuch der Metallographie von G. Tammann S. 128—130.

digkeit des Silbers aus den Ag-Au-Legierungen zu trennen, doch scheint es sehr wahrscheinlich, daß auch die dritte Ursache die Lösungsgeschwindigkeit merklich beeinflußt.

Auffallend ist es, daß bei den goldreichsten Legierungen, sowohl den Silber- als auch den Kupfer-Legierungen, die Menge des Gelösten nicht, wie zu erwarten wäre, abnimmt. Eine geringe Löslichkeit des Goldes würde dahin wirken, daß Mengen, die von der Zusammensetzung der Legierung unabhängig sind, gelöst werden.

Tabelle 1.

Gold-Silber-Legierungen in „hartem" Zustande.

Zusammensetzung der ursprünglichen Legierungen Silbergehalt		Ursprüngliches Gewicht der Plättchen in gr	Gesamte Kochdauer z in Stunden	Gewicht nach z-stündigem Kochen in 1,3 sp. HNO_3	Gelöste Silbermenge in Prozenten des ursprüngl. Gewichts der Legierungen	α gelöste Silbermenge dividiert durch die ursprüngliche
in Gewichtsprozenten	$\frac{M}{M+N}$					
59,96	0,7324	1,9143	9,5	0,7686	59,85	1,00
54,93	0,6902	2,3296	9,5	1,0583	54,57	0,99
			15,5	1,0511	54,88	1,00
50,00	0,6464	2,4014	9,5	1,2245	49,01	0,98
			15,5	1,2105	49,59	0,99
44,92	0,5985	2,2906	9,5	2,0661	9,80	0,22
			15,5	1,5034	34,37	0,77
39,88	0,5480	2,2441	9,5	2,2076	1,62	0,04
			15,5	2,0263	9,70	0,24
			27,5	1,8875	15,89	0,40
			40,5	1,7090	23,84	0,60
34,94	0,4954	2,4844	9,5	2,4835	0,03	0,001
			15,5	2,4586	1,03	0,030
			27,5	2,4489	1,43	0,041
			40,5	2,4315	2,12	0,061
24,94	0,3779	1,3956	10	1,3849	0,82	0,033
19,92	0,3126	1,5079	10	1,4989	0,59	0,030
10,00	0,1688	1.5373	10	1,5260	0,73	0,074

Tabelle 2.

Gold-Silber-Legierungen in „weichem“ Zustande.

41 Stunden bei 820° geglüht.

Zusammensetzung der ursprünglichen Legierungen Silbergehalt in Gewichtsprozenten	$\frac{M}{M+N}$	Ursprüngliches Gewicht der Plättchen in gr	Gesamte Kochdauer z in Stunden	Gewicht nach z-stündigem Kochen in 1,3 sp. HNO_3	Gelöste Silbermenge in Prozenten des ursprüngl. Gewichts der Legierungen	α gelöste Silbermenge dividiert durch die ursprüngliche
59,96	0,7324	1,9043	9,5	0,7588	60,15	1,00
54,93	0,6902	2,2256	9,5	1,0020	54,98	1,00
50,00	0,6464	2,4190	9,5	1,2262	49,43	0,99
44,92	0,5985	2,2184	9,5	2,1431	3,39	0,076
			15,5	1,7182	22,55	0,50
39,88	0,5480	2,3401	9,5	2,3265	0,58	0,015
			15,5	2,2966	1,85	0,047
			27,5	2,1863	6,57	0,16
			40,5	2,0499	12,40	0,31
34,94	0,4954	2,5035	9,5	2,5031	0,02	0,0005
			15,5	2,4987	0,19	0,0055
			27,5	2,4956	0,31	0,0090
			40,5	2,4776	1,03	0,030
24,94	0,3779	1,4396	9,5	1,4370	0,18	0,0072
19,92	0,3126	1,5724	9,5	1,5700	0,15	0,0077
10,00	0,1688	1,4968	9,5	1,4924	0,29	0,0294

Tabelle 3.

Gold-Silber-Legierungen in „weichem“ Zustande.

111 Stunden bei 820° geglüht.

Zusammensetzung der ursprünglichen Legierungen Silbergehalt in Gewichtsprozenten	$\frac{M}{M+N}$	Ursprüngliches Gewicht der Plättchen in gr	Gesamte Kochdauer z in Stunden	Gewicht nach z-stündigem Kochen in 1,3 sp. HNO_3	Gelöste Silbermenge in Prozenten des ursprüngl. Gewichts der Legierungen	α gelöste Silbermenge dividiert durch die ursprüngliche
59,96	0,7324	1,9040	28	0,7599	60,09	1,00
54,93	0,6902	2,3532	28	1,0621	54,87	1,00
50,00	0,6464	2,4256	28	1,2200	49,70	0,99
44,92	0,5985	2,2489	28	1,2556	44,17	0,98
39,88	0,5480	2,1699	38	1,7865	17,67	0,44
34,94	0,4954	2,4342	28	2,4283	0,2418	0,0069

Tabelle 4.

Versuche der Deutschen Gold- und Silber-Scheidenanstalt in Frankfurt a. M.

Gold-Silber-Legierungen im „harten“ Zustande mit HNO_3 (spg. 1,30) extrahiert, gewaschen, geglüht bei 600° und gewogen. Die erste Extraktion dauerte jedesmal 0,75 Stunden und alle darauf folgenden 5 Stunden.

Gewichts-prozente Ag	$\frac{M}{M+N}$	Gewicht der Plättchen in gr	Gewichts-abnahme	α Gelöste Silbermenge dividiert durch die ursprüngliche	In 5 Stunden gelöste Silbermenge in 0,1 mgr., wenn die Extraktion zum Schluß sehr langsam vor sich geht
60 %	0,733	0,6345	0,3794 0,0003 0,0000	0,9972	
55	0,691	0,6915	0,2949 0,0685 0,0023 0,0020 0,0005 0,0000	0,967	
50	0,646	0.8151	0,1225 0,1841 0,0053	0,765	24, 26, 24, 21, 26, 37, 27 37, 22, 32, 27, 31, 27, 29 ...
45	0,599	0,6145	0,0241 0,0768 0,0318 0,0066	0,503	31, 34, 23, 31, 31, 27, 18 15, 20, 13, 15, 13, 16, 30 ...
40	0,549	0,8240	0,0055 0,0219 0,0306 0,0014 0,0003 0,0000	0,098	
35	0,496	0,7775	0,0015 0,0003 0,0000	0,0065	

Zu den Versuchen der Tab. 4 ist zu bemerken, daß das Glühen der Legierungen behufs Trocknen derselben vor der Wägung einen merklichen, wenn auch nicht sehr erheblichen Einfluß auf die gelösten Silbermengen im Vergleich zu den Versuchen, bei denen bei Zimmertemperatur getrocknet wurde, ausübt. Bei den Legierungen mit weniger als 52,5 % Au wird durchs Glühen die gelöste Silbermenge verringert und bei den Legierungen mit mehr als

52.5 % Au vergrößert. Die Verringerung ist offenbar auf Diffusion und Bildung von Au-reicheren Legierungsschichten während des Glühens zurückzuführen. Der Grund der Vergrößerung kann nicht so sicher angegeben werden. Vielleicht werden beim starken durch das Glühen bewirkten Schrumpfen der porös gewordenen Plättchen tiefer liegende Schichten der Säure-Wirkung zugänglich. Die verkleinernden und vergrößernden Wirkungen des Glühens kompensieren sich bei der Legierung mit 52.5 % Au.

Tabelle 5.

Gold-Kupfer-Legierungen in „hartem“ Zustande.

Zusammensetzung der ursprünglichen Legierungen, Kupfergehalt in Gewichtsprozenten	$\frac{M}{M-N}$	Ursprüngliches Gewicht der Plättchen in gr	Gesamte Kochdauer z in Stunden	Gewicht nach z-stündigem Kochen in 1.3 sp. HNO_3	Gelöste Kupfermenge in Prozenten d. ursprüngl. Gewichts der Legierungen	α gelöste Kupfermenge dividiert durch die ursprüngliche
60.12	0,8238	1,4386	10	0,5753	60,01	1,00
55.24	0.7916	1.2582	10	0.5685	54,82	1,00
50,12	0,7571	1,5108	10	0,7577	49,85	0,99
45.14	0.7155	1.2949	10	0,7748	44,55	0,99
39.96	0.6757	1.7476	10	1.0544	39.67	0.99
35.24	0.6250	1.6544	10	1.0561	33.15	0,94
30.00	0.5707	2.1169	10	1.8497	18.46	0.60
21.00	0.4529	2.1865	10	2.1585	0,448	0,029
14.14	0.2998	1.8465	10	1,8846	0.153	0,015

Tabelle 6.

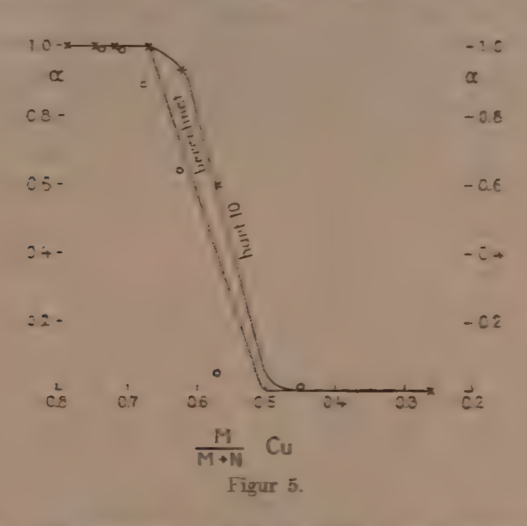
Gold-Kupfer-Legierungen in „weichem“ Zustande.

49 Stunden bei 700° geglüht.

Zusammensetzung der ursprünglichen Legierungen, Kupfergehalt in Gewichtsprozenten	$\frac{M}{M-N}$	Ursprüngliches Gewicht der Plättchen in gr	Gesamte Kochdauer z in Stunden	Gewicht nach z-stündigem Kochen in 1.3 sp. HNO_3	Gelöste Kupfermenge in Prozenten d. ursprüngl. Gewichts der Legierungen	α gelöste Kupfermenge dividiert durch die ursprüngliche
60.12	0.8238	1.3208	13	0.5253	60.23	1.00
55.24	0.7916	1.3617	13	0.6053	55.33	1,01
50.12	0.7571	1.6748	13	0.5495	49.65	0.99
45.14	0.7155	1.8498	13	0.7415	44.80	0.99
39.96	0.6757	1.6596	13	1.0020	35.14	0.88
35.24	0.6250	1.6147	13	1.2510	22.52	0.64
30.00	0.5707	2.0222	13	2.0057	1.65	0,055
21.00	0.4529	2.1693	13	2.1602	0.26	0.013
14.14	0.2995	1.5465	13	1.5415	0.27	0.027

In den Tabellen 5 und 6 sind für die Kupfer-Gold-Legierungen die Resultate einer ganz analogen Untersuchung, wie sie für die Silber-Gold-Legierungen durchgeführt wurde, zusammengestellt.

Die Theorie fordert für die Kupfer-Gold-Legierungen dieselbe Abhängigkeit der α-Linie von dem Molenbruch des Kupfers, den sie für die Silber-Gold-Legierungen angibt. Die Erfahrung be-



Figur 5.

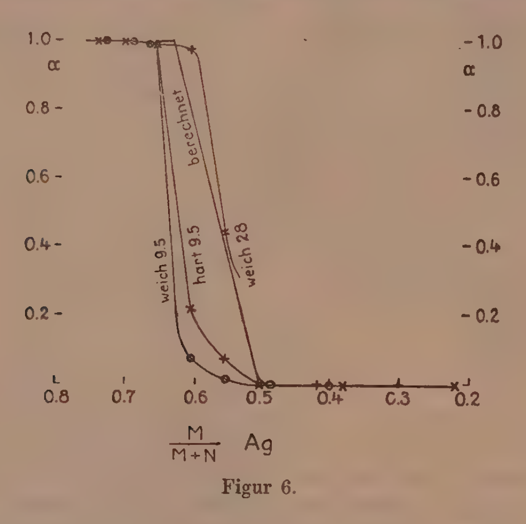
stätigt diese Forderung. In Fig. 5 fällt die „berechnete" Linie, die mit der für die Ag-Au-Legierungen identisch ist, in der Tat mit der durch Kreise bezeichneten α-Linie der 49 Stunden geglühten und 13 Stunden extrahierten Kupfer-Gold-Legierungen nahe zusammen.

Vergleich der Beobachtungen mit der Theorie.

Die Beobachtungen weisen darauf hin, daß bei der Wirkung von Salpetersäure auf die aus Mischkrystallen bestehenden Ag-Au- und Cu-Au-Legierungen eine relativ schnelle und eine viel langsamer verlaufende Reaktion sich vollziehen. Bei einer Extraktionsdauer von 9.5 Stunden ist die erste Reaktion noch nicht ganz beendet, wohl aber, wenn dieselbe 28 Stunden beträgt. Dementsprechend ist zu erwarten, daß die Grenzkurve $\alpha = f\left(\frac{M}{M+N}\right)$, welche die Abhängigkeit der durch die erste Reaktion gelösten Silbermengen dividiert durch die ursprünglich vorhandenen von

der molekularen Zusammensetzung angibt, zwischen die beiden α-Kurven für 9,5 und 28 Stunden Extraktionsdauer fallen wird. Es sollte also die so definierte Grenzkurve $\alpha = f\left(\frac{M}{M+N}\right)$ zwischen die beiden Kurven „weich 28“ und „weich 9,5“ Fig. 6 fallen.

Andererseits wurde gezeigt, daß unter den Annahmen gleichmäßiger Verteilung der beiden Molekülarten in einem kubischen Raumgitter und der Wirkungslosigkeit der Salpetersäure auf die in den Seiten-Diagonalen der Raumgitterelemente stehenden Silberatome den Legierungen mit dem Molenbruch größer als 0,625 alles Silber entzogen werden muß, während den Legierungen mit dem



Figur 6.

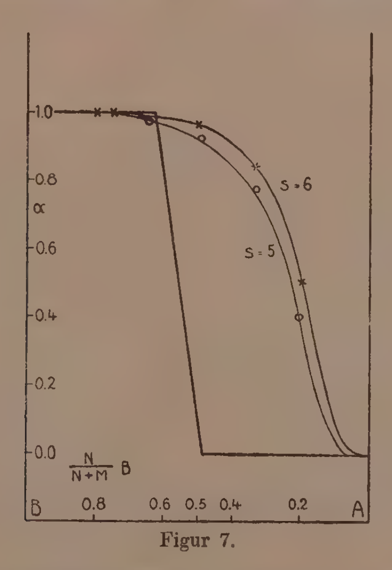
Molenbruch kleiner als 0,5 fast gar kein Silber entzogen werden kann. Den Legierungen, deren Molenbrüche zwischen 0,625 und 0,5 Ag liegen, sollten Silbermengen entzogen werden, welche proportional der Änderung des Molenbruches sind.

Die Forderung trifft auch zu. Die Linie $\alpha = f\left(\frac{M}{M+N}\right)$, welche die Theorie fordert, fällt mit der Grenzkurve $\alpha = f\left(\frac{M}{M+N}\right)$ bei $\frac{M}{M+N}$ Werten $> 0{,}625$ und $< 0{,}5$ zusammen und zwischen $0{,}625 - 0{,}5$ fällt die berechnete Linie zwischen die Kurven „weich 9,5“ und „weich 28“ (Fig. 6).

Man darf also sagen, daß die Grenzkurve, deren Lage zwischen

$\frac{M}{M+N} = 0,625$ und 0,5 nicht ganz genau bekannt ist, von der berechneten α-Linie nur wenig abweichen kann. Die Differenzen der Ordinaten der berechneten Linie und der Grenzkurve würden auf Abweichungen der wirklichen Molekularverteilung von den vollkommen gleichmäßigen zurückzuführen sein.

Die Erfahrung bestätigt also vor allem die auch sonst wahrscheinlich gemachte Annahme einer fast gleichmäßigen Verteilung zweier Molekülarten in demselben Raumgitter. Auch lehrt sie, daß die Funktion $\alpha = f\left(\frac{M}{M+N}\right)$ von der Natur des löslichen Metalls nahezu unabhängig ist, wenn nur das Raumgitter dasselbe ist. Ferner lehrt sie, wie angenommen wurde, daß die lösende Wirkung der Salpetersäure auf die anisotropen Ag- und Cu-Atome



Figur 7.

in den Haupt-Richtungen des Raumgitters viel schneller vor sich geht als in den Richtungen der Seiten-Diagonalen der Raumgitterelemente.

Die Lösungsgeschwindigkeit eines anisotropen Moleküls hat also in gewissen Richtungeu sehr ausgeprägte Maxima.

In der Resistenz gegenüber einem Lösungsmittel, welches die eine Molekülart aus einer Mischung löst, die andere aber intakt läßt, besteht für den isotropen und anisotropen Zustand ein großer Unterschied, den Fig. 7 zur Anschauung bringt. Sie gibt die

α-Werte, die gelösten Mengen der löslichen Molekülart bezogen auf ihre Menge in der Mischung in Abhängigkeit von der Zusammensetzung wieder, und zwar die von der Theorie geforderten α-Werte, mit denen die wirklich gefundenen nahe übereinstimmen.

Die gebrochene Linie bezieht sich auf die anisotropen Mischungen, die beiden Kurven $s = 5$ und $s = 6$ auf isotrope Mischungen. Die Kurven stellen die α-Werte für die Fälle dar, daß 1 B-Molekül durch 4 A- respektive 5 A-Moleküle vor der Wirkung des Lösungsmittles geschützt wird.

Während eine anisotrope Mischung mit gleicher Zahl von A- und B-Molekülen vom Lösungsmittel fast gar nicht angegriffen wird, hinterläßt die isotrope Mischung einen recht B-armen Rückstand.

Beiträge zur Voigtschen Theorie der komplexen Zeeman-Effekte im Anschluss an die bez. Sommerfeldsche Arbeit.

Von

Johan Helo.

Vorgelegt von W. Voigt am 18. September 1914.

Zur Erklärung der von den Herren Paschen und Back[1]) beobachteten gegenseitigen Einwirkung von Seriendupletts und -triplets im Magnetfelde hat Prof. Voigt[2]) eine Koppelungstheorie aufgestellt, die anscheinend das Wesentlichste der Vorgänge bei den Natrium-Duplets richtig wiedergibt. Später hat Sommerfeld[3]) gezeigt, wie man die Voigtschen Gleichungen für D-Duplets unter Vernachlässigung des Dämpfungsgliedes in eine überaus einfache Form bringen kann. Bezeichnen nämlich ζ_1, ζ_2, ζ_3 die von Voigt eingeführten drei komplexen Freiheitsgrade parallel zu den magnetischen Kraftlinien, welche die D-Duplets charakterisieren, so kann man die Voigtschen Differentialgleichungen für die longitudinalen p-Komponenten in symbolischer Form

$$(1) \qquad \left(\frac{d^2}{dt^2} + ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\zeta_\varkappa = \frac{ih}{3}\frac{d}{dt}(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3)$$

schreiben, wo $h = \dfrac{eH}{m}$ die doppelte normale Aufspaltung und $n_\varkappa (\varkappa = 1, 2, 3)$ die Frequenzen der feldlosen Linien bezeichnen.

1) F. Paschen und E. Back, Ann. d. Phys. **39**, 897, 1912.
2) W. Voigt, Ann. d. Phys. **41**, 403, 1913.
3) A. Sommerfeld, Gött. Nachr. 1914.

Sind n_1, n_2, n_3 verschieden, so stellt das feldlose System drei einfache Linien dar, von denen jede einzelne sich in ein Duplet zerlegt. Bei den Serienduplets vom D-Typus ist $n_2 = n_3$, also D_2 eine Doppellinie.

In derselben Weise werden in den für die drei komplexen Freiheitsgrade $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ normal zum Magnetfelde die Voigtschen Gleichungen für die transversalen s-Komponenten symbolisch

$$(2') \qquad \left(\frac{d^2}{dt^2} + ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\zeta_\varkappa = -\frac{ih}{3}\frac{d}{dt}\left(\zeta_\varkappa + e^{i\beta}\zeta_{\varkappa+1} + e^{-i\beta}\zeta_{\varkappa+2}\right)$$

geschrieben, wobei $\cos 3\beta = 1$ sein muß, damit bei starken Feldern eine Linie normaler Aufspaltung relativ gegen den Schwerpunkt des feldlosen Systems auftrete. Setzt man hier, wie Sommerfeld, $\beta = 0$, so erhält man die einfache mit (1) nahezu identische Gleichung

$$(2) \qquad \left(\frac{d^2}{dt^2} + ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\zeta_\varkappa = -\frac{ih}{3}\frac{d}{dt}(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3).$$

Die Frequenzen findet man hieraus in Übereinstimmung mit den Voigtschen Gleichungen; um aber die Intensitäten in Übereinstimmung mit Voigt zu erhalten, wird es nötig, die Größen $\zeta_\varkappa$ mit bestimmten „Gewichten" zu multiplizieren. Setzt man aber $\beta = \frac{2\pi}{3}$, so erhält man daraus die Voigtschen Gleichungen wieder.

Die Voigtschen komplexen Freiheitsgrade $\zeta_\varkappa$ der Spektrallinien sind für die longitudinalen und die transversalen Freiheitsgrade von der Form $z_k \pm i\mathfrak{z}_k$ resp. $x_k \pm iy_k$; die doppelten Vorzeichen der letzteren entsprechen den beiden zirkularen Schwingungen, die in longitudinaler Richtung emittiert werden und im allgemeinen Komponenten auf verschiedenen Seiten der feldlosen Linie liefern. Analog entsprechen die doppelten Vorzeichen der ersteren zwei linearen Schwingungen parallel dem Magnetfeld, welche bei Beobachtung normal zum Feld Komponenten zu beiden Seiten der feldlosen Linie liefern. Die Gleichungen (1) und (2) beziehen sich speziell auf die Komponenten der negativen Seite, d. h. kleinerer Frequenzen. Diejenigen der positiven Seite erhält man nach Sommerfeld durch Vertauschung von h mit $-h$.

Ersetzt man in Formel (1) und (2) die rechte Seite durch Null, so erhält man drei Formeln, welche die Aufspaltung der drei Linien sowohl für die p- als für die s-Schwingungen in ein Duplet von normaler Weite ausdrücken. Dies ist unabhängig davon, ob

alle drei $n_\varkappa$ von einander verschieden oder teilweise einander gleich sind. Betrachtet man (im Widerspruch mit der elementaren Lorentzschen Theorie) diese Zerlegung als die normale für die einzelne Linie, so erscheinen die rechts stehenden Glieder in (1) und (2) als Ausdruck der Koppelungen. Um nicht Kollision mit vorhandenen Bezeichnungen hervorzurufen, mögen diese Glieder weiterhin als die Störung bezeichnet werden, welche die oben charakterisierten normalen Quadruplets infolge der Koppelungen erleiden.

Die merkwürdige und symmetrische Form der Gleichungen (1) und (2), wo die Zahl 3 eine bestimmende Rolle spielt, gibt Sommerfeld Anlaß zur Vermutung, daß in ihr ein Gesetz auch für allgemeinere Fälle gefunden sei, wenn man darin nur statt 3 je die für jene Fälle charakteristische Anzahl der Elektronen einführt. Die allgemeine Gleichung für q gekoppelte Elektronen lautet somit nach diesem Ansatz

$$(3) \qquad \left(\frac{d^2}{dt^2} + ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\xi_\varkappa = \pm\frac{ih}{q}\frac{d}{dt}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_q),$$

wo das + Zeichen für die longitudinalen, das − Zeichen für die transversalen Komponenten der negativen Seite gilt.

Prof. Voigt regte mich an, die verallgemeinerten Formeln für $q = 4$ näher zu untersuchen und ich möchte hier ihm dafür ebenso wie für sein weiteres Interesse am herzlichsten danken. Es ist offenbar von Interesse, festzustellen, welche Erscheinungen für diesen Fall zu erwarten wären. Bei der Arbeit wurde aber sofort ersichtlich, daß auch der allgemeine Fall mit q Elektronen bis zu einem gewissen Grade einer Behandlung zugänglich war, sodaß ich mich entschloß, das Problem in seiner ganzen Allgemeinheit in Angriff zu nehmen.

Um das etwas künstliche Operieren mit den „Gewichten" bei der Intensitätsberechnung zu vermeiden, werden wir statt der Formel (2) die mit den Voigtschen Gleichungen identische Gleichung

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\xi_\varkappa = -\frac{ih}{3}\frac{d}{dt}\left(\xi_\varkappa + e^{\frac{2\pi i}{3}}\xi_{\varkappa+1} + e^{\frac{4\pi i}{3}}\xi_{\varkappa+2}\right)$$

behandeln, die aus (2′) für $\beta = \frac{2\pi}{3}$ folgt. Die Verallgemeinerung dieser Formel lautet

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\xi_\varkappa = -\frac{ih}{q}\frac{d}{dt}(\xi_\varkappa + k\,\xi_{\varkappa+1} + k^2\,\xi_{\varkappa+2} + \cdots + k^{q-1}\,\xi_{\varkappa+q-1}),$$

wo $k = e^{\frac{2\pi i}{q}}$ die q-te Einheitswurzel bedeutet. Es wird weiter unten bewiesen, daß diese Gleichung dieselben Frequenzen wie (3) liefert. Die Grundformeln für die p-Komponenten der negativen Seite lauten somit

$$(4)\qquad \left(\frac{d^2}{dt^2} + ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\xi_\varkappa = \frac{ih}{q}\frac{d}{dt}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots \xi_q);$$

für die s-Komponenten

$$(5)\qquad \left(\frac{d^2}{dt^2} + ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\xi_\varkappa = -\frac{ih}{q}\frac{d}{dt}(\xi_\varkappa + k\xi_{\varkappa+1} + k^2\xi_{\varkappa+2} + \cdots + k^{q-1}\xi_{\varkappa+q-1}).$$

Die Grundformeln für die Komponenten der positiven Seite kann man aus den vorigen Formeln durch eine einfache (unstrenge) Überlegung gewinnen. Die entsprechenden Koeffizienten der ersten Ableitungen in den Gleichungen für dieselben Komponenten verschiedener Seite sind nach der Theorie von Voigt allgemein einander konjugiert komplex. Alle diese Koeffizienten sind in der speziellen Gleichung (4) rein imaginär; sie werden somit in der Gleichung für die Komponenten der positiven Seite ihr Zeichen ändern. Für die longitudinalen Komponenten der positiven Seite ist somit

$$(6)\qquad \left(\frac{d^2}{dt^2} - ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\xi_\varkappa = -\frac{ih}{q}\frac{d}{dt}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_q).$$

In der Gleichung (5) sind die Koeffizienten von der Form $-ik^\nu$; die entsprechenden Koeffizienten in der Gleichung für die Komponenten der positiven Seite sind also $ik^{-\nu}$ oder $ik^{q-\nu}$. Die Gleichungen für die s-Komponenten der positiven Seite lauten somit

$$(7)\qquad \left(\frac{d^2}{dt^2} - ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\xi_\varkappa = \frac{ih}{q}\frac{d}{dt}(\xi_\varkappa + k^{q-1}\xi_{\varkappa+1} + k^{q-2}\xi_{\varkappa+2} + \cdots + k\,\xi_{\varkappa+q-1}).$$

Für $q = 3$ kann man die Formeln (6) und (7) direkt aus den Voigtschen Gleichungen in derselben Weise gewinnen wie dies Sommerfeld bez. der Formel (1) und (2) getan hat.

Diskussion der Frequenzgleichungen.

Die longitudinalen Komponenten der negativen Seite.

Wir werden jetzt die allgemeine Frequenzgleichung bei beliebigen Feldern aufstellen und werden dabei die verschiedenen Komponenten getrennt behandeln. Ist die Lösung für irgendeine Komponente gefunden, so wird sie mit leichten Modifikationen für die anderen gelten. Dabei werden wir immer Rücksicht darauf nehmen, daß die praktischen Frequenzberechnungen möglichst einfach werden und alles überflüssige Rechnen vermieden wird.

1. Die zu Grunde liegende Differentialgleichung für die p-Komponenten der negativen Seite lautet

$$(1) \qquad \left(\frac{d^2}{dt^2} + ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\xi_\varkappa = \frac{ih}{q}\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{q}\xi_\mu,$$

wo $\varkappa$ von 1 bis q läuft. Dieses System von q simultanen Gleichungen läßt sich in folgender Weise überraschend einfach lösen.

Zuerst bemerkt man, daß die rechte Seite ganz invariant gegenüber $\varkappa$ ist; für jeden Wert $\varkappa$ nimmt sie und folglich auch die linke Seite einen und denselben Wert an. Wir schreiben also die Gleichung in der Form

$$(2) \qquad \left(\frac{d^2}{dt^2} + ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\xi_\varkappa = C',$$

wo C' eine von $\varkappa$ unabhängige Größe

$$C' = \frac{ih}{q}\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{q}\xi_\mu$$

bedeutet.

Geht man nun, um eine partikulare Lösung zu finden, mit dem Ansatz $\xi_\varkappa = A_\varkappa e^{i\nu t}$ in (2) ein und setzt man zur Abkürzung

$$(3) \qquad k_\varkappa = \frac{1}{\nu}(-\nu^2 - \nu h + n_\varkappa^2),$$

$$C = \frac{1}{\nu e^{i\nu t}}C' = -\frac{h}{q}\sum_{\mu=1}^{q}A_\mu,$$

so wird

$$k_\varkappa A_\varkappa = C$$

oder

$$(4) \qquad A_\varkappa = \frac{C}{k_\varkappa}.$$

Durch Summation erhält man

$$\sum_{\varkappa=1}^{q} A_\varkappa = C \sum_{\varkappa=1}^{q} \frac{1}{k_\varkappa}$$

oder, da

$$C = -\frac{h}{q} \sum_{\mu=1}^{q} A_\mu$$

ist,

$$(5) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{q} \frac{1}{k_\varkappa} = -\frac{q}{h}.$$

Durch Einsetzung der Werte $k_\varkappa$ erhält man hieraus die gesuchte Gleichung für ν.

Die Substitution von (3) in (5) läßt sich weiter in folgender Weise bequem ausführen.

Es ist identisch

$$k_\varkappa = \frac{1}{\nu}(-\nu^2 - \nu h + N^2) - \frac{1}{\nu}(N^2 - n_\varkappa^2),$$

wo N eine vorläufig unbestimmte Konstante bezeichnet. Wir setzen

$$2x = \frac{1}{\nu}(-\nu^2 - \nu h + N^2),$$

$$2\alpha_\varkappa = \frac{1}{\nu}(N^2 - n_\varkappa^2),$$

so daß es ist

$$k_\varkappa = 2(x - \alpha_\varkappa).$$

Wenn man nun mit $f(x)$ das Polynom q-ten Grades

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_q)$$

bezeichnet und die Identität

$$\frac{1}{2}\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{q}\frac{1}{x-\alpha_\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{q}\frac{1}{k_\varkappa}$$

beachtet, so lautet die Gleichung (5) einfach

$$\frac{1}{2}\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{q}{h}$$

oder

$$(6) \qquad F(x) = f(x) + \frac{h}{2q} f'(x) = 0.$$

Diese Gleichung hat eine anschauliche Bedeutung. $f(x) = 0$,

d. h. also $x = \alpha_\varkappa$ bestimmt die Zerlegung der einzelnen Linien in normale Quadruplets nach der Definition von S. 367; in (6) tritt noch das Glied $\frac{h}{2q} f'(x)$ als „Störung" infolge der Koppelungen hinzu.

Die Größen $\alpha_\varkappa$ enthalten noch im Nenner den Faktor ν. Um ihn wegzuschaffen sei bemerkt, daß die Aufspaltung auch in den stärksten Feldern klein gegen die Frequenz ist. Wird also N gleich oder nahezu gleich irgendeinem $n_\varkappa$ gewählt, so kann man in $N^2 - n_\varkappa^2 = (N + n_\varkappa)(N - n_\varkappa)$ mit genügender Annäherung 2ν statt $N + n_\varkappa$ setzen. Es wird dann

$$\alpha_\varkappa = \frac{1}{2\nu}(N^2 - n_\varkappa^2) \sim d_\varkappa,$$

wo $d_\varkappa$ in Frequenzen den Abstand zwischen den Linien mit Frequenzen N und $n_\varkappa$ mißt.

Die Gleichung (6) lautet somit

$$(7) \quad x^q + x^{q-1}\left(\frac{h}{2} - \sum d_\varkappa\right) + x^{q-2}\left(\sum d_\varkappa d_\mu - \frac{q-1}{2q} h \sum d_\varkappa\right) + \cdots = 0.$$

Um die Bildung dieser Gleichung zu vereinfachen, setzt man geeignet N gleich irgendeinem $n_\varkappa$, sodaß die entsprechende Größe $d_\varkappa$ gleich Null wird. Auch kann man N gleich dem arithmetischen Mittelwert $N = \frac{1}{q}(n_1 + n_2 + \cdots + n_q)$ setzen, so daß $\sum d_\varkappa = 0$ wird und die Koeffizienten $a_1, a_2 \ldots$ der Funktion $f(x)$ sukzessiv durch die Potenzsummen $s_\nu = \sum d_\varkappa^\nu$ nach den Formeln

$$\begin{aligned} s_1 + a_1 &= 0 \\ s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 &= 0 \\ s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots& \end{aligned}$$

berechnen, die sich wegen $s_1 = \sum d_\varkappa = -a_1 = 0$ beträchtlich vereinfachen.

2. Ist eine Wurzel der Gleichung (7) bekannt, so erhält man die entsprechende Frequenz ν aus der Gleichung

$$\frac{1}{\nu}(-\nu^2 - \nu h + N^2) = 2x,$$

woraus

$$\nu = -\frac{h}{2} - x + \sqrt{\left(\frac{h}{2} + x\right)^2 + N^2}$$

oder, da h und auch x, wie weiter unten bewiesen wird, klein gegen N sind, mit hinreichender Genauigkeit

$$\nu = N - \frac{h}{2} - x. \tag{8}$$

Die praktische Berechnung der Frequenzen wird somit nach folgenden Formeln ausgeführt:

$$d_\varkappa = N - n_\varkappa,$$
$$f(x) = (x - d_1)(x - d_2)\ldots(x - d_q),$$
$$F(x) = f(x) + \frac{h}{2q} f'(x) = 0,$$
$$\nu = N - \frac{h}{2} - x.$$

3. Die Wurzeln der Frequenzgleichung (7) können wegen des eigentümlichen Baus der Gleichung in ziemlich enge Grenzen eingeschlossen werden. Es ist nämlich

$$F(d_\varkappa) = f(d_\varkappa) + \frac{h}{2q} f'(d_\varkappa)$$

oder, da $f(d_\varkappa) = 0$ ist,

$$F(d_\varkappa) = \frac{h}{2q} f'(d_\varkappa).$$

Da die Wurzeln $d_\varkappa$ der Gleichung $f(x) = 0$ sämtlich reell sind, so muß $f'(x)$ für die sukzessiven Werte $d_1, d_2, d_3, \ldots$ verschiedenes Zeichen besitzen. Folglich ist

$$\text{sign}\, F(d_\varkappa) \text{ ungleich sign}\, F(d_{\varkappa+1}).$$

Die Frequenzgleichung besitzt somit je eine Wurzel zwischen den sukzessiven Werten $d_\varkappa$. Setzt man der Einfachheit wegen

$$N = n_q \quad (n_1 \leqq n_2 \leqq \ldots \leqq n_q),$$

so daß

$$d_1 \geqq d_2 \geqq \ldots \geqq d_q = 0$$

ist, so lauten die Wurzeln

$$\begin{aligned} x_1 &= d_1 - \varepsilon_1(d_1 - d_2) = d_1 - \varepsilon_1(n_2 - n_1) \\ x_2 &= d_2 - \varepsilon_2(d_2 - d_3) = d_2 - \varepsilon_2(n_3 - n_2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{q-1} &= d_{q-1} - \varepsilon_{q-1}(d_{q-1} - d_q) = d_{q-1} - \varepsilon_{q-1}(n_q - n_{q-1}), \end{aligned} \tag{8}$$

wobei die $\varepsilon_\varkappa$ zwischen 0 und 1 liegen. Die Wurzel x_q wird aus der Gleichung

$$\sum_{\varkappa=1}^{q} x_\varkappa = -\frac{h}{2} + \sum_{\varkappa=1}^{q} d_\varkappa$$

bestimmt; es wird sonach

(9) $$x_q = -\frac{h}{2} + \varepsilon_q (n_q - n_1).$$

In der Tat kann man schreiben, indem man alle $\varepsilon_\varkappa$ mit Eins vertauscht

$$x_\varkappa > d_\varkappa - (n_\varkappa - n_{\varkappa-1})$$

und somit, da $d_q = 0$ ist,

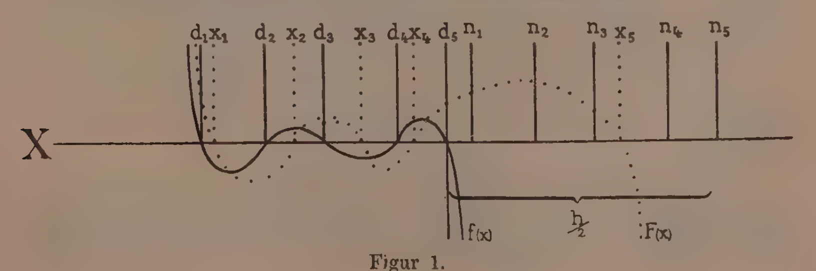
$$\sum_{\varkappa=1}^{q} d_\varkappa > \sum_{\varkappa=1}^{q-1} x_\varkappa > \sum_{\varkappa=1}^{q} d_\varkappa - (n_q - n_1);$$

hieraus folgt dann der angegebene Wert für x_q.

Die entsprechenden Frequenzen sind:

(10) $$\begin{aligned}
\nu_1 &= n_q - \frac{h}{2} - d_1 + \varepsilon_1 (n_2 - n_1) = n_1 - \frac{h}{2} + \varepsilon_1 (n_2 - n_1) \\
\nu_2 &= n_q - \frac{h}{2} - d_2 + \varepsilon_2 (n_3 - n_2) = n_2 - \frac{h}{2} + \varepsilon_2 (n_3 - n_2) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\nu_{q-1} &= n_q - \frac{h}{2} - d_{q-1} + \varepsilon_{q-1} (n_q - n_{q-1}) = n_{q-1} - \frac{h}{2} + \varepsilon_{q-1} (n_q - n_{q-1}) \\
\nu_q &= n_q - \frac{h}{2} + \frac{h}{2} - \varepsilon_q (n_q - n_1) = n_q - \varepsilon_q (n_q - n_1).
\end{aligned}$$

4. Die gewonnenen Resultate kann man anschaulich geometrisch darstellen. In dem unten bezeichneten Koordinatensystem, wo die positive x-Achse nach links gerichtet ist, ist der Verlauf der Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ für $q = 5$ eingetragen.



Figur 1.

Da $F(x) = f(x) + \frac{h}{2q} f'(x)$ ist, so werden die beiden Kurven sich in den extremen Punkten der ersteren schneiden, sodaß eine Nullstelle der Funktion $F(x)$ zwischen jeder Nullstelle von $f(x)$ und der zunächst kleineren Nullstelle von $f'(x)$ liegt. Die Nullstellen von $F(x)$ werden somit durch eine kleine Verschiebung nach rechts von den Nullstellen der $f(x)$ gewonnen, die am größten bei d_q ist. Die Verschiebungen der Nullstellen entsprechen nach (8) genau den Verschiebungen der Komponenten. Wird die X-Achse als Frequenzachse angenommen, und zwar so, daß die Frequenzen nach rechts wachsen, und läßt man den Punkt d_1 die Lage der Komponente von n_1 ohne Störung bezeichnen, so wird auch die Lage der anderen Komponenten bei dem elementaren Zeemaneffekt ohne Störung durch die Punkte $d_2, d_3 \ldots d_q$ fixiert. Die Punkte $x_1, x_2 \ldots x_q$ bezeichnen dann nach (8) die infolge der Koppelungen gestörten Lagen derselben Komponenten. Das feldlose Liniensystem liegt eine Strecke $\frac{h}{2}$ nach rechts von dem ungestörten System $d_1, d_2, d_3 \ldots$

5. Aus der obigen Erörterung und aus der Fig. 1 erhält man einen ziemlich genauen und anschaulichen Einblick in die Komponentenlagerung. Denkt man das feldlose System unverändert um eine Strecke der normalen Aufspaltung $\frac{h}{2}$ nach links verschoben, sodaß es die Lage des ungestörten Systems annimmt, so wird zwischen je zweien Linien eine gestörte Komponente liegen. Da nach (10) ν_q nicht das Glied $-\frac{1}{2}h$ enthält, so liegt die ihm entsprechende Komponente von den anderen getrennt in dem feldlosen System. Wir wollen diese die Innenkomponente nennen und sie damit in Gegensatz zu den übrigen, den Außenkomponenten bringen. Sind insbesondere zwei oder allgemein α der feldlosen Linien zusammengefallen, so werden $\alpha - 1$ Komponente sich vereinigen und in jedem Felde genau auf dem normalen Abstand von der betreffenden mehrfachen Linie liegen. Später wird bewiesen, daß diese Komponenten stets von verschwindender Intensität sind.

Im Fall mehrfacher Linien kann man, da einige Wurzeln der Gleichung (7) bekannt sind, die Gradzahl der Frequenzgleichung erniedrigen.

6. Aus dem oben Gesagten geht hervor, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, die außerhalb des feldlosen Systems liegenden Komponenten zu vereinigen; sie werden auch in den stärksten

Feldern einen Bereich überdecken, der von derselben Größenordnung ist, wie der Bereich des feldlosen Systems. Dagegen kann man in folgender Weise beweisen, daß die in dem feldlosen System bleibende Komponente in genügend starken Feldern dem Schwerpunkt des feldlosen Systems beliebig nahe kommt, sodaß ihre Vereinigung mit der entsprechenden Komponente der anderen Seite theoretisch möglich ist.

Für $N = \frac{1}{q}(n_1 + n_2 + \cdots + n_q)$ lautet die Frequenzgleichung

$$x^q + \frac{h}{2} x^{q-1} + x^{q-2} \sum d_\varkappa d_\mu + \cdots = 0.$$

Der erste Näherungswert der Wurzel x_q sei $x_q' = -\frac{h}{2}$; nach der Newtonschen Formel erhält man einen genaueren Wert

$$x_q'' = x_q' - \frac{\left(-\frac{h}{2}\right)^{q-2} \frac{2}{q} \sum d_\varkappa d_\mu + \left(-\frac{h}{2}\right)^{q-3} \left(\quad\right) \cdots}{\left(-\frac{h}{2}\right)^{q-1} + \left(-\frac{h}{2}\right)^{q-2} \left(\quad\right) \cdots}.$$

Bei starken Feldern wird, da h im Nenner in höherer Potenz als im Zähler steht,

$$\lim_{h=\infty} (x_q'' - x_q') = 0$$

oder mithin

$$\lim_{h=\infty} x_q = -\frac{h}{2}.$$

Die entsprechende Frequenz lautet somit, wie behauptet wurde:

$$\lim_{h=\infty} \nu_q = N - \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = N.$$

7. Als Beispiel wollen wir den Fall eines verallgemeinerten D-Duplets mit einer t- und einer r-fachen Konstituente eingehender behandeln. Sind n_t und $n_r (n_r > n_t)$ die Frequenzen der feldlosen Linien, die weiter unten kurz D_1, D_2 bezeichnet werden, und $d = n_r - n$ ihr Abstand, so wird nach (8) $(N = n_r)$

$$f(x) = x^r (x-d)^t$$

$$F(x) = x^{r-1} (x-d)^{t-1} \left\{ x(x-d) + \frac{h}{2q} [r(x-d) + tx] \right\} = 0.$$

Die $t-1$ bezw. $r-1$ ungestörten Komponenten, die resp. in der

normalen Entfernung von D_1 bezw. D_2 liegen, werden aus der Gleichung

$$x^{r-1}(x-d)^{t-1} = 0$$

bestimmt. Es wird nämlich $x = d$ resp. $x = 0$ und nach der Formel $\nu = N - \frac{h}{2} - x$ für die entsprechenden Frequenzen

$$\nu = n_r - \frac{h}{2} - d = n_t - \frac{h}{2} \text{ resp. } \nu = n_r - \frac{h}{2}.$$

Für die beiden übrigbleibenden gestörten Komponenten erhält man aus

$$x^2 - \left(d - \frac{h}{2}\right)x - \frac{r}{2q}hd = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(d - \frac{h}{2} \pm \sqrt{d^2 + \frac{r-t}{q}hd + \left(\frac{h}{2}\right)^2}\right),$$

$$\nu = n_r - \frac{1}{2}\left(d + \frac{h}{2} \pm \sqrt{d^2 + \frac{r-t}{q}hd + \left(\frac{h}{2}\right)^2}\right)$$

oder, wenn man die normale Aufspaltung in Bruchteilen des Abstandes d messend

$$\frac{h}{2} = ld$$

setzt und mit ν_i bzw. ν_a die Frequenz der inneren bzw. äußeren Komponente bezeichnet,

$$\nu_i = n_r - \frac{d}{2}\left(1 + l - \sqrt{1 + 2\frac{r-t}{q}l + l^2}\right),$$

$$\nu_a = n_r - \frac{d}{2}\left(1 + l + \sqrt{1 + 2\frac{r-t}{q}l + l^2}\right).$$

Aus diesen Ausdrücken kann man, was vorher abgeleitet wurde, bestätigen; insbesondere wird

$$\lim_{h=\infty} \nu_i = n_r - \frac{t}{q}d = \frac{1}{q}(rn_r + tn_t) = S,$$

$$\lim_{h=\infty} \nu_a = n_r - \frac{r}{q}d - \frac{h}{2} = R - \frac{h}{2},$$

wo $S = n_r - \frac{t}{q}d$, $R = n_r - \frac{r}{q}d$ gesetzt sind. Die innere, ge-

störte Komponente wird sich bei wachsendem Felde dem Schwerpunkt S des feldlosen Systems unbeschränkt nähern; die äußere Komponente strebt dagegen der normalen Entfernung von einer Linie R zu, die mit dem Schwerpunkt des feldlosen Systems symmetrisch gegen die geometrische Mittellinie des Duplets liegt. Den Ort derselben werden wir weiter unten den reziproken Schwerpunkt des Systems nennen, da er den Schwerpunkt des Systems mit den reziproken Gewichten $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{r}$ der Konstituenten darstellt. Ferner sieht man, was schon im voraus zu erwarten war, daß die Lage der Komponenten nicht von den Werten t und r selbst, sondern nur von ihrem Verhältnis abhängt.

Setzt man $t = 1$, so erhält man für eine Linie mit Trabant

$$\nu = n_r - \frac{d}{2}\left(1 + l \pm \sqrt{1 + 2\frac{r-1}{\nu+1} l + l^2}\right)$$

und weiter hieraus für $r = 2$

$$\nu = n_r - \frac{d}{2}\left(1 + l \pm \sqrt{1 + \frac{2}{3} l + l^2}\right),$$

deren Identifizierung mit der Voigtschen Formel für Natriumduplets in der von Sommerfeld angegebenen Form leicht einzusehen ist.

Die longitudinalen Komponenten der positiven Seite.

8. Die Differentialgleichung für die p-Komponenten der rechten Seite lautet

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\xi_\varkappa = -\frac{ih}{q}\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{q}\xi_\mu.$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich genau in derselben Weise wie das vorige behandeln, von dem man es auch durch Vertauschung von h mit $-h$ erhält. Macht man wieder den Ansatz $\xi_\varkappa = A_\varkappa e^{i\nu t}$ und setzt man

$$k_\varkappa = \frac{1}{\nu}(-\nu^2 + \nu h + n_\varkappa^2),$$

so wird

$$\sum_{\varkappa=1}^{q}\frac{1}{k_\varkappa} = \frac{h}{q},$$

wo die rechte Seite nun wegen $C = \frac{h}{q} \sum_{\mu=1}^{q} A_\mu$ positiv ist. Setzt man weiter

$$2x = \frac{1}{\nu}(-\nu^2 + \nu h + N^2),$$

$$f(x) = (x-d_1)(x-d_2)\dots(x-d_q),$$

so lautet die Frequenzgleichung

$$F(x) = f(x) - \frac{h}{2q} f'(x) = 0.$$

Ist eine Wurzel dieser Gleichung bekannt, so wird die entsprechende Frequenz mit genügender Annäherung aus

$$\nu = N + \frac{h}{2} - x$$

bestimmt.

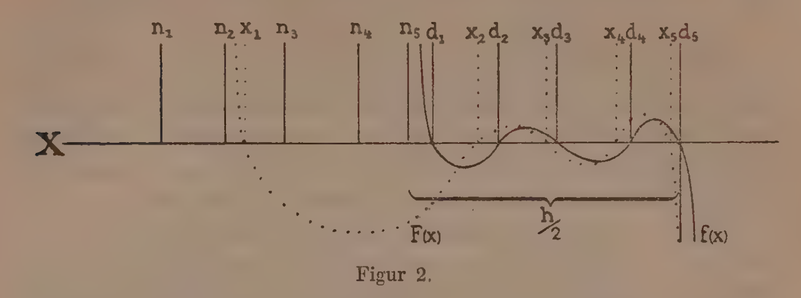
Die Frequenzgleichung besitzt wieder eine Wurzel zwischen je zwei Werten d_x. Diese Wurzeln sind aber den vorigen verschieden. Setzen wir wieder $N = n_q$, so wird

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{h}{2} + \varepsilon_1(d_1 - d_q) \\ x_2 &= d_2 + \varepsilon_2(d_1 - d_2) \\ x_3 &= d_3 + \varepsilon_3(d_2 - d_3) \\ &\dots\dots\dots \\ x_q &= d_q + \varepsilon_q(d_{q-1} - d_q). \end{aligned}$$

Die entsprechenden Frequenzen sind

$$\begin{aligned} \nu_1 &= -\varepsilon_1(n_q - n_1) \\ \nu_2 &= n_2 + \frac{h}{2} - \varepsilon_2(n_2 - n_1) \\ \nu_3 &= n_3 + \frac{h}{2} - \varepsilon_3(n_3 - n_2) \\ &\dots\dots\dots \\ \nu_q &= n_q + \frac{h}{2} - \varepsilon_q(n_q - n_{q-1}). \end{aligned}$$

Die Störung der Komponenten wird für $q = 5$ durch die beistehende Figur veranschaulicht. Die Kurve $y = F(x)$ wird diesmal von der Kurve $y = f(x)$ nach links verschoben. Läßt man den Punkt d_1 die normale Lage der Komponente von n_1 bezeichnen, so werden alle normalen Lagen durch $d_2, d_3, \dots d_q$ und



Figur 2.

die gestörten durch die Punkte $x_1, x_2 \ldots x_q$ dargestellt. Die Komponenten erhalten eine Verschiebung nach rechts, die am größten bei der Komponente von n_1 ist.

Die Lage der Komponenten der positiven Seite wird im allgemeinen derselben der Komponenten der negativen Seite ähnlich. Die Verschiebungen finden in umgekehrter Richtung, nämlich in beiden gegen das feldlose System hin statt. Die in dem feldlosen System liegenden inneren Komponenten der beiden Seiten können in genügend starken Feldern einander beliebig nahe gebracht werden. Die anderen (äußeren) Komponenten dagegen werden in beiden Seiten einen Bereich überdecken, der demjenigen des feldlosen Systems ungefähr gleich ist.

9. Für das Duplet (t, r) erhält man, indem man das Vorzeichen von h auf S. 11 ändert

$$F(x) = x^{r-1}(x-d)^{t-1}\left\{x(x-d) - \frac{h}{2q}\left[r(x-d)+tx\right]\right\} = 0.$$

Die $q-2$ normalen Komponenten werden wieder durch die Gleichung $x^{r-1}(x-d)^{t-1} = 0$ bestimmt; für die beiden gestörten Komponenten erhält man

$$x = \frac{d}{2}\left(1 + l \pm \sqrt{1 - 2\frac{r-t}{q}l + l^2}\right),$$

$$\nu = n - \frac{d}{2}\left(1 - l \pm \sqrt{1 - 2\frac{r-t}{q}l + l^2}\right),$$

wo wieder $\frac{h}{2} = ld$ gesetzt ist. Hieraus findet man

$$\lim_{h=\infty} \nu_i = n_r - \frac{t}{q}d = S,$$

$$\lim_{h=\infty} \nu_\alpha = n_r - \frac{r}{q}d + \frac{h}{2} = R + \frac{h}{2},$$

wo S und R wieder den Ort des wahren und des reziproken Schwerpunktes des feldlosen Systems bezeichnen. Die innere Komponente kommt also bei wachsendem Felde dem Schwerpunkt S beliebig nahe, so daß sie schließlich mit der entsprechenden Komponente der negativen Seite in einer einzigen zusammenfließt. Die äußere Komponente gelangt dagegen in der positiven Richtung auf die normale Entfernung gegen den reziproken Schwerpunkt R.

Um die Lage der gestörten p-Komponenten des Duplets sowohl der negativen als der positiven Seite in starken Feldern festzustellen, entwickeln wir die Frequenzen nach den fallenden Potenzen von der Feldstärke; es wird

$$\nu_i = S \mp \frac{rt}{q^2} \frac{d^2}{\frac{h}{2}} = S \mp a,$$

$$\nu_a = R \pm \frac{h}{2} \pm \frac{rt}{q^2} \cdot \frac{d^2}{\frac{h}{2}} = R \pm \frac{h}{2} \pm a,$$

wo das obere (untere) Zeichen für die positive (negative) Seite gilt; mit a ist die Größe

$$a = \frac{rt}{q^2} \cdot \frac{d^2}{\frac{h}{2}}$$

bezeichnet.

Der Schwerpunkt S ist somit Symmetriezentrum für die inneren Komponenten, der reziproke Schwerpunkt R für die äußeren. Die Entfernung a der inneren Komponenten von S hängt außer von dem Abstand der feldlosen Linien von einander noch von dem Verhältnis $r:t$ ab und zwar in der Weise, daß das Zusammenfließen der Komponenten um so schneller stattfindet, je mehr die Stärke der beiden ursprünglichen Konstituenten relativ ungleich ist, also am schnellsten bei einer starken Linie mit Trabant. Wird weiter mit R_1 bezw. R_{-1} der Ort der Linie bezeichnet, die mit normaler Entfernung in positiver bezw. negativer Richtung von R liegt, also $R_1 = R + \frac{h}{2}$, $R_{-1} = R - \frac{h}{2}$, so kann man auch schreiben

$$\nu_a = R_{\pm 1} \pm a;$$

die äußeren Komponenten verhalten sich somit gegen den Bereich zwischen R_1 und R_{-1} (der Bereich als eine Linie betrachtet), genau in derselben Weise wie die inneren Komponenten gegen S.

Die transversalen Komponenten der negativen Seite.

10. Die Differentialgleichung für die s-Komponenten der negativen Seite lautet

$$(12)\quad \left(\frac{d^2}{dt^2}+ih\frac{d}{dt}+n_\varkappa^2\right)\zeta_\varkappa = -\frac{ih}{q}\frac{d}{dt}\left(\zeta_\varkappa + k\zeta_{\varkappa+1}+\cdots+k^{q-1}\zeta_{\varkappa+q-1}\right),$$

wo $k = e^{\frac{2\pi i}{q}}$ die q-te Einheitswurzel bezeichnet; $\varkappa$ läuft wieder von 1 bis q. Trotz des komplizierteren Baues des Gleichungssystems kann man es ebenso leicht wie dasselbe der p-Komponenten auflösen. Der Hauptunterschied zwischen den beiden Systemen liegt darin, daß die rechte Seite hier nicht mehr von $\varkappa$ unabhängig ist, sondern mit dem konstanten Faktor $\frac{1}{k}$ multipliziert wird, wenn $\varkappa$ um eine Einheit wächst. Bezeichnet man nämlich mit $C_\varkappa$ den Wert, den die rechte Seite von (12) für $\varkappa = \varkappa$ annimmt, also

$$C_1 = -\frac{ih}{q}\frac{d}{dt}(\zeta_1 + k\zeta_2+\cdots+k^{q-1}\zeta_q),$$

$$C_2 = -\frac{ih}{q}\frac{d}{dt}(\zeta_2 + k\zeta_3+\cdots+k^{q-1}\zeta_1),$$

$$C_3 = -\frac{ih}{q}\frac{d}{dt}(\zeta_3 + k\zeta_4+\cdots+k^{q-1}\zeta_2),$$

so sieht man sofort, daß

$$C_1 = kC_2$$
$$C_2 = kC_3$$

und allgemein

$$C_{\varkappa-1} = kC_\varkappa$$

oder

$$C_\varkappa = k^{-(\varkappa-1)}C_1$$

ist. Die Gleichung (12) lautet somit

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+ih\frac{d}{dt}+n_\varkappa^2\right)\zeta_\varkappa = k^{-(\varkappa-1)}C,$$

wo $C = C_1$ die oben bezeichnete Größe bedeutet.

Führt man nun statt $\zeta_\varkappa$ eine neue Unbekannte $z_\varkappa$ durch die Gleichung

$$k^{\varkappa-1}\zeta_\varkappa = z_\varkappa$$

ein, so wird offenbar

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)z_\varkappa = C,$$

wo C nun die Form

$$C = -\frac{ih}{q}\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{q} z_\mu$$

hat. Diese Gleichung könnte man auch sofort durch Multiplizieren der beiden Seiten in (12) mit $k^{\varkappa-1}$ und durch Einführung der neuen Variabel $z_\varkappa$ erhalten.

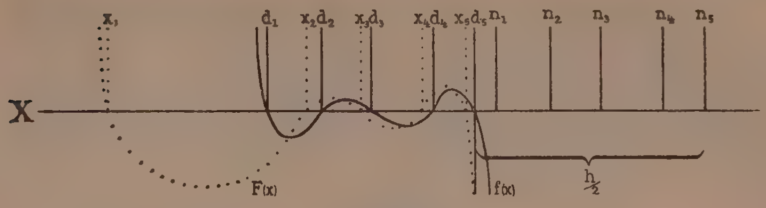
Die Differentialgleichung in $z_\varkappa$ geht in die Gleichung für die p-Komponenten der positiven Seite über, wenn man das Vorzeichen von h auf der linken Seite ändert. Die Frequenzen von $z_\varkappa$ d. h. von $\zeta_\varkappa$, da die beiden Variabeln dieselben Frequenzen besitzen, werden sonach nach dem Vorigen aus den Formeln

$$d_\varkappa = N - n_\varkappa,$$
$$f(x) = (x-d_1)(x-d_2)\ldots(x-d_q),$$
$$F(x) = f(x) - \frac{h}{2q}f'(x) = 0,$$
$$\nu = N - \frac{h}{2} - x$$

bestimmt.

11. Die Diskussion der Frequenzformeln ist überflüssig, da sie mit derjenigen für die longitudinalen Komponenten der positiven Seite völlig übereinstimmen, wenn man nur in der letzten Formel das Zeichen des Gliedes $\frac{h}{2}$ verändert. Das System der in der negativen Seite liegenden transversalen Komponenten einer Konstituente erhält man also aus demjenigen der longitudinalen Komponenten in der positiven Seite durch bloße Verschiebung des Systems um eine Strecke gleich der doppelten normalen Aufspaltung nach die negative Seite hin. Dabei vertauschen die vorher als Innen- und Außenkomponenten bezeichneten ihren Charakter. Aus den $q-1$ Außenkomponenten werden ebensoviel Komponenten im Bereiche der normalen Aufspaltung, aus der einen Innenkomponente wird eine solche im Bereiche doppelter Aufspaltung.

Die graphische Darstellung der Komponentenlagerung für $q = 5$ erhält man aus der Figur 2 (S. 379), wenn man nur das feldlose System zu rechts bezeichnet.



Figur 3.

Die transversalen Komponenten der positiven Seite.

12. Die Differentialgleichung lautet hier

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)\zeta_\varkappa = \frac{ih}{q}\frac{d}{dt}\left(\zeta_\varkappa + k^{q-1}\zeta_{\varkappa+1} + k^{q-2}\zeta_{\varkappa+2} + \cdots + k\zeta_{\varkappa+q-1}\right).$$

Multipliziert man die beiden Seiten mit $k^{q-\varkappa+1}$ und setzt

$$k^{q-\varkappa+1}\zeta_\varkappa = z_\varkappa,$$

so wird offenbar

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - ih\frac{d}{dt} + n_\varkappa^2\right)z_\varkappa = \frac{ih}{q}\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{q} z_\mu.$$

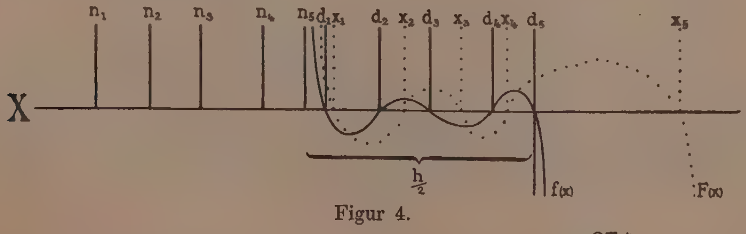
Die Frequenzgleichung wird somit auf die Formeln

$$d_\varkappa = N - n_\varkappa,$$
$$f(x) = (x-d_1)(x-d_2)\ldots(x-d_q),$$
$$F(x) = f(x) + \frac{h}{2q}f'(x) = 0,$$
$$\nu = N + \frac{h}{2} - x$$

zurückgeführt.

Das Komponentensystem wird aus dem System der p-Komponenten der negativen Seite durch eine Verschiebung von doppelter normaler Aufspaltung nach der positiven Seite erhalten. Dabei tauschen Innen- und Außenkomponenten in der oben besprochenen Weise ihre Rollen.

Die Komponentenlagerung für $q = 5$ wird durch die beigefügte Figur veranschaulicht.



Figur 4.

13. Als Beispiel wollen wir die s-Komponenten für das Duplet (t, r) bestimmen. Am einfachsten könnte man die Ausdrücke für die Frequenzen aus denselben für die p-Komponenten durch Hinzufügung des Gliedes h oder $-h$ gewinnen. Führt man aber die Rechnung wieder von Anfang an, so hat man für die negative Seite

$$f(x) = x^r (x-d)^t$$

$$F(x) = x^{r-1}(x-d)^{t-1}\left\{x(x-d) - \frac{h}{2q}\left[r(x-d)+tx\right]\right\} = 0.$$

Die $q-2$ normalen Komponenten werden durch die Gleichung

$$x^{r-1}(x-d)^{t-1} = 0$$

bestimmt; für die gestörten Komponenten erhält man aus

$$x^2 - \left(d+\frac{h}{2}\right)x + \frac{r}{2q}hd = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(d+\frac{h}{2} \pm \sqrt{d^2 - \frac{r-t}{q}hd + \left(\frac{h}{2}\right)^2}\right),$$

und für die Frequenzen nach der Formel $\nu = n_r - \frac{h}{2} - x$

$$\nu = n_r - \frac{1}{2}\left(d + 3\frac{h}{2} \pm \sqrt{d^2 - \frac{r-t}{q}hd + \left(\frac{h}{2}\right)^2}\right)$$

oder wenn man $\frac{h}{2} = ld$ setzt,

$$\nu = n_r - \frac{d}{2}\left(1 + 3l \pm \sqrt{1 - 2\frac{r-t}{q}l + l^2}\right).$$

Für $t=1$, $r=2$ erhält man hieraus wieder die Voigtsche Formel für Natriumduplets

$$\nu = n_r - \frac{d}{2}\left(1 + 3l \pm \sqrt{1 - \frac{2}{3}l + l^2}\right).$$

Für die Komponenten der positiven Seite ergeben sich die Frequenzen aus den obigen durch Vertauschung von h mit $-h$.

Die Lage der gestörten s-Komponenten des Duplets in starken Feldern ist leicht festzustellen, da die Komponenten durch bloße Verschiebungen aus den p-Komponenten gewonnen werden können. Durch Hinzufügung des Gliedes h resp. $-h$ zu den Entwickelungen für die p-Komponenten auf S. 380 erhält man

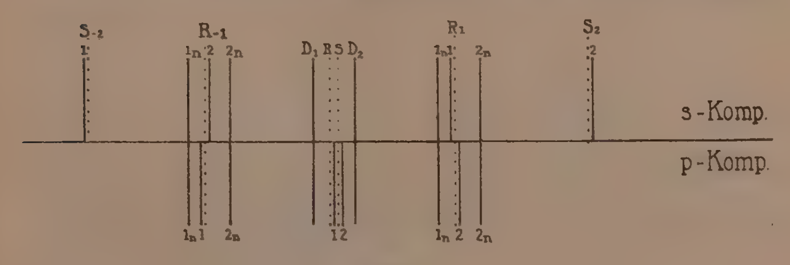
$$\nu_i = R \pm \frac{h}{2} \mp a, \qquad \nu_a = S \pm 2 \cdot \frac{h}{2} \pm a,$$

oder wenn man weiter mit S_2 bezw. S_{-2} die Frequenz der Linie bezeichnet, die um doppelte normale Entfernung von dem Schwerpunkt S in positiver bezw. negativer Richtung liegt und $R_{\pm 1}$ statt $R \pm \frac{h}{2}$ setzt,

$$\nu_i = R_{\pm 1} \mp a, \qquad \nu_a = S_{\pm 2} \pm a.$$

Das obere (untere) Zeichen gilt hierbei wieder für die positive (negative) Seite. Aus diesen Formeln geht hervor, daß die Lage der äußeren Komponenten gegen den Bereich zwischen S_2 und S_{-2} genau dieselbe ist wie die der äußeren p-Komponenten gegen den Bereich R_1, R_{-1}. Die inneren s-Komponenten liegen je nahe bei R_1 resp. R_{-1} und sind ein Spiegelbild von der naheliegenden p-Komponente in Bezug auf die respektive Linie R_1, R_{-1}. Die Linien R_1 und R_{-1} sowie auch S sind somit Mittellinien von kleinen einander ähnlichen Duplets, deren Konstituenten mit der Entfernung a von der betreffenden Mittellinie liegen; bei S sind die beiden Konstituenten longitudinal, bei R_1 und R_{-1} sind die äußeren (die ferner von dem feldlosen System liegen) longitudinal, die inneren transversal.

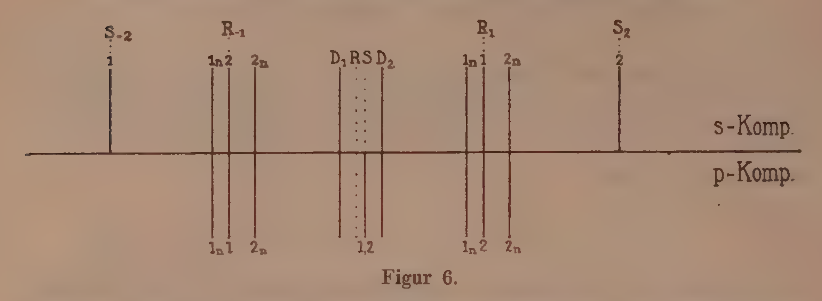
In der nebenstehenden Figur ist die Lage sämtlicher Kompo-



Figur 5.

nenten eines Duplets in starkem Felde veranschaulicht. Die Komponenten sind mit vertikalen Strecken wiedergegeben, die für die s-Komponenten nach oben, für die p-Komponenten nach unten gerichtet sind. Eine beigesetzte 1 bezw. 2 deutet die Abstammung der bezüglichen Komponente von der feldlosen Linie D_1 bzw. D_2 an; die ev. normalen Komponenten sind mit $1n$ resp. $2n$ bezeichnet.

Als Grenzfall in unendlich starken Feldern erhält man



Figur 6.

Für $t = 1$ resp. $r = 1$ fallen die entsprechenden normalen Komponenten weg; ebenso wird die Intensität einiger Komponenten verschwindend klein, wie weiter unten bewiesen wird. Der Abstand zwischen der gestörten inneren *s*-Komponente und den naheliegenden normalen *s*-Komponenten beträgt $\frac{t}{q}d$ resp. $\frac{r}{q}d$. Z. B. für Natriumduplets ($t = 1$, $r = 2$), wo die normalen Komponenten von D_1 wegfallen, ist der betreffende Abstand gleich $\frac{2}{3}d$, wie schon von Prof. Voigt hervorgehoben ist.

14. Vollständigkeit wegen entwickeln wir noch die Frequenzen für das behandelte Duplet bei relativ schwachen Feldern; es wird, indem man die Komponenten derselben Konstituente zusammenführt: für die *p*-Komponenten

$$\begin{cases} D_1: \quad \nu = n_t \pm \frac{r}{q}\cdot\frac{h}{2} - a, \\ D_2: \quad \nu = n_r \pm \frac{t}{q}\cdot\frac{h}{2} + a \end{cases}$$

und für die *s*-Komponenten

$$\begin{cases} D_1: \quad \nu = n_t \pm \left(1 + \frac{t}{q}\right)\frac{h}{2} - a, \\ D_2: \quad \nu = n_r \pm \left(1 + \frac{r}{q}\right)\frac{h}{2} + a, \end{cases}$$

wo a nun die Größe $\frac{rt}{q^2 d}\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^2$ bezeichnet. In genügend schwachen Feldern ist somit $\frac{1}{q}\cdot\frac{h}{2}$ der aliquote Teil der normalen Aufspaltung, von dem nach der Rungeschen Regel die Aufspaltungen

ganzzahlige Vielfachen sein sollten; von ihm treten hier die Vielfachen

$$\begin{cases} D_1: & \pm \frac{r}{q}(p) \pm \frac{q}{q}(p, s) \pm \left(1+\frac{t}{q}\right)(s), \\ D_2: & \pm \frac{t}{q}(p) \pm \frac{q}{q}(p, s) \pm \left(1+\frac{r}{q}\right)(s) \end{cases}$$

auf, indem man auch die ev. normalen Komponenten berücksichtigt. Bei Na-Duplet wird es

$$\begin{cases} D_1: & & \pm \frac{2}{3}(p) & & \pm \frac{4}{3}(s), \\ D_2: & \pm \frac{1}{3}(p) & & \pm \frac{3}{3}(p, s) & & \pm \frac{5}{3}(s), \end{cases}$$

das mit dem bekannten Voigtschen Schema durchaus übereinstimmt, da die normalen p-Komponenten von verschwindender Intensität sind.

Die Berechnung der Intensitäten.

1. Die Intensität irgendeiner Strahlung wird bekanntlich dem Quadrat der Amplitude proportional gesetzt gemäß der Formel

$$I = c\,|\Sigma \xi_\varkappa|^2 = c\,|\Sigma A_\varkappa|^2 = c\,|A_1 + A_2 + \cdots + A_q|^2,$$

die die Größen A_1, A_2, ... als bekannt voraussetzt. Nun sind aber nicht diese Größen selbst, nur ihre Verhältnisse nach den vorigen Entwickelungen bekannt. Um eine weitere Beziehung zwischen ihnen zu erhalten, nimmt Sommerfeld bei dem D-Duplet an, daß die Energie jeder Komponente die gleiche ist. Aus derselben Annahme folgt hier

$$\Sigma |A_\varkappa|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + \cdots + |A_q|^2 = \text{const.}$$

Setzt man dies in die vorige Formel ein, so erhält man, indem man durch passende Wahl der Einheiten einen konstanten Faktor unterdrückt, für die relativen Intensitäten den Ausdruck

$$I = \frac{|\Sigma A_\varkappa|^2}{\Sigma |A_\varkappa|^2}, \tag{1}$$

welcher nur von den bekannten Verhältnissen $A_1 : A_2 : A_3 : \ldots : A_q$ abhängt. Um den Wert I für die einzelnen Komponenten der magnetischen Zerlegung zu erhalten, hat man in dieser Formel die bez. Werte dieser Verhältnisse einzusetzen.

Die Intensitäten der p-Komponenten.

2. Für die longitudinalen Komponenten ist die Intensitätformel leicht aufzustellen. Wir haben hier

$$A_\varkappa = \frac{C}{k_\varkappa},$$

wo für die negative Seite

$$C = -\frac{h}{q}\Sigma A_\varkappa,$$

$$k_\varkappa = \frac{1}{\nu}(-\nu^2 - \nu h + n_\varkappa^2)$$

und für die positive

$$C = \frac{h}{q}\Sigma A_\varkappa,$$

$$k_\varkappa = \frac{1}{\nu}(-\nu^2 + \nu h + n_\varkappa^2)$$

bedeuten. Setzt man den Wert $\Sigma A_\varkappa = \mp \frac{q}{h} C$ und die Werte $A_\varkappa$ in (1) ein, so erhält man

$$I = \frac{q^2}{h^2 \sum \left|\frac{1}{k_\varkappa}\right|^2} = \frac{q^2}{h^2\left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} + \cdots + \frac{1}{k_q^2}\right)}, \tag{2}$$

die sowohl für die positive wie für die negative Seite gilt.

Zur Berechnung der Intensität irgendeiner Komponente mit der Frequenz $\nu = \nu_\mu$ muß man somit alle Werte $k_\varkappa$ für $\nu = \nu_\mu$ berechnen und diese in Formel (2) einsetzen.

3. Aus der Formel (2) sieht man sofort, daß die Intensität der Außenkomponenten klein ist und bei wachsendem Felde abnehmen wird. Denn die Störung der normalen Lage dieser Komponenten ist im allgemeinen klein, sodaß eine der Größen $k_\varkappa$ nahe gleich Null ist, wodurch die Intensität nach der gegebenen Formel einen kleinen Wert annimmt. Für die normalen Kompo-

nenten ist in jedem Felde $k_\varkappa$ streng gleich Null, sodaß die entsprechende Intensität in jedem Felde vollständig verschwindet.

4. Für die praktischen Rechnungen ist die Formel (2) im allgemeinen ganz unzweckmäßig; man kann sie aber in folgender Weise in kurze, geschlossene Form bringen, die sich für die numerischen Rechnungen besonders eignet. Es ist identisch

$$\left(\frac{1}{k_\varkappa}\right)' = -\frac{k'_\varkappa}{k_\varkappa^2},$$

wo wie auch immer weiter unten das Derivationzeichen eine Derivation nach der doppelten normalen Aufspaltung h bezeichnet. Setzt man hier aus $k_\varkappa = 2(x-d_\varkappa)$

$$k'_\varkappa = 2x'$$

ein, so wird

$$\left(\frac{1}{k_\varkappa}\right)' = -\frac{2x'}{k_\varkappa^2}$$

oder

$$\frac{1}{k_\varkappa^2} = -\frac{1}{2x'}\left(\frac{1}{k_\varkappa}\right)'$$

für jedes $\varkappa = 1, 2 \ldots q$. Hieraus findet man

$$\Sigma\frac{1}{k_\varkappa^2} = -\frac{1}{2x'}\Sigma\left(\frac{1}{k_\varkappa}\right)' = -\frac{1}{2x'}\left(\Sigma\frac{1}{k_\varkappa}\right)'.$$

Nach der Fundamentalgleichung für die negative Seite ist aber (Gl. (5), S. 370)

$$\left(\sum_{\varkappa=1}^{q}\frac{1}{k_\varkappa}\right) = -\frac{q}{h},$$

woraus

(3) $$\left(\sum_{\varkappa=1}^{q}\frac{1}{k_\varkappa}\right)' = \frac{q}{h^2}$$

folgt, sodaß es wird

(4) $$\sum_{\varkappa=1}^{q}\frac{1}{k_\varkappa^2} = -\frac{1}{2x'}\cdot\frac{q}{h^2}.$$

Durch Einsetzen dieses in (2) erhält man für die negative Seite

(5) $$I = -2qx'.$$

Aus dieser einfachen Formel kann man leicht die Intensität bestimmen, wenn x als Funktion von h bekannt ist. — Die Formel könnte man auch mit erlaubter Annäherung in die anschaulichere Form

$$I = q(1+2\nu') \tag{6}$$

bringen, die durch Derivieren aus der Näherungsformel

$$\nu = N - \frac{h}{2} - x$$

folgt.

Aus der Formel (6), wo die Ableitung ν' negativ ist, bemerkt man die eigentümliche Tatsache, daß je stärker das Feld auf die Aufspaltung einer Komponente einwirkt, je geringer wird die Intensität der betreffenden Komponente. Weiter findet man aus der Formel, ebenso wie aus (5), daß die Intensität der normalen Komponenten in jedem Felde verschwindet. Für eine solche Komponente ist nämlich $x = d_\varkappa$, also $x' = 0$ und folglich $I = 0$. Für die Außenkomponenten ist $\lim\limits_{h=\infty} x = d_\varkappa$, $\lim\limits_{h=\infty} x' = 0$ und somit $\lim\limits_{h=\infty} I = 0$. Für die innere Komponente ist dagegen $\lim\limits_{h=\infty} x = -\frac{h}{2}$, $\lim\limits_{h=\infty} x = -\frac{1}{2}$ und $\lim\limits_{n=\infty} I = q$. Da dieselbe Betrachtung auch für die positive Seite gilt, erhält man folgendes Resultat:

Bei der wachsenden Feldstärke nehmen die Intensitäten der longitudinalen Außenkomponenten unbeschränkt ab, sodaß sie in genügend starken Feldern verschwinden. Die Intensität der beiden Innenkomponenten nimmt dagegen zu. Die $\alpha - 1$ normalen Komponenten einer α-fachen feldlosen Linie verschwinden in jedem Felde.

Wenn x als Funktion von h nicht bekannt ist, sondern nur numerische Werte oder Näherungswerte von x für einen bestimmten Wert h vorliegen, so muß zuerst die betreffende Derivierte aus Gleichung

$$f(x) + \frac{h}{2q} f'(x) = 0$$

bestimmt werden; es wird

$$x' = -\frac{1}{2q}\,\frac{1}{1-\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}}\cdot$$

oder wenn man hier

$$f'(x) = -\frac{2q}{h}f(x)$$

einsetzt

$$x' = -\frac{1}{2q}\,\frac{1}{1+\frac{h}{2q}\,\frac{f''(x)}{f'(x)}} = -\frac{1}{2q}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{h}{2q}\right)^2\frac{f''(x)}{f(x)}}.$$

Die Formel (5) lautet sonach

$$(7)\qquad I = \frac{1}{1+\frac{h}{2q}\,\frac{f''(x)}{f'(x)}} = \frac{1}{1-\left(\frac{h}{2q}\right)^2\frac{f''(x)}{f(x)}}.$$

Aus dieser Formel, in der wieder die für die ganze Untersuchung wichtige Hilfsfunktion $f(x)$ eingeht, erhält man direkt durch Einsetzung des bekannten Wertes von x die Intensität der betreffenden Komponente.

Die entsprechenden Formeln für die positive Seite lauten

$$(5')\qquad I = 2qx',$$

$$(6')\qquad I = q(1-2\nu')$$

$$(7')\qquad I = \frac{1}{1-\frac{h}{2q}\,\frac{f''(x)}{f'(x)}} = \frac{1}{1-\left(\frac{h}{2q}\right)^2\frac{f''(x)}{f(x)}},$$

und gehen durch Vorzeichenänderung von h aus den Formeln der negativen Seite hervor.

5. Wir werden die Intensitätberechnungen für das schon vorher zum Beispiel gewählte Duplet mit den t- und r-fachen Konstituenten ausführen. Dabei kann man sofort die q-2 Komponenten, die auf der normalen Aufspaltung von den feldlosen Linien liegen und von verschwindender Intensität sind, ausschließen.

Für die gestörten Komponenten der negativen Seite hatten wir auf S. 376

$$x = \frac{1}{2}\left(d-\frac{h}{2}\pm\sqrt{d^2+\frac{r-t}{q}hd+\left(\frac{h}{2}\right)^2}\right),$$

woraus durch Differentation

$$x' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} \mp \frac{\frac{r-t}{q}d + \frac{h}{2}}{2\sqrt{d^2 + \frac{r-t}{q}hd + \left(\frac{h}{2}\right)^2}}\right);$$

nach Formel (5) wird also

$$I = \frac{q}{2}\left(1 \mp \frac{\frac{r-t}{q}d + \frac{h}{2}}{2\sqrt{d^2 + \frac{r-t}{q}hd + \left(\frac{h}{2}\right)^2}}\right)$$

oder wenn man die beiden Komponenten trennend mit I_i bezw. I_a die Intensität der inneren bezw. äußeren Komponente bezeichnet und ferner $\frac{h}{2} = ld$ setzt

$$\left.\begin{matrix} I_i \\ I_a \end{matrix}\right\} = \frac{q}{2}\left|1 \pm \frac{\frac{r-t}{q} + l}{\sqrt{1 + 2\frac{r-t}{q}l + l^2}}\right|.$$ [1]

Die Formeln für die positive Seite erhält man hieraus, wenn man $-l$ statt $+l$ setzt; dabei werden die beiden Intensitäten miteinander vertauscht.

Die Summe der Intensitäten der beiden Komponenten sowohl in negativer wie in positiver Seite ist konstant gleich q, was auch stimmt, da die Gesamtintensität gleich q ist und die Intensität der anderen Komponenten hier verschwindet. Für verschwindende Feldstärke findet man

$$I_i = \frac{q}{2}\left[1 + \frac{r-t}{q}\right] = r; \quad I_a = \frac{q}{2}\left[1 - \frac{r-t}{q}\right] = t,$$

d. h. man erhält das feldlose System wieder und zwar wird aus der inneren die positive, aus der äußeren die negative Linie in dem feldlosen System. Aus der ersten Ableitung bemerkt man, daß die Intensität I_i bei der wachsenden Feldstärke kontinuierlich zunimmt und zwar so, daß $\lim_{h=\infty} I = q$ wird; die Intensität I_a als

---

1) In der strengen Formel, die man durch umständlichere algebraische Rechnungen aus (2) gewinnt, steht nur statt $l = \frac{h}{2} : d$ das Verhältnis $l = \frac{h}{2} : \frac{n_r^2 - n_t^2}{2v}$. Die obige Formel geht also mit der erlaubten Annäherung $n_r^2 - n_t^2 = 2vd$ aus der strengen Formel hervor.

„komplementär“ zur I, nimmt dagegen entsprechend ab und wird in unendlich starken Feldern verschwinden. Ähnliches Verhalten bemerkt man bei den Intensitäten der positiven Seite.

Für eine Linie mit Trabant ($t = 1$) erhält man

$$I = \frac{r+1}{2}\left\{1 \pm \frac{\frac{r-1}{r+1} + l}{\sqrt{1 + 2\,\frac{r-1}{r+1}\,l + l^2}}\right\};$$

besonders für $r = 2$ erhält man hieraus die Voigtsche Formel für Natrium-Duplets in der von Sommerfeld angegebenen Form

$$I = \frac{3}{2}\left\{1 \pm \frac{\frac{1}{3} + l}{\sqrt{1 + \frac{2}{3}\,l + l^2}}\right\}.$$

Die Intensitäten der s-Komponenten.

6. Für die transversalen Komponenten wird die Intensitätberechnung wegen des Hineintretens des Exponentialfaktors k beträchtlich umständlicher und unanschaulicher als für die longitudinalen Komponenten. Die Grundformel ist wieder

(5) $$I = \frac{|\Sigma \xi_x|^2}{\Sigma |\xi_x|^2} = \frac{|\Sigma A_x|^2}{\Sigma |A_x|^2}.$$

Die Größen A_x werden aber nun nach S. 381 aus der Formel

$$A_x = \frac{A'_x}{k^{x-1}} = \frac{C k^{q-x+1}}{k_x}$$

für die negative und nach S. 383 aus

$$A_x = A'_x k^{x-1} = \frac{C k^{x-1}}{k_x}$$

für die positive Seite bestimmt. Es wird also für die negative Seite

(6) $$I = \frac{\left|\Sigma \frac{k^{q-x+1}}{k_x}\right|^2}{\Sigma \left|\frac{k^{q-x+1}}{k_x}\right|^2} = \frac{\left|\Sigma \frac{k^{q-x+1}}{k_x}\right|^2}{\Sigma \left|\frac{1}{k_x}\right|^2} = \frac{\left|\frac{1}{k_1} + \frac{k^{q-1}}{k_2} + \frac{k^{q-2}}{k_3} + \cdots + \frac{k}{k_q}\right|^2}{\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} + \cdots + \frac{1}{k_q^2}}.$$

für die positive Seite

$$(10)\quad I = \frac{\left|\sum \frac{k^{\varkappa-1}}{k_\varkappa}\right|^2}{\sum\left|\frac{k^{\varkappa-1}}{k_\varkappa}\right|^2} = \frac{\left|\sum \frac{k^{\varkappa-1}}{k_\varkappa}\right|^2}{\sum\left|\frac{1}{k_\varkappa}\right|^2} = \frac{\left|\frac{1}{k_1}+\frac{k}{k_2}+\frac{k^2}{k_3}+\cdots+\frac{k^{q-1}}{k_q}\right|^2}{\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}+\cdots+\frac{1}{k_q^2}}.$$

Die Formel für die positive Seite erhält man aus derselben für die negative Seite, indem man $\frac{1}{k}$ statt k setzt.

Für den Nenner $\sum\limits_{\varkappa=1}^{q}\frac{1}{k_\varkappa^2}$ findet man in derselben Weise wie auf S. 388

$$\sum_{\varkappa=1}^{q}\frac{1}{k_\varkappa^2} = \pm\frac{q}{h^2}\cdot\frac{1}{2x'},$$

wo das obere Zeichen für die negative, das untere für die positive Seite gilt und weiter

$$x' = \pm\frac{1}{2q}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{h}{2q}\right)^2\frac{f''(x)}{f(x)}}.$$

Die Formeln (9) und (10) kann man somit auch wie folgt schreiben

$$I = \left|\sum\frac{k^{q-\varkappa+1}}{k_\varkappa}\right|^2\frac{2h^2}{q}x' = \left|\sum\frac{k^{q-\varkappa+1}}{k_\varkappa}\right|^2\cdot\left(\frac{h}{q}\right)^2\frac{1}{1-\left(\frac{h}{2q}\right)^2\frac{f''(x)}{f(x)}},$$

$$I = \left|\sum\frac{k^{\varkappa-1}}{k_\varkappa}\right|^2\frac{2h^2}{q}x' = \left|\sum\frac{k^{\varkappa-1}}{k_\varkappa}\right|^2\cdot\left(\frac{h}{q}\right)^2\frac{1}{1-\left(\frac{h}{2q}\right)^2\frac{f''(x)}{f(x)}}.$$

7. Wir verzichten auf nähere Untersuchung dieser Formeln in der allgemeinen Form und beschränken uns auf die Betrachtung der Komponente mit doppelter Aufspaltung. Es war

$$k_\varkappa = 2(x-d_\varkappa) = 2[x-(n_q-n_\varkappa)]$$

und für die Komponente doppelter Aufspaltung in der negativen Seite

$$x = -\frac{h}{2}+\varepsilon(n_q-n_1).$$

Für diese Komponente wird mithin

$$k_\varkappa = -h+2\varepsilon(n_q-n_1)-2(n_q-n_\varkappa) = -h\pm 2\eta_\varkappa(n_q-n_1) \quad 0\leqq\eta_\varkappa\leqq 1$$

oder

$$k_\varkappa = -h(1 + \varepsilon'_\varkappa),$$

wo

$$|\varepsilon'_\varkappa| = \frac{2\eta_\varkappa(n_q - n_1)}{h} \leqq \frac{n_q - n_1}{\frac{h}{2}}$$

ist. Bei starken Feldern $\left(\frac{h}{2} > (n_q - n_1)\right)$ kann man somit setzen

$$\frac{1}{k_\varkappa} = -\frac{1}{h}(1 - \lambda\,\varepsilon_\varkappa),$$

wo

$$\lambda = \frac{1}{1 - \frac{n_q - n_1}{\frac{h}{2}}}, \qquad |\varepsilon_\varkappa| < |\varepsilon'_\varkappa| \leqq \frac{n_q - n_1}{\frac{h}{2}}$$

ist. Setzt man dies in die Intensitätsformel ein, so wird

$$I = \frac{\frac{1}{h^2}\,|\,k^q + k^{q-1} + \cdots + k - \lambda\,\Sigma k^{q-\varkappa+1}\,\varepsilon_\varkappa\,|^2}{\frac{1}{h^2}\,\Sigma\,|\,1 - \lambda\,\varepsilon_\varkappa\,|^2}$$

oder, da $k^q + k^{q-1} + \cdots + k = 0$ ist,

$$I = \frac{\lambda^2\,|\,\Sigma k^{q-\varkappa+1}\,\varepsilon_\varkappa\,|^2}{\Sigma\,|1 - \lambda\,\varepsilon_\varkappa|^2},$$

woraus, da $\varepsilon_\varkappa$ bei wachsendem Felde beliebig klein wird und λ nach der Einheit konvergiert,

$$\lim_{h=\infty} I = 0.$$

Dieselbe Betrachtung gilt ebenso für die positive Seite. Wir haben also:

Die Intensität der Komponente doppelter Aufspaltung sowohl der negativen wie positiven Seite wird bei wachsendem Felde verschwinden.

8. Für die normalen Komponenten einer außerhalb des Feldes α-fachen Linie

$$(n_{r+1} = n_{r+2} = \cdots = n_{r+\alpha},\; k_{r+1} = k_{r+2} = \cdots = k_{r+\alpha} = 0)$$

gilt die Formel (2) nicht mehr, da die Werte $A'_\varkappa = \frac{C}{k_\varkappa}$, wo C gleich Null sein muß, für $\varkappa = r+1,\, r+2, \cdots, r+\alpha$ unbestimmt

werden. Zur Bestimmung dieser Amplituden bleibt nur die Gleichung

$$C = \mp \frac{h}{2q}(A_1 + A_2 + \cdots + A_q) = 0$$

oder, da die anderen Amplituden verschwinden, die Gleichung

$$A_{r+1} + A_{r+2} + \cdots + A_{r+\alpha} = 0$$

übrig, so daß es nötig wird, neue Beziehungen zwischen ihnen aufzustellen. Ohne darauf einzugehen, bemerken wir nur, daß für $\alpha = 2$

$$A_{r+1} = -A_{r+2}$$

folgt und somit für die Intensität

$$I = \frac{|A_{r+1}|^2 |k^{q-r} - k^{q-r-1}|^2}{2|A_{r+1}|^2} = \frac{1}{2}|1-k|^2 = 2\sin^2\frac{\pi}{q}.$$

Die Intensität einer einfachen normalen Komponente ist sonach konstant und beruht nur auf der Zahl der Elektronen und zwar nimmt sie merkwürdigerweise mit wachsendender Elektronenzahl ab. Für $q = 3$ erhält man in Übereinstimmung mit der Voigtschen Berechnung für die normale Komponente des Natriumduplets

$$I = 2\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}.$$

9. Als Beispiel wollen wir die Intensität der beiden gestörten transversalen Komponenten des Duplets mit einer t- und einer r-fachen Konstituente berechnen.

Setzt man

$$k_t = \frac{1}{\nu}(-\nu^2 - \nu h + n_t^2),$$

$$k_r = \frac{1}{\nu}(-\nu^2 - \nu h + n_r^2),$$

so wird für die linke Seite nach der Grundformel (9)

$$I = \frac{\left|\frac{k^q + k^{q-1} + \cdots + k^{q-t+1}}{k_t} + \frac{k^r + k^{r-1} + \cdots + k}{k_r}\right|^2}{\frac{t}{k_t^2} + \frac{r}{k_r^2}}.$$

Da aber

$$k^q + k^{q-1} + \cdots + k^{q-t+1} = -(k^r + k^{r-1} + \cdots + k)$$

ist, so wird weiter

$$(11) \qquad I = \frac{a^2 \left| \frac{1}{k_t} - \frac{1}{k_r} \right|^2}{\frac{t}{k_t^2} + \frac{r}{k_r^2}} = a^2 \frac{\frac{1}{k_t^2} - \frac{2}{k_t k_r} + \frac{1}{k_r^2}}{\frac{t}{k_t^2} + \frac{r}{k_r^2}},$$

wo zur Abkürzung

$$a = |k^q + k^{q-1} + \cdots + k^{q-t+1}| = |k^r + k^{r-1} + \cdots + k|,$$

oder, da $|k| = 1$ ist,

$$a = |1 + k + k^2 + \cdots + k^{t-1}| = |1 + k + k^2 + k^{r-1}|$$

gesetzt ist. Aus der Fundamentalgleichung

$$\frac{t}{k_t} + \frac{r}{k_r} = \frac{q}{h}$$

erhält man

$$-\frac{2}{k_t k_r} = \frac{1}{rt}\left(\frac{t^2}{k_t^2} + \frac{r^2}{k_r^2} - \frac{q^2}{h^2}\right)$$

und setzt man dies in (11) ein, so wird

$$I = \frac{a^2}{rt} \frac{\frac{rt+t^2}{k_t^2} + \frac{rt+r^2}{k_r^2} - \frac{q^2}{h^2}}{\frac{t}{k_t^2} + \frac{r}{k_r^2}}$$

oder, da $q = r + t$ ist,

$$I = \frac{qa^2}{rt} \frac{\frac{t}{k_t^2} + \frac{r}{k_r^2} - \frac{q}{h^2}}{\frac{t}{k_t^2} + \frac{r}{k_r^2}} = \frac{qa^2}{rt}\left[1 - \frac{q}{h^2} \frac{1}{\frac{t}{k_t^2} + \frac{r}{k_r^2}}\right].$$

Nach Formel (4) auf S. 388 ist aber

$$\frac{t}{k_t^2} + \frac{r}{k_r^2} = \frac{q}{h^2} \cdot \frac{1}{2x'},$$

wo die rechte Seite nun wegen $\sum \frac{1}{k_x} = +\frac{q}{h}$ positiv ist. Setzt man dies in die vorige Formel ein, so wird einfach

(12) $$I = \frac{qa^2}{rt}(1-2x'),$$

woraus die Intensität leicht zu berechnen ist, da x eine bekannte Funktion von h ist.

Für die Komponente doppelter normaler Aufspaltung ist $\lim\limits_{h=\infty} x = \frac{h}{2}$, $\lim\limits_{h=\infty} x' = \frac{1}{2}$ und folglich $\lim\limits_{h=\infty} I = 0$. Für die andere, innere Komponente wird $\lim\limits_{h=\infty} x = 0$, $\lim\limits_{h=\infty} x' = 0$ und somit $\lim\limits_{h=\infty} I = \frac{qa^2}{rt}$.

Die Formel (12) kann man wieder anschaulicher schreiben, wenn man aus der Näherungsformel $\nu = N - \frac{h}{2} - x$ darin

$$x' = -\left(\nu' + \frac{1}{2}\right)$$

einsetzt; es wird

(13) $$I = \frac{2qa^2}{rt}(1+\nu').$$

Für die positive Seite erhält man in derselben Weise

(12′, 13′) $$I = \frac{qa^2}{rt}(1+2x') = \frac{2qa^2}{rt}(1-\nu').$$

Nach Seite 384 ist für die negative Seite

$$x = \frac{1}{2}\left(d + \frac{h}{2} \pm \sqrt{d^2 - \frac{r-t}{q}hd + \left(\frac{h}{2}\right)^2}\right)$$

und mithin

$$x' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{-\frac{r-t}{q}d + \frac{h}{2}}{2\sqrt{d^2 - \frac{r-t}{q}hd + \left(\frac{h}{2}\right)^2}}\right).$$

Für die Intensität erhält man sonach, wenn man weiter $\frac{h}{2} = ld$ setzt,

$$\left.\begin{matrix} I_i \\ I_a \end{matrix}\right\} = \frac{q a^2}{2 r t}\left(1 \mp \frac{\frac{r-t}{q} - l}{\sqrt{1 - 2\frac{r-t}{q} l + l^2}}\right).$$ [1]

Die Intensitäten der beiden normalen Komponenten sind wieder einander komplementär; ihre Summe beträgt nun $\frac{q a^2}{r t}$ und hängt somit im Gegensatz zu den longitudinalen Komponenten auch von dem Verhältnis $t : r$ ab. Für $h = 0$ $(l = 0)$ wird

$$(14) \quad I_i = \frac{q a^2}{2 r t}\left(1 - \frac{r-t}{q}\right) = \frac{a^2}{r}; \quad I_a = \frac{q a^2}{2 r t}\left(1 + \frac{r-t}{q}\right) = \frac{a^2}{t};$$

bei wachsender Feldstärke nimmt I_i zu und wird bei unendlich starken Feldern gleich $\frac{q a^2}{r t}$. Die Intensität I_a nimmt dagegen ab und wird schließlich verschwinden.

Die Intensitäten der positiven Seite ergeben sich aus denselben der negativen Seite durch Vertauschung von l mit $-l$.

Für eine Linie mit Trabant $(t = 1)$ wird $a = 1$ und mithin

$$I = \frac{r+1}{2r}\left(1 \mp \frac{\frac{r-1}{r+1} - l}{\sqrt{1 - 2\frac{r-1}{r+1} l + l^2}}\right);$$

setzt man hier ferner $r = 2$, so erhält man für Natrium-Duplets

$$I = \frac{3}{4}\left(1 \mp \frac{\frac{1}{3} - l}{\sqrt{1 - \frac{2}{3} l + l^2}}\right),$$

deren Identität mit der Voigtschen Formel in der von Sommerfeld angegebenen Form wieder leicht einzusehen ist.

10. Es wurde auf S. 382—383 die einfache Beziehung zwischen den p- und s-Komponenten bezüglich ihrer Lage bemerkt, nämlich daß das eine Komponentensystem aus dem anderen durch leichte Verschiebungen hervorgeht. Bei Duplets besteht eine ähnliche Beziehung auch zwischen den Intensitäten der gestörten

---

1) Diese Formeln gehen wieder mit der Annäherung $n_r^2 - n_l^2 = 2 \nu d$ aus den strengen Formeln in derselben Weise wie bei den longitudinalen Komponenten hervor.

Komponenten. Es bezeichne I_{pa}, J_{pi} bezw. I_{sa}, I_{si} die Intensitäten der äußeren und inneren p- bezw. s-Komponenten der negativen Seite; ebenso I'_{pa}, I'_{pi} bezw. I'_{sa}, I'_{si} diejenigen der positiven Seite. Durch Vergleich der Formeln auf S. 392 und 399 erhält man

$$I_{sa} = f \cdot I'_{pa} \qquad I'_{sa} = f \cdot I_{pa}$$
$$I_{si} = f \cdot I'_{pi} \qquad I'_{si} = f \cdot I_{pi}$$

oder

$$\frac{I_{sa}}{I'_{pa}} = \frac{I_{si}}{I'_{pi}} = \frac{I'_{sa}}{I_{pa}} = \frac{I'_{si}}{I_{pi}} = f,$$

wo zur Abkürzung

$$f = \frac{a^2}{rt} = \frac{|1 + k + k^2 + \cdots + k^{r-1}|^2}{rt} = \frac{|1 + k + k^2 + \cdots + k^{t-1}|^2}{rt}$$

gesetzt ist. Die Intensitäten der s-Komponenten stehen somit in einem konstanten Verhältnis zu denjenigen der p-Komponenten der anderen Seite. Da das Verhältnis ein echter Bruch ist (der Fall $t = r = 1$ ausgenommen), so ist die Intensität der ersteren stets schwächer als der anderen. Für Natriumduplets z. B. ist

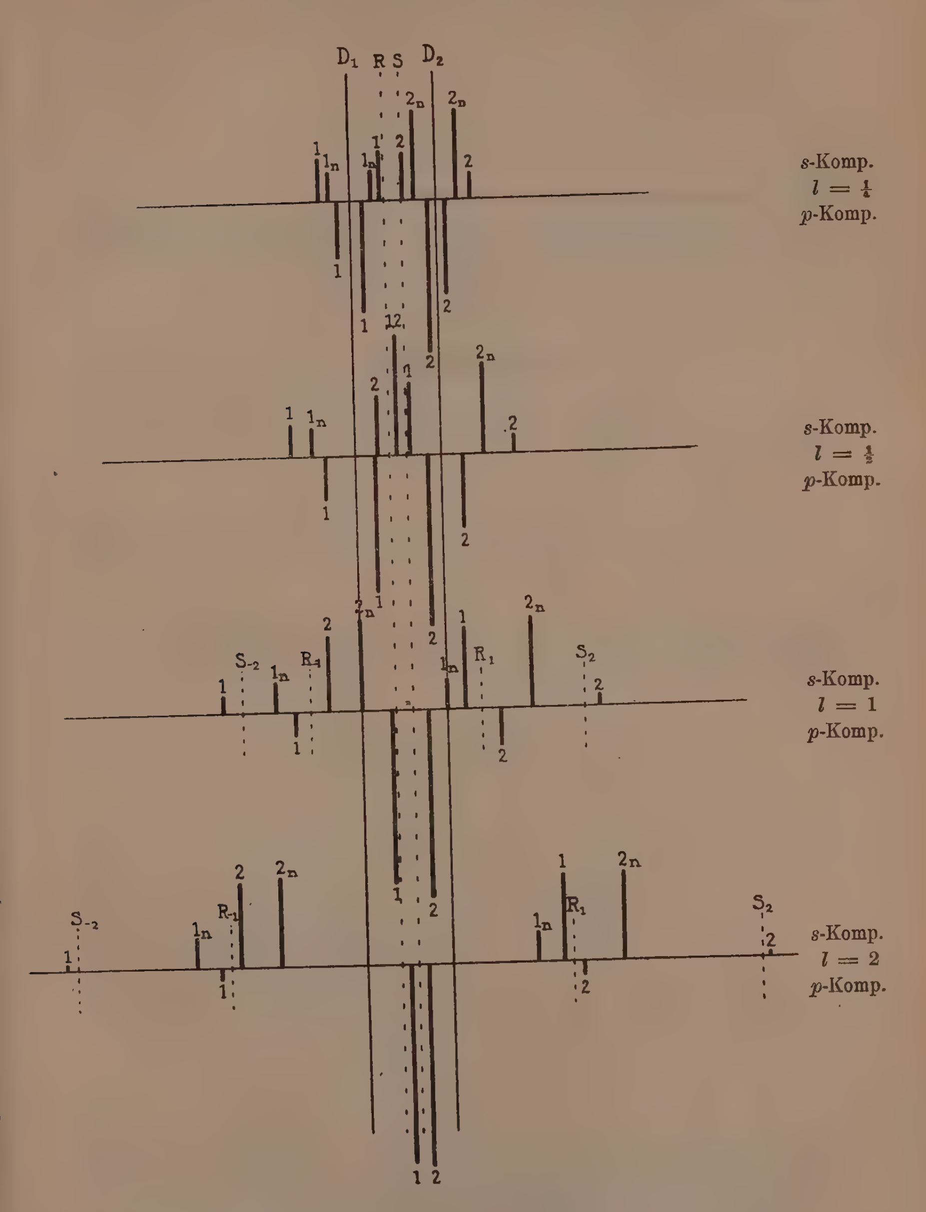
$$f = \frac{4 \cos^2 \frac{\pi}{3}}{2.1} = \frac{1}{2}.$$

11. Zum Schluß fügen wir noch eine Figur zu, die die Bewegungen und Intensitäten der verschiedenen Komponenten des Duplets $t = 2$, $r = 3$ für vier mittlere Feldstärken veranschaulicht. Die Intensitäten der Komponenten sind durch die Größe der respektiven vertikalen Strecken dargestellt. Die Linie D_1 gibt hier eine, D_2 zwei normale p- und s-Komponenten in beiden Seiten die mit $1n$ bezw. $2n$ bezeichnet sind. Die Frequenzen der gestörten p-Komponenten sind aus der Formel

$$\nu = n_r - \frac{d}{2}\left(1 + l \mp \sqrt{1 + \frac{2}{5}\,l + l^2}\right)$$

für die negative, aus

$$\nu = n_r - \frac{d}{2}\left(1 - l \pm \sqrt{1 - \frac{2}{5}\,l + l^2}\right)$$



für die positive] Seite berechnet. Die entsprechenden Formeln für die s-Komponenten lauten

$$\nu = n_r - \frac{d}{2}\left(1 + 3l \mp \sqrt{1 - \frac{2}{5}l + l^2}\right),$$

$$\nu = n_r - \frac{d}{2}\left(1 - 3l \pm \sqrt{1 + \frac{2}{5}l + l^2}\right).$$

Das obere Zeichen gehört stets der inneren Komponente.

Die Intensitäten der normalen p-Komponenten verschwinden in jedem Felde; für die gestörten p-Komponenten ist

$$I = \frac{5}{2}\left(1 \pm \frac{\frac{1}{5} + l}{\sqrt{1 + \frac{2}{5}l + l^2}}\right)$$

für die negative, und

$$I = \frac{5}{2}\left(1 \mp \frac{\frac{1}{5} - l}{\sqrt{1 - \frac{2}{5}l + l^2}}\right)$$

für die positive Seite. Die entsprechenden Intensitäten der gestörten s-Komponenten sind

$$I = \frac{5}{3}\cos^2\frac{\pi}{5}\left(1 \mp \frac{\frac{1}{5} - l}{\sqrt{1 - \frac{2}{5}l + l^2}}\right),$$

$$I = \frac{5}{3}\cos^2\frac{\pi}{5}\left(1 \pm \frac{\frac{1}{5} + l}{\sqrt{1 + \frac{2}{5}l + l^2}}\right).$$

Die Intensität der normalen Komponente von D_1 ist nach S. 396

$$I = 2\sin^2\frac{\pi}{5}.$$

Zur Bestimmung der Intensität der zweifachen normalen Komponente von D_2 sei bemerkt, daß das magnetische Feld keine Energie auf die Schwingungen überträgt, so daß die Summe der von einer Konstituente auf die Komponenten übertragenen Intensitäten in jedem Felde dieselbe ist (auch für $h = 0$, wo die Komponenten in der Konstituente selbst eingehen).

Für eine zweifache Linie ($t = 2$) eines Duplets ist diese Summe gleich

$$I = 2\sin^2\frac{\pi}{q} + \frac{a^2}{t} = 2\sin^2\frac{\pi}{q} + 2\cos^2\frac{\pi}{q} = 2;$$

auf die normale Komponente wird nämlich die Intensität $2\sin^2\frac{\pi}{q}$ (s. S. 393), auf die gestörten Komponenten die Intensität

$$\frac{a^2}{t} = 2\cos^2\frac{\pi}{q}$$

übertragen, wie man für $h = 0$ findet (s. S. 399). Für die Linie D_2 muß somit die betreffende Summe gleich r sein. Da hieraus nach (14) auf die gestörten Komponenten die Intensität

$$I = \frac{a^2}{r} = \frac{4}{r}\cos^2\frac{\pi}{q}$$

übertragen wird, bleibt der $r-1$-fachen normalen Komponente die Intensität

$$I = r - \frac{4}{r}\cos^2\frac{\pi}{q}$$

übrig. In unserem Duplet ist die Intensität der betreffenden Komponente somit gleich

$$I = 3 - \frac{4}{3}\cos^2\frac{\pi}{5}.$$

Aus der letzten Figur ($l = 2$) von S. 401 geht schon deutlich hervor, daß die Komponenten bei wachsender Feldstärke sich in der auf S. 385 bezeichneten Weise anordnen.

Göttingen, August 1914.

Über das lineare Mass von Punktmengen — eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs.

Von

C. Carathéodory in Göttingen.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 24. Oktober 1914.

Einleitung.

Der Gedanke, die bahnbrechenden und äußerst fruchtbaren Theorien, die Herr Lebesgue für den Inhalt von Punktmengen entwickelt hat[1], auf den Begriff der Länge zu übertragen, liegt sehr nahe: es genügt eine additive Mengenfunktion zu finden, deren Wert für jede rektifizierbare Kurve gleich der gewöhnlichen Länge dieser Kurve ist, und die im übrigen bei der Bildung von Vereinigungs- und Durchschnittsmengen die Eigenschaften des gewöhnlichen Lebesgueschen Maßes besitzt.

Es zeigt sich, daß man bei der Durchführung dieses Gedankens nicht nur auf keine nennenswerte Schwierigkeiten stößt, sondern daß man eine Theorie erhält, die trotz der großen Allgemeinheit ebenso einfach ist, wie die bisher üblichen. Der einzige Unterschied ist der, daß man die Beweise auf allgemeinere Eigenschaften der Punktmengen zu stützen hat, als die, die man früher gewöhnlich zu Hilfe zog.

Ich habe es deshalb für zweckmäßig gehalten, meine Darstellung mit einer rein formalen Theorie der Meßbarkeit zu beginnen. Dabei wird eine Definition der Meßbarkeit zu Grunde

---

1) Eine gute Darstellung dieser Theorien findet man in Ch. J. de la Vallée Poussin, Cours d'Analyse Infinitésimale (Louvain & Paris T. I 3e éd, 1914, T. II 2e éd. 1912), eine Zusammenstellung der Literatur in der neuesten unter den grundlegenden Arbeiten von H. Lebesgue, Sur l'intégration des fonctions discontinues (Ann. Éc. Norm. sup. (3) T. 27 (1910) p. 361—450).

gelegt, die einerseits allgemeiner ist, als die gewöhnliche, weil sie sich auch auf Punktmengen von unendlichem äußeren Maße erstreckt, andererseits aber scheinbar viel enger. Diese Definition ist daher viel bequemer als die ältere: sie erlaubt sämtliche in Betracht kommenden Sätze ohne tiefliegende Kunstgriffe zu beweisen; und sie ist der gewöhnlichen Definition vollständig äquivalent, wie im § 21 gezeigt wird.

Im zweiten Kapitel habe ich die lineare Meßbarkeit behandelt; es genügte dazu zu zeigen, daß die Größe, die dort als äußeres lineares Maß bezeichnet wird, und die ausnahmslos jeder beliebigen Punktmenge eindeutig zugeordnet ist, die fünf Eigenschaften des äußeren Maßes besitzt, die in der formalen Theorie gefordert werden. Genau ebenso hätte man auch für die gewöhnliche Lebesguesche Meßbarkeit verfahren können.

Schließlich wird gezeigt, daß das lineare Maß einer rektifizierbaren Kurve gleich der Länge der Kurve ist, und es wird der Begriff eines p-dimensionalen Maßes in einem q-dimensionalen Raume definiert.

Kapitel I.

Formale Theorie der Meßbarkeit.

1. In vielen Theorien der Analysis spielen gewisse „Mengenfunktionen", denen man den generellen Namen äußeres Maß geben kann, eine hervorragende Rolle. Zu jeder speziellen Art eines solchen äußeren Maßes gehört eine Klasse von Punktmengen, die man in Bezug auf dieses äußere Maß meßbar nennt; die Meßbarkeit ist also ein relativer Begriff. Die äußeren Maße werden durch fünf Eigenschaften charakterisiert, von denen ich aber die zwei letzten erst später einführen will, weil man schon aus den ersten eine Reihe von wichtigen Schlüssen ziehen kann. Wir setzen also voraus:

I. Jeder beliebigen Punktmenge A eines q-dimensionalen Raumes $\mathfrak{R}_q$ ist eine Zahl $\mu^* A$ eindeutig zugeordnet, die Null, positiv, oder gleich $+\infty$ sein kann, und die das äußere Maß von A heißt.

II. Für eine Teilmenge B von A ist stets

$$\mu^* B \leqq \mu^* A.$$

III. Ist A die Vereinigungsmenge einer Folge von endlich oder abzählbar unendlich vielen Punktmengen $A_1, A_2, \ldots$, so ist stets

$$\mu^* A \leqq \mu^* A_1 + \mu^* A_2 + \cdots$$

Diese letzte Ungleichheit hat offenbar nur dann eine Bedeutung, wenn die Summe rechterhand konvergiert.

Definition. Eine Punktmenge A soll meßbar heißen, wenn für jede willkürliche Punktmenge W von endlichem äußeren Maße die Relation gilt[1])

$$\mu^* W = \mu^* AW + \mu^*(W - AW); \tag{1}$$

das Maß μA von A wird dann durch die Gleichung definiert

$$\mu A = \mu^* A.$$

Bemerkung 1. Wir hätten in der Definition der Meßbarkeit die Bestimmung, daß W von endlichem äußeren Maße sein soll, fallen lassen können, ohne an dieser Definition irgend etwas zu ändern; ist nämlich $\mu^* W = \infty$, so muß nach der Eigenschaft III eine der Zahlen $\mu^* AW$ oder $\mu^*(A - AW)$ unendlich sein, und (1) reduziert sich dann immer auf eine Identität.

Bemerkung 2. Da das Maß μA einer meßbaren Punktmenge nach unserer Definition nicht endlich zu sein braucht, kann man über die Meßbarkeit von Punktmengen Schlüsse ziehen, ohne untersuchen zu müssen, ob diese Mengen ein endliches äußeres Maß besitzen oder nicht.

2. Es sei A' die Komplementärmenge von A; dann ist für jede willkürliche Punktmenge W

$$A'W = W - AW \qquad W - A'W = AW,$$

hieraus folgt unmittelbar:

Satz 1. Die Komplementärmenge einer meßbaren Punktmenge ist meßbar.

3. Es seien A und B zwei meßbare Punktmengen, und $D = AB$ ihr Durchschnitt.

Wegen der Meßbarkeit von A ist nach unserer Definition für jede willkürliche Punktmenge W von endlichem äußeren Maße

$$\mu^* W = \mu^* AW + \mu^*(W - AW), \tag{2}$$

und ferner ist, wenn man $AW = W_1$ setzt,

$$BW_1 = DW \qquad W_1 - BW_1 = AW - DW.$$

Da nun B ebenfalls meßbar sein soll, kann man schreiben

$$\mu^* AW = \mu^* DW + \mu^*(AW - DW). \tag{3}$$

---

1) Wir bezeichnen hier und im Folgenden den Durchschnitt von zwei Punktmengen A und W durch AW.

Setzt man andererseits $(W - DW) = W_2$, so kommt

$$AW_2 = AW - DW, \qquad W_2 - AW_2 = W - AW$$

und mit Benutzung der Meßbarkeit von A

(4) $$\mu^*(W - DW) = \mu^*(AW - DW) + \mu^*(W - AW).$$

Der Vergleich von (2), (3) und (4) liefert endlich

$$\mu^* W = \mu^* DW + \mu^*(W - DW).$$

Die Punktmenge D ist demnach meßbar. Durch Anwendung des Schlusses von n auf $(n+1)$ erhält man schließlich den Satz:

Satz 2. Der Durchschnitt von endlich vielen meßbaren Puntmengen ist meßbar.

4. Sind A und B zwei meßbare Punktmengen und bezeichnet man mit B' die Komplementärmenge von B, so ist nach Satz 1 die Punktmenge B', nach Satz 2 die Punktmenge

$$AB' = A - AB$$

meßbar, und man erhält den Satz:

Satz 3. Sind A und B meßbare Punktmengen, so gilt dasselbe von der Punktmenge $(A - AB)$.

5. Für den folgenden Satz wird von den Eigenschaften II und III des äußeren Maßes wesentlich Gebrauch gemacht.

Es sei eine Folge von abzählbar unendlich vielen meßbaren Punktmengen $A_1, A_2, \ldots$ gegeben, die ineinandergeschachtelt sind

$$A_1 \succ A_2 \succ \cdots;$$

mit Ω bezeichnen wir den Durchschnitt aller dieser Punktmengen; wir wollen zeigen, daß Ω meßbar ist.

Es sei W eine Punktmenge von endlichem äußeren Maße; wir setzen

$$W_n = A_n W \qquad W_0 = \Omega W$$

und bemerken, daß W_n für alle n sowie auch W_0 als Teilmengen von W ebenfalls ein endliches Maß besitzen. Es ist ferner, weil

$$W_n \succ W_{n+1} \quad \text{und} \quad W_n \succ W_0,$$

für jedes n

$$\mu^* W_n \geqq \mu^* W_{n+1} \quad \text{und} \quad \mu^* W_n \geqq \mu^* W_0;$$

hieraus folgt aber ohne weiteres die Existenz des Grenzwertes

(5) $$\lim_{n=\infty} \mu^* W_n = \lambda,$$

und es ist

(6) $$\mu^* W_0 \leqq \lambda.$$

Nun bemerke man, daß

(7) $$W - W_0 = (W - W_1) + (W_1 - W_2) + (W_2 - W_3) + \cdots$$

ist, oder

$$W = W_0 + (W - W_1) + (W_1 - W_2) + (W_2 - W_3) + \cdots,$$

sodaß nach der Eigenschaft III

(8) $$\mu^* W \leqq \mu^* W_0 + \mu^*(W - W_1) + \mu^*(W_1 - W_2) + \cdots.$$

Nun sind A_1, A_2, ... meßbare Punktmengen, und man kann schreiben

(9) $$\mu^*(W - W_1) = \mu^*(W - A_1 W) = \mu^* W - \mu^* W_1$$

(10) $$\mu^*(W_{n-1} - W_n) = \mu^*(W_{n-1} - A_n W_{n-1}) = \mu^* W_{n-1} - \mu^* W_n,$$

und diese Werte in (8) eingesetzt liefern

$$\mu^* W \leqq \mu^* W_0 + \mu^* W - \lambda,$$

woraus mit Hilfe von (6) folgt

(11) $$\mu^* W_0 = \lambda.$$

Andererseits ergibt sich aus (7) mit Berücksichtigung von (9) und (10)

$$\begin{aligned} \mu^*(W - W_0) &\leqq \mu^*(W - W_1) + \mu^*(W_1 - W_2) + \cdots \\ &\leqq \mu^* W - \lambda, \end{aligned}$$

während man aus $W - W_0 \succ W - W_n$ schließt, daß

$$\begin{aligned} \mu^*(W - W_0) &\geqq \mu^*(W - W_n) \\ &\geqq \mu^* W - \mu^* W_n \end{aligned}$$

ist, und da dies für jedes n gilt,

$$\mu^*(W - W_0) \geqq \mu^* W - \lambda.$$

Man hat also, mit Benutzung von (11)

$$\begin{aligned} \mu^* W &= \lambda + \mu^*(W - W_0) \\ &= \mu^* W_0 + \mu^*(W - W_0) \\ &= \mu^* \Omega W + \mu^*(W - \Omega W); \end{aligned}$$

die Punktmenge Ω ist also meßbar.

6. Es seien jetzt A_1, A_2, ... beliebige meßbare Punktmengen in abzählbarer Anzahl und D ihr Durchschnitt. Die Punktmengen

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_1 A_2, \quad B_3 = A_1 A_2 A_3, \ldots$$

sind ineinandergeschachtelt und meßbar, wegen des Satzes 2. Der Durchschnitt dieser letzten Punktmengen, von dem wir gesehen haben, daß er meßbar ist, ist aber identisch mit D.

Wir haben also folgenden Satz:

Satz 4. Der Durchschnitt D von abzählbar unendlich vielen meßbaren Punktmengen $A_1, A_2, \ldots$ ist meßbar.

7. Es seien wiederum $A_1, A_2, \ldots$ beliebige meßbare Punktmengen in endlicher oder abzählbarer Anzahl; mit V bezeichnen wir ihre Vereinigungsmenge.

Bezeichnet man mit $A_1', A_2', \ldots$ die Komplementärmengen von $A_1, A_2, \ldots$ mit V' die Komplementärmenge von V, so ist V' gleich dem Durchschnitte der Punktmengen $A_1', A_2', \ldots$ Nach Satz 1 sind nun alle A_n' meßbar; nach einem der Sätze 2 oder 4 ist dann V' meßbar; also ist auch V meßbar.

Satz 5. Die Vereinigungsmenge V von endlich oder abzählbar unendlich vielen meßbaren Punktmengen $A_1, A_2, \ldots$ ist meßbar.

8. Durch Kombination der Sätze 1 bis 5 folgt sodann, daß alle Punktmengen, die man aus einer gegebenen abzählbaren Folge

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \tag{12}$$

von meßbaren Punktmengen durch sukzessive Bildung von Komplementär-, Durchschnitts- oder Vereinigungsmengen erhält, ebenfalls meßbar sind.

Bezeichnet man z. B. mit V_n die Vereinigungsmenge von $A_n, A_{n+1}, \ldots$, so ist der Durchschnitt

$$\overline{\alpha} = V_1 V_2 V_3 \ldots$$

dieser Punktmengen der sog. Limes superior der Folge (12), d. h. die Gesamtheit der Punkte, die in unendlich vielen der Punktmengen A_n enthalten sind.

Bezeichnet man hingegen mit D_n den Durchschnitt von A_n, $A_{n+1}, \ldots$, so wird die Vereinigungsmenge $\underline{\alpha}$ aller Punktmengen D_n der Limes inferior der Folge (12) genannt; die Punktmenge $\underline{\alpha}$ besteht aus allen Punkten des Raumes, die in sämtlichen Punktmengen (12) mit Ausnahme von höchstens endlich vielen unter ihnen enthalten sind. Es folgt also der Satz:

Satz 6. Sowohl der Limes superior wie der Limes inferior einer Folge von abzählbar unendlich vielen meßbaren Punktmengen sind wieder meßbare Punktmengen.

9. Sind die Punktmengen, die man betrachtet, von endlichem äußeren Maße, so kann man die obigen Sätze ein wenig präzisieren.

Es sei A eine meßbare, B eine beliebige Punktmenge, beide

von endlichem äußeren Maße; mit V bezeichnen wir ihre Vereinigungsmenge. Es ist nun

$$V = A + (B - AB),$$

und da A meßbar ist,

$$\begin{aligned}\mu^* V &= \mu^* AV + \mu^*(V - AV)\\ &= \mu A + \mu^*(B - AB)\\ &= \mu A + \mu^* B - \mu^* AB.\end{aligned}$$

Ist insbesondere $AB = 0$, so haben wir mit

$$\mu^*(A + B) = \mu A + \mu^* B$$

ein Resultat, das man leicht auf die Summe von endlich vielen meßbaren Punktmengen übertragen kann.

10. Es sei eine Folge von abzählbar vielen meßbaren Punktmengen $A_1, A_2, \ldots$ gegeben, von denen keine zwei einen gemeinsamen Punkt besitzen; mit S bezeichnen wir die Summe dieser Mengen. Setzen wir

$$S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A \ ,$$

so ist S_n meßbar und nach § 9

$$\mu S_n = \mu A_1 + \mu A_2 + \cdots + \mu A_n.$$

Da nun $S \succ S_n$, so ist für jedes n

$$\mu S \geqq \sum_{k=1}^{n} \mu A_k. \tag{13}$$

Hat die Summe auf der rechten Seite im Limes den Wert unendlich, so ist demnach ebenfalls $\mu S = \infty$. Ist aber.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k = \lambda$$

und λ endlich, so folgt aus dem Vergleich von (13) mit der Eigenschaft III für äußere Maße, daß $\mu S = \lambda$ ist.

Satz 7. *Das Maß der Summe von endlich oder abzählbar unendlich vielen meßbaren Punktmengen, von denen keine zwei einen gemeinsamen Punkt besitzen, ist gleich der Summe der Maße dieser Mengen.*

Wir können ohne weiteres auch folgende Sätze aussprechen.

Satz 8. *Sind die meßbaren Punktmengen*

$$A_1 \prec A_2 \prec \cdots$$

ineinandergeschachtelt und ist V ihre Vereinigungsmenge, so ist immer

$$\mu V = \lim_{n=\infty} \mu A_n.$$

[Man kann nämlich schreiben

$$V = A_1 + (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \cdots$$

und die Sätze 3 und 7 anwenden.]

Satz 9. Sind die meßbaren Punktmengen

$$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \ldots$$

ineinandergeschachtelt und ist D ihr Durchschnitt, so ist

$$\mu D = \lim_{n=\infty} \mu A_n$$

sobald μA_1 endlich ist.

[Denn es ist

$$D = A_1 - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k - A_{k+1}).]$$

Dieser letzte Satz braucht aber nicht richtig zu sein, wenn die Gleichung $\mu A_k = \infty$ für jedes k gilt, wie man bei speziellen Maßbestimmungen an Beispielen zeigen kann.

11. Aus der Forderung II des § 1 entnimmt man, daß das Maß einer Vereinigungsmenge V nicht kleiner sein kann als das Maß eines jeden ihrer Bestandteile $A_1, A_2, \ldots$ und daß folglich

$$\mu^* V \geqq \text{obere Grenze von } (\mu^* A_1, \; \mu^* A_2 \ldots).$$

Genau ebenso sieht man, daß für den Durchschnitt

$$D = A_1 A_2 \ldots$$

die Relation

$$\mu^* D \leqq \text{untere Grenze von } (\mu^* A_1, \mu^* A_2, \ldots)$$

gilt.

Mit den Bezeichnungen des § 8 ist also unter der Voraussetzung, daß die A_n meßbar sind,

$$\mu V_n \geqq \text{obere Grenze von } (\mu A_n, \; \mu A_{n+1}, \ldots)$$

und nach § 10, unter der weiteren Einschränkung, daß mindestens ein V_n von endlichem Maße ist,

$$\mu \bar{\alpha} \geqq \overline{\lim} \, \mu A_n. \tag{14}$$

Ähnlich findet man, wenn die A_n meßbar sind, daß stets

$$\mu \underline{\alpha} \leqq \underline{\mathrm{Lim}}\, \mu A_n \tag{15}$$

sein muß.

Wenn der Limes inferior $\underline{\alpha}$ und der Limes superior $\overline{\alpha}$ einer Folge von Punktmengen zusammenfallen, so ist es bequem, von einer Konvergenz der Folge zu sprechen und die Schreibweise

$$\mathrm{Lim}_{n=\infty} A_n = \alpha$$

einzuführen. Ist die Vereinigungsmenge V aller A_n von endlichem Maße, so folgt aus (14) und (15), daß die Folge der Zahlen μA_n ebenfalls konvergiert, und daß

$$\mathrm{Lim}_{n=\infty} \mu A_n = \mu \alpha$$

ist.

Die letzten Sätze habe ich nur der Vollständigkeit halber erwähnt, weil sie in der Integrationstheorie von Lebesgue wichtig sind.

12. Die Theorie, die wir bisher entwickelt haben, ist so allgemein gehalten, daß es unmöglich ist, auch nur von einer einzigen vorgegebenen Punktmenge zu entscheiden, ob sie meßbar ist. Um die Existenz von meßbaren Punktmengen darzulegen, führen wir jetzt eine vierte Eigenschaft des äußeren Maßes ein:

IV. Sind A_1 und A_2 zwei Punktmengen, deren Entfernung $\delta \neq 0$ ist, so soll stets

$$\mu^*(A_1 + A_2) = \mu^* A_1 + \mu^* A_2 \tag{16}$$

sein.

13. Wir werden von folgender Überlegung Gebrauch machen:

Es sei H eine beliebige Punktmenge unseres Raumes $\mathfrak{R}_q$, die aus lauter inneren Punkten besteht, und deren (notwendig abgeschlossene) Komplementärmenge K mindestens einen Punkt enthält. Wir bezeichnen mit n eine positive ganze Zahl und mit H_n die Gesamtheit der Punkte des Raumes, deren Entfernung von der Punktmenge K größer als $\frac{1}{n}$ ist.

Die Punktmengen $H_1, H_2, \ldots$ und ihre Komplementärmengen $K_1, K_2, \ldots$ besitzen folgende Eigenschaften:

a) Für jedes hinreichend große n ist H_n eine Teilmenge von H, die aus lauter inneren Punkten besteht; die Punktmenge K_n dagegen ist abgeschlossen und enthält K.

b) die Punktmengen $H_1, H_2, \ldots$ sind ineinandergeschachtelt, d. h. es ist

$$H_n \prec H_{n+1};$$

folglich ist auch

$$K_n \succ K_{n+1}.$$

c) Jeder Punkt von H liegt in mindestens einem H_n, also auch in allen folgenden.

[Da K abgeschlossen ist, ist die Entfernung zwischen K und einem beliebigen Punkte der Punktmenge H stets $\neq 0$, also größer als eine der Zahlen $\frac{1}{n}$.]

d) Die Entfernung δ_n zwischen K_n und H_{n-1} ist von Null verschieden.

Ist nämlich P irgend ein Punkt von H_{n-1} und Q irgend ein Punkt, der von P um weniger als $\frac{1}{n(n-1)}$ entfernt ist, so ist die Entfernung $E(Q, K)$ zwischen Q und der Punktmenge K

$$\begin{aligned} E(Q, K) &\geqq E(P, K) - E(P, Q) \\ &> \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Der Punkt Q ist also ein Punkt von H_n, kann also kein Punkt von K_n sein; d. h. es ist

$$\delta_n = E(H_{n-1}, K_n) \geqq \frac{1}{n(n-1)},$$

also verschieden von Null.

14. Es sei B eine beliebige Punktmenge von endlichem Maße, die in H enthalten ist, wir setzen

$$B_n = B H_n;$$

ich behaupte, daß

$$\mu^* B = \lim_{n=\infty} \mu^* B_n \tag{17}$$

ist. Aus $B_n \prec B_{n+1}$ und $B_n \prec B$ folgt zunächst, daß die Folge der Zahlen $\mu^* B_n$ monoton wächst und unterhalb $\mu^* B$ bleibt; es existiert also der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \mu^* B_n = \lambda, \tag{18}$$

und es ist

$$\lambda \leqq \mu^* B. \tag{19}$$

Wir setzen

$$B = B_n + R_n \tag{20}$$

$$C_n = B_{n+1} - B_n \tag{21}$$

und bemerken, daß

$$R_n = C_n + C_{n+1} + \cdots$$

ist. Dann ist aber

$$\mu^* R_n \leqq \mu^* C_n + \mu^* C_{n+1} + \cdots \tag{22}$$

Ferner ist nach (21)

$$B_{n+1} = B_n + C_n \succ B_{n-1} + C_n$$

und folglich

$$\mu^* B_{n+1} \geqq \mu^*(B_{n-1} + C_n) \tag{23}$$

Nun bemerke man, daß B_{n-1} als Teilmenge von H_{n-1} und C_n als Teilmenge von K_n einen Abstand besitzen, der mindestens gleich δ_n und also $\neq 0$ ist. Man kann also schreiben (§ 12)

$$\mu^*(B_{n-1} + C_n) = \mu^* B_{n-1} + \mu^* C_n$$

und folglich nach (23)

$$\mu^* C_n \leqq \mu^* B_{n+1} - \mu^* B_{n-1}.$$

Dies in (22) eingesetzt gibt

$$\mu^* R_n \leqq \sum_{p=0}^{\infty} (\mu^* B_{n+p+1} - \mu^* B_{n+p-1})$$
$$\leqq (\lambda - \mu^* B_{n-1}) + (\lambda - \mu^* B_n),$$

woraus folgt

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \mu^* R_n = 0. \tag{24}$$

Nun ist aber für jedes n nach der Eigenschaft III

$$\mu^* B \leqq \mu^* B_n + \mu^* R_n$$

und im Limes nach (18) und (24)

$$\mu^* B \leqq \lambda.$$

Dies mit (19) verglichen, liefert die gewünschte Gleichung (17).

15. Es sei W eine willkürliche Punktmenge von endlichem Maße. Wir setzen

$$HW = B, \quad H_n W = H_n B = B_n,$$

wobei H und H_n dieselbe Bedeutung haben wie früher. Die Punktmengen $(W-HW)$ und B_n haben als Teilmengen von K bzw. H_n eine von Null verschiedene Entfernung, sodaß

$$\mu^*((W-HW)+B_n) = \mu^*(W-HW)+\mu B_n$$

ist; berücksichtigt man, daß

$$W \succ B_n + (W-HW)$$

ist, so folgt

$$\mu^* W \geqq \mu^* B_n + \mu^*(W-HW)$$

und im Limes für $n = \infty$ nach (17)

$$\mu^* W \geqq \mu^* HW + \mu^*(W-HW).$$

Andererseits ist wegen der Eigenschaft III

$$\mu^* W \leqq \mu^* HW + \mu^*(W-HW).$$

Also muß

$$\mu^* W = \mu^* HW + \mu^*(W-HW)$$

sein. Wir haben also bewiesen, daß H meßbar ist; die Komplementärmenge K von H ist also ebenfalls meßbar.

Satz 10. *Die Punktmengen, die aus lauter inneren Punkten bestehen, sind meßbar; ebenso auch die abgeschlossenen Punktmengen.*

16. Versteht man unter einem q-*dimensionalen Intervall* des Raumes $\mathfrak{R}_q$ eine Punktmenge, die aus allen Punkten besteht, deren Koordinaten $x_1 \ldots x_q$ die Bedingungen

$$|x_k - x_k^0| < h_k \qquad k = 1, 2, \ldots q$$

befriedigen (wobei x_k^0 beliebige und h_k beliebige positive und von Null verschiedene Konstanten bedeuten), so kann man die Bedingung IV durch folgende äquivalente ersetzen:

IVa. *Die Intervalle sind meßbare Punktmengen.*

In der Tat bestehen die Intervalle aus lauter inneren Punkten, sodaß wegen des Satzes 10 die Bedingung IVa eine Konsequenz von IV ist.

Andererseits kann man bekanntlich jede beliebige Punktmenge, die aus lauter inneren Punkten besteht, als Vereinigungsmenge von abzählbar vielen Intervallen betrachten. Diese Punktmengen und ihre Komplementärmengen, die abgeschlossenen Punktmengen, sind also meßbar, wenn IVa gelten soll.

Haben endlich A_1 und A_2 eine von Null verschiedene Entfernung δ, so gibt es abgeschlossene Punktmengen B, die A_1 als

Teilmenge enthalten und mit A_2 keinen Punkt gemeinsam haben. Da B aber meßbar ist, hat man

$$\mu^*(A_1 + A_2) = \mu^* B(A_1 + A_2) + \mu^*((A_1 + A_2) - B(A_1 + A_2))$$
$$= \mu^* A_1 + \mu^* A_2.$$

Die Forderung IV ist also eine Konsequenz von IVa, und beide Forderungen sind, wie wir zeigen wollten, äquivalent.

17. Man kann die Theorie endlich vervollständigen, wenn folgende fünfte Eigenschaft für das äußere Maß erfüllt ist:

V. Das äußere Maß $\mu^* A$ einer beliebigen Punktmenge ist die untere Grenze der Maße μB aller meßbaren Punktmengen B, die A als Teilmenge enthalten.

Ist A von endlichem äußeren Maße, so gibt es nach Voraussetzung zu jeder ganzen Zahl n mindestens eine meßbare Punktmenge B_n, für welche

$$A \prec B_n \quad \text{und} \quad \mu B_n \leqq \mu^* A + \frac{1}{n}$$

ist. Wählt man für jedes n eine derartige Punktmenge und setzt

$$\bar{A} = B_1 B_2 \ldots,$$

so ist erstens $\bar{A}$ meßbar (Satz 5) und ferner, weil $A \prec \bar{A} \prec B_n$ ist,

$$\mu^* A \leqq \mu \bar{A} \leqq \mu^* A + \frac{1}{n}$$

und zwar für jedes n, woraus man $\mu \bar{A} = \mu^* A$ folgert. Wir haben also bewiesen:

Satz 11. Ist A eine beliebige Punktmenge von endlichem äußeren Maße, so gibt es meßbare Punktmengen $\bar{A}$, die A enthalten und für welche $\mu \bar{A} = \mu^* A$ ist.

18. Es sei C eine meßbare Punktmenge, die in A enthalten ist; dann ist, wenn $\bar{A}$ dieselbe Bedeutung hat wie oben, $(\bar{A} - A)$ eine Teilmenge der meßbaren Punktmenge $(\bar{A} - C)$. Es ist also

$$\mu^*(\bar{A} - A) \leqq \mu(\bar{A} - C) = \mu \bar{A} - \mu C,$$

woraus folgt

$$\mu C \leqq \mu^* A - \mu^*(\bar{A} - A). \tag{25}$$

Ferner sei B eine meßbare Punktmenge, die den Bedingungen genügt:

$$(\bar{A} - A) \prec B \qquad \mu B = \mu^*(\bar{A} - A).$$

Eine derartige Punktmenge muß nach Satz 11 immer existieren.

Die Punktmenge $\bar{A}B$ ist meßbar, und es ist

$$(\bar{A} - A) \prec \bar{A}B \prec B,$$

also auch

$$\mu \bar{A}B = \mu^*(\bar{A} - A).$$

Nun ist die Punktmenge $\underline{A} = \bar{A} - \bar{A}B$ eine meßbare Teilmenge von A, und man hat

(26) $$\mu \underline{A} = \mu^* A - \mu^*(\bar{A} - A).$$

Diese letzte Zahl ist demnach (wenn man (25) berücksichtigt) die obere Grenze der Maße aller meßbaren Teilmengen von A. Wir wollen sie das **innere Maß** von A nennen und mit $\mu_* A$ bezeichnen.

Zugleich sehen wir, daß die Zahl $\mu^*(\bar{A} - A)$ ganz unabhängig von der speziellen Konstruktion ist, die uns die Punktmenge $\bar{A}$ geliefert hat.

Endlich sehen wir, daß es meßbare Teilmengen von A gibt, deren Maß gleich dem inneren Maß von A ist.

19. Ist A meßbar, so folgt aus

$$\mu \bar{A} = \mu A + \mu(\bar{A} - A),$$

daß $\mu(\bar{A} - A) = 0$ ist.

Ist umgekehrt $\mu(\bar{A} - A) = 0$, so sei W eine willkürliche Punktmenge von endlichem äußeren Maße; man hat

$$\bar{A}W = AW + (\bar{A} - A)W$$

und folglich

$$\mu^* AW \leqq \mu^* \bar{A}W \leqq \mu^* AW + \mu^*(\bar{A} - A)W,$$

und da $(\bar{A} - A)$ das Maß Null hat, so gilt dasselbe umsomehr für $(\bar{A} - A)W$, und man hat

(27) $$\mu^* \bar{A}W = \mu^* AW.$$

Genau ebenso beweist man aus

$$(W - AW) = (W - \bar{A}W) + (\bar{A} - A)W,$$

daß

(28) $$\mu^*(W - \bar{A}W) = \mu^*(W - AW)$$

ist. Nun ist nach unserer Konstruktion $\bar{A}$ meßbar, und folglich

$$\mu^* W = \mu^* \bar{A} W + \mu^*(W - \bar{A} W)$$

oder mit Hilfe von (27) und (28)

$$\mu^* W = \mu^* A W + \mu^*(W - A W),$$

d. h. A ist meßbar.

Man kann dieses Resultat folgendermaßen aussprechen, wenn man die Definition (26) des inneren Maßes von A benutzt:

Satz 12. *Damit eine Punktmenge A von endlichem äußeren Maße meßbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß ihr äußeres und ihr inneres Maß zusammenfallen.*

20. Es seien A und B zwei beliebige Punktmengen ohne gemeinsamen Punkt, die aber beide endliches äußeres Maß haben. Wir setzen $S = A + B$ und bestimmen, nach den §§ 17 und 18, vier neue meßbare Punktmengen

$$A',\ B',\ \bar{S},\ \underline{S},$$

die folgende Eigenschaften haben

$$\begin{array}{ll} A' \succ A & \mu A' = \mu^* A \\ \bar{S} \succ S & \mu \bar{S} = \mu^* S \\ B' \prec B & \mu B' = \mu_* B \\ \underline{S} \prec S & \mu \underline{S} = \mu_* S. \end{array}$$

Nun bilde ich zwei neue Punktmengen $\bar{A}$ und $\underline{B}$ durch die Operationen

$$\bar{A} = A' \bar{S} - A' B',$$
$$\underline{B} = B' + (\underline{S} - \underline{S} \bar{A} - \underline{S} B').$$

Die Punktmengen $\bar{A}$ und $\underline{B}$ sind meßbar und haben folgende Eigenschaften

$$A \prec \bar{A} \prec A', \qquad B' \prec \underline{B} \prec B,$$

also ist

$$\mu \bar{A} = \mu^* A, \qquad \mu \underline{B} = \mu_* B.$$

Ferner ist

$$\bar{A} \underline{B} = 0, \qquad \underline{S} \prec \bar{A} + \underline{B} \prec \bar{S},$$

woraus man schließt, daß

$$\mu \underline{S} \leqq \mu \bar{A} + \mu \underline{B} \leqq \mu \bar{S}$$

oder

(29) $$\mu_* S \leqq \mu^* A + \mu_* B \leqq \mu^* S$$

ist.

Die Relation (29) ist ein Gegenstück zu den Ungleichheiten

(30) $$\mu^* A + \mu^* B \geqq \mu^* S$$

(31) $$\mu_* A + \mu_* B \leqq \mu_* S,$$

von denen wir die erste im § 1 postulierten, während die zweite aus der Bemerkung gewonnen werden kann, daß die Vereinigungsmenge von zwei meßbaren Punktmengen, die in A resp. B enthalten sind, meßbar sein muß und eine Teilmenge von S ist.

21. Ist S meßbar und von endlichem Maße und gilt außerdem die Gleichung

$$\mu^* A + \mu^* B = \mu S,$$

so müssen A und B beide meßbar sein.

In der Tat folgt dann aus (29)

$$\mu^* A + \mu_* B = \mu S,$$

also $\mu^* B = \mu_* B$ und durch Vertauschung von B mit A die analoge Gleichung für A.

Dieses Resultat zeigt die Äquivalenz der üblichen Definition der Meßbarkeit mit der unsrigen.

22. Endlich beweisen wir die folgende, oft sehr brauchbare Verallgemeinerung unseres Satzes 8.

Satz 13. Sind die Punktmengen A_1, $A_2 \ldots$ ineinandergeschachtelt

$$A_1 \prec A_2 \prec \ldots$$

und A ihre Vereinigungsmenge, so ist immer

$$\mu^* A = \lim_{n=\infty} \mu^* A_n.$$

Da für jedes n

(32) $$\mu^* A \geqq \mu^* A_n$$

ausfällt, ist nur für den Fall, daß

$$\lim_{n=\infty} \mu^* A_n = \lambda$$

endlich ist, ein Beweis nötig.

Dazu konstruieren wir die meßbaren Punktmengen A_1', A_2', ..., die folgenden Bedingungen genügen sollen

$$A_n' \succ A_n \qquad \mu A_n' = \mu^* A_n$$

und bilden die Durchschnitte

$$\bar{A}_n = A_n' \cdot A_{n+1}' \ldots;$$

man hat $A_n \prec \bar{A}_n \prec A'_n$ und es ist also

$$\mu \bar{A}_n = \mu^* A_n.$$

Die $\bar{A}_n$ sind ineinandergeschaltet und ihre Vereinigungsmenge ist eine Punktmenge $\bar{A}$, welche A als Teilmenge enthält.

Es ist also

$$\mu^* A \leqq \mu \bar{A} = \lim_{n=\infty} \mu \bar{A}_n$$

und folglich

$$\mu^* A \leqq \lambda.$$

Andererseits folgt aus (32), daß $\mu^* A \geqq \lambda$ ist; also muß $\mu^* A = \lambda$ sein, w. z. b. w.

Kapitel II.

Das lineare Maß.

23. Es sei A eine beliebige Punktmenge im q-dimensionalen Raume ($q > 1$); mit $U_1, U_2, \ldots$ bezeichnen wir eine Folge von endlich oder abzählbar unendlich vielen Punktmengen, die folgenden beiden Bedingungen genügt:

a) die gegebene Punktmenge A ist Teilmenge der Vereinigungsmenge der U_k,

b) der Durchmesser d_k eines jeden U_k ist kleiner als eine vorgeschriebene positive Zahl ϱ[1]).

Wir betrachten die untere Grenze der Summen

$$d_1 + d_2 + \cdots$$

der Durchmesser d_k, für alle Folgen $U_1, U_2, \ldots$, die den Bedingungen a) und b) genügen, und bezeichnen diese untere Grenze, die übrigens gleich $+\infty$ sein kann, mit $L_\varrho A$.

Nimmt ϱ ab, so werden die Bedingungen, denen die U_k genügen müssen, enger, und die Zahl $L_\varrho A$ kann sich nicht verkleinern. Es existiert also stets der Limes

$$\lim_{\varrho=0} L_\varrho A = L^* A.$$

Die Zahl $L^* A$, die für jede beliebige Punktmenge eindeutig definiert ist, soll das äußere lineare Maß von A genannt werden.

1) Der Durchmesser einer Punktmenge U_k ist bekanntlich die obere Grenze der Entfernung zweier Punkte von U_k.

24. Man kann, indem man außer den Bedingungen a) und b) noch andere hinzufügt, den U_k Beschränkungen auflegen, ohne den Wert des linearen äußeren Maßes $L^* A$ dadurch zu vergrößern.

Wenn man z. B. jedes U_k durch die kleinste abgeschlossene konvexe Punktmenge ersetzt, die U_k enthält, so bleiben die Durchmesser d_k und folglich die Zahlen $L_\varrho A$ und $L^* A$ unverändert.

Man kann auch von den U_k verlangen, daß sie konvexe und aus lauter inneren Punkten bestehende Punktmengen sein sollen. Um zu zeigen, daß auch hier $L^* A$ unverändert bleibt, bezeichne ich mit $\Lambda_\varrho A$ die Zahl, die der Zahl $L_\varrho A$ entspricht, wenn die U_k den neuen Bedingungen unterworfen werden.

Es sei $U_1, U_2, \ldots$ eine beliebige Folge von Punktmengen, die unseren früheren Bedingungen genügen. In jeden Punkt eines dieser U_k lege ich den Mittelpunkt einer q-dimensionalen Kugel vom Radius $\frac{\varrho}{2^{k+1}}$ und bezeichne mit C_k die kleinste konvexe Punktmenge, die aus lauter inneren Punkten besteht und die inneren Punkte aller dieser Kugeln, also auch U_k enthält.

Für den Durchmesser δ_k der Punktmenge C_k gilt dann die Abschätzung

$$\delta_k \leqq d_k + \frac{\varrho}{2^k} \leqq 2\varrho,$$

und man hat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \left(d_k + \frac{\varrho}{2^k}\right),$$

woraus man leicht schließt, daß

$$\Lambda_{2\varrho} A \leqq L_\varrho A + \varrho$$

ist. Da aber andererseits, wegen der Definition von $\Lambda_\varrho A$, die Ungleichheit $\Lambda_\varrho A \geqq L_\varrho A$ stattfinden muß, hat man schließlich

$$\operatorname*{Lim}_{\varrho=0} \Lambda_{2\varrho} A = L^* A,$$

wie wir beweisen wollten.

25. Wir müssen jetzt verifizieren, daß $L^* A$ alle im ersten Kapitel von $\mu^* A$ geforderten Eigenschaften besitzt.

Erstens bemerken wir, daß, wenn B eine Teilmenge von A ist, jede Folge $\{U_k\}$ die Punktmenge B überdeckt, sobald sie A überdeckt; es ist also für jedes ϱ

$$L_\varrho B \leqq L_\varrho A$$

und daher auch im Limes

$$L^* B \leqq L^* A.$$

Die Forderung II ist also erfüllt.

26. Es seien ferner $A_1, A_2, \ldots$ endlich oder abzählbar viele Punktmengen, A ihre Vereinigungsmenge, und die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} L^* A_k$$

sei konvergent. Wir können nach Voraussetzung die Punktmenge A_k mit endlich oder abzählbar unendlich vielen Punktmengen

$$U_{k1}, \quad U_{k2}, \ldots$$

überdecken, deren Durchmesser $d_{k1}, d_{k2}, \ldots$ folgenden Bedingungen genügen:

$$d_{kn} \leqq \varrho, \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_{kn} \leqq L_\varrho A_k + \frac{\varrho}{2^k} \leqq L^* A_k + \frac{\varrho}{2^k},$$

Nun überdeckt die Vereinigungsmenge aller U_{kn} unsere ganze Punktmenge A, und es ist

$$L_\varrho A \leqq \sum_{k,n} d_{kn} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \left(L^* A_k + \frac{\varrho}{2^k} \right)$$

und schließlich

$$L_\varrho A \leqq \sum_{k=1}^{\infty} L^* A_k + \varrho.$$

Es ist also

$$L^* A = \operatorname*{Lim}_{\varrho = 0} L_\varrho A$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty} L^* A_k,$$

d. h. die Forderung III ist erfüllt.

27. Es seien A_1 und A_2 zwei Punktmengen von endlichem Maße, deren Entfernung $\delta \neq 0$ ist.

Wir wählen $\varrho < \frac{\delta}{2}$ und überdecken $(A_1 + A_2)$ mit endlich oder abzählbar vielen Punktmengen U_k, deren Durchmesser d_k den Bedingungen genügen

$$d_k < \varrho, \quad \sum_{k=1}^{\infty} d_k \leqq L_\varrho(A_1 + A_2) + \varrho \leqq L^*(A_1 + A_2) + \varrho.$$

Nun seien $U'_1, U'_2, \ldots$ diejenigen unter den Punktmengen U_k, die einen Punkt von A_1 und folglich (wegen der Bedingung $\varrho < \frac{\delta}{2}$) keinen Punkt von A_2 enthalten, $U''_1, U''_2, \ldots$ die übrigen. Bezeichnet man mit d'_k und d''_k die Durchmesser von U'_k resp. U''_k und bemerkt, daß die Vereinigungsmenge der U'_k die Punktmenge A_1, die Vereinigungsmenge der U''_k die Punktmenge A_2 enthält, so erhält man

$$L_\varrho A_1 \leqq \sum_{k=1}^{\infty} d'_k, \quad L_\varrho A_2 \leqq \sum_{k=1}^{\infty} d''_k$$

und folglich

$$L_\varrho A_1 + L_\varrho A_2 \leqq \sum_{k=1}^{\infty} d'_k + \sum_{k=1}^{\infty} d''_k$$
$$\leqq L^*(A_1 + A_2) + \varrho.$$

Läßt man hier ϱ gegen Null konvergieren, so wird

$$L^* A_1 + L^* A_2 \leqq L^*(A_1 + A_2),$$

und da nach der Forderung III

$$L^* A_1 + L^* A_2 \geqq L^*(A_1 + A_2)$$

sein muß, so ist hiermit unsere Forderung IV bestätigt.

28. Es sei $L^* A$ wiederum endlich; mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ bezeichnen wir eine beliebige monoton abnehmende gegen Null konvergierende Folge von positiven Zahlen.

Wir überdecken A, sukzessive für $k = 1, 2, \ldots$ mit abzählbar unendlich vielen Punktmengen

$$U_{k1}, U_{k2}, \ldots,$$

deren Durchmesser $d_{k1}, d_{k2}, \ldots$ sämtlich $\leqq \varrho_k$ sind und die außerdem die Eigenschaft haben, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_{kn} \leqq L_\varrho A + \varrho_k \leqq L^* A + \varrho_k \tag{33}$$

ist. Wie wir in § 24 gesehen haben, ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir für die U_{kn} abgeschlossene Punktmengen wählen. Die U_{kn} sind dann sämtlich linear meßbar. (Satz 10; § 15.)

Dann ist die Vereinigungsmenge V_k von $U_{k1}, U_{k2}, \ldots$ nach Satz 5 ebenfalls linear meßbar, und das Gleiche gilt vom Durchschnitt

$$\bar{A} = V_1 V_2 \ldots$$

aller V_k.

Nun ist $A \prec \bar{A}$ und infolgedessen

(34) $$L^* A \leqq L \bar{A},$$

wobei wir $L \bar{A}$ statt $L^* \bar{A}$ schreiben, da A linear meßbar ist. Andererseits wird aber $\bar{A}$ als Teilmenge von V_k durch die Folge $U_{k1}, U_{k2}, \ldots$ überdeckt; es ist also für jedes k nach (33)

$$L_{\varrho_k} \bar{A} \leqq \sum_n d_{kn} \leqq L^* A + \varrho_k$$

und mithin im Limes

(35) $$L \bar{A} \leqq L^* A.$$

Der Vergleich von (34) und (35) zeigt endlich, daß unsere Forderung V ebenfalls erfüllt ist.

Die ganze im ersten Kapitel entwickelte Theorie kann auf die lineare Meßbarkeit angewandt werden.

29. Es sei jetzt γ eine Kurve ohne Doppelpunkte, d. h. ein eindeutiges stetiges Bild einer abgeschlossenen Strecke; γ ist eine abgeschlossene und daher meßbare Punktmenge. Ich behaupte, daß das lineare Maß von γ gleich der oberen Grenze λ der in γ eingeschriebenen Polygonzüge ist.

Zuerst zeigen wir, daß $L\gamma$ nicht kleiner ist als die Länge der Sehne, welche die Endpunkte P_1 und P_2 von γ verbindet. Wir überdecken γ mit einer Folge von Punktmengen $U_1', U_2', \ldots$, von denen wir verlangen, daß sie konvexe Gebiete sind und daß jeder Punkt von γ im Inneren von mindestens einem dieser Gebiete liege. Die Durchmesser d_k' dieser Gebiete sollen den Bedingungen genügen (§ 24)

$$d_k' \leqq 2\varrho, \qquad \sum d_k' \leqq L_\varrho \gamma + \varrho \leqq L\gamma + \varrho.$$

Da γ abgeschlossen ist, kann man wegen des bekannten Borel-Lebesgueschen Satzes voraussetzen, daß die U_k' nur in endlicher Anzahl vorhanden sind.

Nun bestimme man eine Teilmenge $U_1, U_2, \ldots U_m$ der U_k' folgendermaßen. Das Gebiet U_1 soll den Anfangspunkt P_1 der Kurve in seinem Innern enthalten; ist Q_1 der letzte Punkt der Kure γ, der auf der Begrenzung von U_1 liegt, so soll U_2 den Punkt Q_1 in seinem Inneren enthalten. Ebenso soll U_3 den letzten Punkt Q_2 von γ enthalten, der auf der Begrenzung von U_2 liegt u. s. f. Man erhält ein aus endlich vielen Seiten bestehendes in γ eingeschriebenes Polygon $P_1 Q_1 \ldots Q_{m-1} P_2$, dessen Länge nicht größer ist als die Summe der Durchmesser $d_1, d_2, \ldots d_m$ der U_k; denn die U_k sind nach Konstruktion sämtlich von einander verschieden. Also ist jedenfalls

$$E(P_1, P_2) \leqq \sum_{k=1}^{m} d_k \leqq \sum d'_k \leqq L\gamma + \varrho,$$

und im Limes für $\varrho = 0$

$$E(P_1, P_2) \leqq L\gamma.$$

Man bezeichne jetzt mit $\mathfrak{P}$ ein beliebiges in γ eingeschriebenes Polygon, mit $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_m$ die aufeinanderfolgenden Stücke von γ, deren Endpunkte in den Ecken von $\mathfrak{P}$ liegen. Da eine endliche Anzahl von Punkten das lineare Maß Null besitzt, ist

$$L\gamma = L\gamma_1 + L\gamma_2 + \cdots + L\gamma_m,$$

und nach dem soeben erhaltenen Resultate folgt, daß die Länge des Polygons $\mathfrak{P}$ die Zahl $L\gamma$ nicht übersteigt. Es ist also jedenfalls

$$L\gamma \geqq \lambda.$$

Nun zerlegen wir γ in endlich viele aufeinanderfolgende abgeschlossene Teilbogen $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_m$, deren Durchmesser $\leqq \varrho$ ist und von denen je zwei benachbarte nur einen Punkt gemeinsam haben sollen, und führen die γ_k statt unserer Punktmengen U_k ein. Auf jedem γ_k gibt es zwei Punkte, deren Entfernung gleich dem Durchmesser d_k von γ_k ist. Führt man diese Punkte als Ecken eines eingeschriebenen Polygons ein, so ist die Länge dieses Polygons jedenfalls nicht kleiner als die Summe über die Durchmesser d_k, und wir haben folglich für jedes ϱ

$$L_\varrho \gamma \leqq \lambda,$$

also ist auch $L\gamma \leqq \lambda$ und die Identität zwischen dem linearen Maße und der Länge von γ ist hiermit erbracht.

30. Eine Punktmenge von endlichem linearen äußeren Maße besitzt das gewöhnliche Lebesguesche Maß Null.

Man kann nach Voraussetzung die Punktmenge A mit abzählbar unendlich vielen Punktmengen U_k überdecken, deren Durchmesser alle kleiner als ϱ sind, und sodaß

$$\sum d_k \leqq L^* A + 1$$

ist. Nun ist der Durchmesser der Projektion eines jeden U_k auf jede Axe jedenfalls nicht größer als d_k und man kann daher jedes U_k in das Innere eines n-dimensionalen Würfels von der Seitenlänge d_k legen, sodaß das gewöhnliche äußere Maß $m^* A$ der Bedingung genügt

$$m^* A \leqq \sum_{k=1}^{\infty} d_k^n$$
$$\leqq \varrho^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} d_k$$
$$\leqq \varrho^{n-1} (L^* A + 1),$$

eine Zahl, die mit ϱ gegen Null konvergiert.

31. Auf ganz analogem Wege kann man eine Theorie des p-dimensionalen Maßes in einem q-dimensionalen Raume behandeln. Dazu behalte man in der Definition des § 23 die Bedingungen a) und b), denen die U_k genügen müssen bei, ersetze aber im übrigen bei der Bildung der unteren Grenze von Summen von Durchmessern die gewöhnlichen Durchmesser d_k der Punktmengen U_k durch die „p-dimensionalen Durchmesser“ $d_k^{(p)}$ dieser Punktmengen.

Um $d_k^{(p)}$ zu definieren, bemerke man, daß man d_k erhält, wenn man die kleinste konvexe Punktmenge C_k, die U_k enthält, auf eine beliebige gerade Linie orthogonal projiziert, wobei in jedem Falle eine Strecke entsteht, und wenn man darauf die obere Grenze der Länge dieser Strecken für alle möglichen Richtungen der geraden Linie im Raume bestimmt.

Nun kann man aber die Punktmenge C_k auf eine p-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit orthogonal projizieren; als Projektion erhält man wiederum eine konvexe Punktmenge, deren Inhalt von der „Stellung“ unserer p-dimensionalen Mannigfaltigkeit im q-dimensionalen Raume abhängt. Die obere Grenze dieses Inhalts für alle möglichen p-dimensionalen Mannigfaltigkeiten soll der p-dimensionale Durchmesser $d_k^{(p)}$ unserer Punktmenge U_k genannt werden.

Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien.
V. Feinzerlegung der Wasserstoffserie[1]).

Mit 3 Figuren im Text.

Von

J. Stark.

Vorgelegt in der Sitzung vom 21. November 1914.

Inhalt: § 1. Aufgabe. § 2. Technisches. § 3. Zahl und Intensitätsverhältnis der elektrischen Komponenten. § 4. Abhängigkeit des Komponentenabstandes von der Feldstärke. § 5. Folgerung.

§ 1. Aufgabe.

Das Wasserstoffatom nimmt in chemischer Hinsicht eine ausgezeichnete Stellung unter den übrigen Elementen ein; seine Serie von Spektrallinien hat als Ausgangspunkt und Vorbild für die Ermittlung von Serien anderer Elemente gedient. Aus diesen Gründen besitzt eine eingehende Untersuchung der Zerlegung der Wasserstoffserie durch das elektrische Feld eine grundlegende Bedeutung.

Die Zerlegung der ersten vier Glieder der Wasserstoffserie H_α, H_β, H_γ, H_δ, wie sie in einem mäßig starken Felde bei mäßiger Dispersion und geringer Lichtstärke erscheint, ist bereits an früherer Stelle[2]) beschrieben worden. Wer die dort mitgeteilten Spektrogramme jener Linien betrachtet, dem wird die Breite und Unschärfe ihrer elektrischen Komponenten auffallen. Und vielleicht ist er zunächst geneigt, den Grund dafür in einer mangelhaften

---

1) Ausgeführt mit Unterstützung des Solvay-Instituts.

2) J. Stark und H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. 43, 1017, 1914.

Einstellung des verwendeten Spektrographen (Konkavgitter) zu suchen. Indes kann dies nicht der Grund sein; denn die Komponenten der Heliumlinien, welche mit demselben Apparat erhalten wurden, sind im Vergleich dazu schmäler und schärfer.

Bedenkt man nun, daß die Wasserstofflinien in den Kanalstrahlen überwiegend von bewegten Atomen, die Heliumlinien überwiegend von ruhenden Atomen emittiert werden, so mag man die Erklärung des Unterschiedes in der Schärfe der elektrischen Komponenten beider Linienarten in folgender Überlegung suchen. Die abbildende Öffnung des verwendeten Spektrographen umfaßt ein endliches Winkelfeld; innerhalb dieses besitzen darum die Kanalstrahlen für einen Teil der Sehaxen eine fortlaufende, für einen anderen Teil eine weglaufende Geschwindigkeit, für den dritten Teil die relative Geschwindigkeit Null. Infolge des Doppler-Effektes muß darum eine von den bewegten Atomen in den Kanalstrahlen emittierte Linie verbreitert erscheinen, auch wenn die Axe der abbildenden Öffnung senkrecht zur Axe des Kanalstrahlenbündels steht. In der Tat erhält man die Serienlinien des Wasserstoffs für diese Axenstellung auch ohne die zerlegende Wirkung des elektrischen Feldes in den Kanalstrahlen erheblich breiter als die Bandenlinien des Wasserstoffs oder die überwiegend ruhenden Serienlinien des Heliums.

Wenn man auch die vorstehende Erklärung der Unschärfe der elektrischen Komponenten der Wasserstofflinien zunächst für ausreichend erachten durfte, so mußte sie doch genauer nachgeprüft werden. Es war ja außerdem mit der Möglichkeit zu rechnen, daß die Breite jener Linienkomponenten durch ein Nebeneinanderliegen schärferer Komponenten bedingt wird. Es erhob sich somit die Aufgabe, die zunächst erhaltene Grobzerlegung der Serienlinien des Wasserstoffs durch eine Untersuchung auf eine mögliche Feinzerlegung zu ergänzen.

§ 2. Technisches.

Um eine Feinzerlegung der Wasserstofflinien zu gewinnen, empfiehlt es sich nicht, die Dispersion des anzuwendenden Spektrographen (1 : 8,5 mm : Å) etwa auf das Doppelte oder Dreifache zu steigern. Eine so große Dispersion liefert nämlich im Zusammenwirken mit dem oben gekennzeichneten Doppler-Effekt stark verbreiterte Linienkomponenten; infolge der Verteilung der an sich kleinen Intensität über ihre erhebliche Breite gewinnen dann diese nicht die genügende Schwärzung mehr, um photographisch sichtbar

zu werden. Muß man aus diesem Grunde auf eine Steigerung der Dispersion verzichten, so bleibt zum Zweck der Feinzerlegung nur übrig, die zerlegende Feldstärke von dem anfänglich von mir verwandten Wert (30000 Volt $\times$ cm^{-1}) auf das Doppelte oder Dreifache zu steigern, um so möglicherweise dicht bei einander liegende Komponenten auseinanderzuzerren. Dieser Weg hat sich, wie weiter unten dargelegt ist, als gangbar erwiesen. Zunächst sei indes der optische Teil der Untersuchung näher beschrieben.

Wenn auch hinsichtlich der Dispersion keine große Anforderung an die Spektrographen für die Feinzerlegung der Wasserstofflinien gestellt wird, so ist doch großes Gewicht auf eine andere Seite zu legen, nämlich auf die Lichtstärke. Denn erstens ist die Emission des Kanalstrahlenbündels im elektrischen Feld an und für sich nicht intensiv. Zweitens wird eine als Ganzes schon nicht intensive Linie in eine Anzahl von Komponenten zerlegt. Drittens ist deren Intensität sehr verschieden; es kommen unter ihnen solche vor, die zehnmal schwächer sind als die intensivsten Komponenten.

Auf Grund dieser Überlegungen habe ich für die Feinzerlegung der Wasserstofflinien einen Gitter- und einen Prismenspektrographen von folgenden Eigenschaften zurechtgemacht. Ein großes Plangitter ausgerüstet mit Objektiven von großem Öffnungsverhältnis ist einem Konkavgitter an Lichtstärke weit überlegen; zudem arbeitet es im Unterschied von diesem stigmatisch, eine Eigenschaft, welche nicht allein die Lichtstärke begünstigt, sondern auch die Inhomogenität des abgebildeten elektrischen Feldes deutlich zu erkennen gestattet. Das von mir verwendete Plangitter hat eine geteilte Fläche von 6,8 $\times$ 9,9 cm^2 und 15000 Striche auf dem Zoll; es besitzt seine größte Intensität in der ersten Ordnung auf der einen Seite seiner Normalen; der erste Geist im Blau kommt erst bei beträchtlicher Überlichtung einer Linie heraus. Es ist ausgerüstet mit einem Zeiß-Tessar von 59 cm Brennweite und 1 : 6,3 Öffnung als Spaltrohrobjektiv, mit einem Zeiß-Tessar von 50 cm Brennweite und 1 : 4,5 Öffnung als Kameraobjektiv. Diese Objektive liefern von λ 560—420 $\mu\mu$ scharfe Abbildung; im Rot ist ihre Abbildung zwar mangelhaft, aber doch noch brauchbar; im Violett nimmt ihre Schärfe hinter λ 420 $\mu\mu$ rasch ab. Das Plangitter habe ich so gegen die Axe des Spaltrohres geneigt, daß sich folgende Dispersion ergibt:

H_α 1 : 8,16 mm : Å; H_β 1 : 16,8 mm : Å; H_γ 1 : 18,3 mm : Å.

Den für den vorliegenden Zweck verwendeten Prismenspektro-

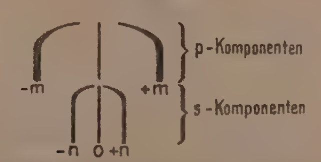
graphen habe ich, um die Lichtstärke im Violett nicht zu sehr durch die Absorption zu verringern, nur mit einem einzigen Verbundprisma ausgestattet. Sein Spaltobjektiv ist ein Achromat von 1 : 6,5 Öffnung und 30 cm Brennweite, sein Kameraobjektiv ein Zeiß-Tessar von 1 : 3,5 Öffnung und 30 cm Brennweite; beide Objektive arbeiten im Violett noch bis λ 390 $\mu\mu$ scharf. Die Dispersion dieses Spektrographen ist für die Feinzerlegung oberhalb λ 440 $\mu\mu$ unzureichend. Dieses Spektralgebiet wird indes von dem Gitterspektrographen beherrscht; unterhalb jener Wellenlänge bis λ 390 $\mu\mu$ dagegen ist der Prismenspektrograph für den vorliegenden Zweck brauchbar und ergänzt somit das Gitter; bei λ 410 $\mu\mu$ beträgt die Dispersion 1 : 20,0 mm : Å.

Um mit den zwei Spektrographen gleichzeitig Aufnahmen machen zu können, wurden ihre Spaltrohre entgegengesetzt koaxial aufgestellt, mitten zwischen ihnen die Kanalstrahlenröhre. Der übrige Teil der Optik war derselbe, wie er bereits an früherer Stelle beschrieben wurde. Es wurde also das leuchtende Spannungsfeld durch je ein Fenster in der Kanalstrahlenröhre und je eine Wollastonplatte hindurch mittels je eines Zeiß-Tessars (1 : 3,5 — f = 5 cm) auf jeden der zwei Spektrographenspalte scharf abgebildet. Die Belichtungszeiten betrugen 10—24 Stunden.

Bei den ersten Aufnahmen der feinzerlegten Linien war die Kanalstrahlenröhre horizontal gestellt. Dies geschah in folgender Absicht. Die Öffnung des Lichtbündels, welches das Prisma oder das Gitter des Spektrographen verläßt, umfaßt in der Lotrechten ein größeres Winkelfeld als in der Wagrechten; das leuchtende Spannungsfeld besitzt parallel den Elektroden eine größere Ausdehnung als senkrecht dazu. Man hat darum eine größere Gewähr für Füllung der Öffnungen der Spektrographen, wenn man die Axe der Kanalstrahlenröhre horizontal stellt. Obwohl mit Hilfe dieser Aufstellung vorzügliche Spektrogramme erhalten wurden, gab ich sie schließlich aus folgenden Gründen auf. Erstens wird die Röhre in dieser Stellung an ihrer oberen Seite außen weniger gut durch die Luftströmung gekühlt; infolgedessen erwärmt sie sich auf dieser Seite am Spannungsfeld leicht so stark, daß der elektrische Strom zwischen den Elektroden des Spannungsfeldes auf die Glaswand überspringt und diese unter Lichtbogenbildung zerstört. Zweitens erhält man nur dann scharfe elektrische Komponenten für diese Stellung, wenn man in der Abbildung des leuchtenden Spannungsfeldes den unmittelbar an der Hilfselektrode liegenden Teil desselben bevorzugt. In diesem Teil ist nämlich

das elektrische Feld homogen, in dem an der Kanalstrahlenelektrode liegenden Teil dagegen inhomogen.

Bei den späteren Aufnahmen wurde demgemäß die Kanalstrahlenröhre vertikal aufgestellt. In dieser Stellung wird sie auf allen Seiten gleichmäßig von außen durch die Luftströmung gekühlt. Die Füllung der Objektive ist für sie zwar weniger leicht zu erreichen, besonders schlecht bei kleinem Elektrodenabstand des Spannungsfeldes; indes bietet diese Stellung dafür einen anderen Vorteil. Es wird nämlich das leuchtende Spannungsfeld so abgebildet, daß seine Axe parallel dem Spektrographenspalt steht. Hat darum die Feldstärke entlang der Axe einen variablen Wert, so gibt die Größe der elektrischen Zerlegung der Spektrallinien für die einzelnen Niveauebenen des Spannungsfeldes getrennt die in ihnen herrschenden Feldstärken wieder. Über diesen Punkt wird voraussichtlich Herr J. Koch (Upsala) genauere Mitteilungen machen; hier sei des Verständnisses halber nur folgendes erwähnt. Man erhält für die betrachtete Stellung der Kanalstrahlenröhre, besonders wenn man durch eine geringe Neigung der Röhre die Partie unmittelbar unter den Löchern zu einer intensiven Abbildung bringt, die aus der schematischen Figur 1 ersichtliche Form



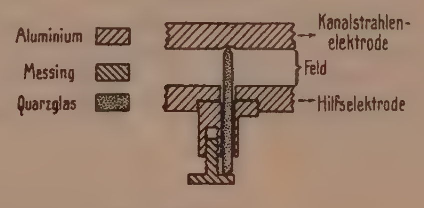
Figur 1.

von Linienkomponenten; während eine am Ort der unzerlegten Linie auftretende Komponente 0 auf ihrer ganzen Länge gerade ist, erscheinen die seitlichen *p*- und *s*-Komponenten ($\pm m$ bez. $\pm n$) an dem einen Ende gekrümmt. Die gekrümmten Linienteile kommen aus dem an der durchlöcherten Kanalstrahlenelektrode anliegenden Teil des Spannungsfeldes, die geraden Teile aus demjenigen Teil, welcher an die ebene lochfreie Hilfselektrode angrenzt. Dies gilt, mag das elektrische Feld die gleiche oder die entgegengesetzte Richtung wie die Kanalstrahlen haben. Hieraus ist zu schließen, daß die Inhomogenität des Feldes und infolgedessen die Krümmung der Linienkomponenten durch die Anwesenheit der Löcher in der Kanalstrahlenelektrode bedingt wird.

Diese Krümmung der Enden von Linienkomponenten bietet

die Möglichkeit, eine Linie neben dem Orte einer unzerlegten Linie sofort als seitliche Komponente von dieser zu erkennen und von einer fremden Linie, etwa einer Bandenlinie zu unterscheiden. So konnte ich von dieser Möglichkeit Gebrauch machen, um gewisse Linien, über deren Zugehörigkeit ich früher im Zweifel war, endgiltig als elektrische Komponenten der Wasserstofflinie nachzuweisen.

Die Anwendung sehr starker elektrischer Felder zum Zweck der Feinzerlegung machte eine Vorrichtung notwendig, welche eine Verstellung der Elektroden des Spannungsfeldes gegen einander verhindert. Als solche bewährte sich die Feststellung dieser zwei Elektroden gegeneinander durch vier Quarzglasstifte in den Ecken eines Quadrats. Aus Figur 2 ist an einem dieser Stifte die Art der Befestigung zu erkennen.



Figur 2.

Wie bereits an früheren Stellen mitgeteilt wurde, läßt sich eine Zerlegung von Spektrallinien erhalten sowohl, wenn die Kanalstrahlen und das zerlegende elektrische Feld dieselbe Richtung (Gleichschaltung), als auch wenn sie entgegengesetzte Richtung (Gegenschaltung) zu einander haben; die Zerlegungen sind in diesen zwei Fällen dieselben, nur ist bei den Serienlinien des Wasserstoffs das Intensitätsverhältnis[1]) lang- und kurzwelliger Komponenten gleicher Nummer für die zwei Schaltungen verschieden. Soweit man nicht dieses Intensitätsverhältnis zum Gegenstand einer Untersuchung machen will, ist die Gegenschaltung der Gleichschaltung aus folgenden Gründen vorzuziehen.

Erstens läßt die Gegenschaltung eine größere Stärke des Kanalstrahlenstromes und darum eine größere Lichtintensität im Spannungsfelde zu. Es erwärmt sich nämlich die Anode des Kanalstrahlenstromes einmal unter dem Einfluß der eigenen Ka-

1) H. Lunelund, Ann. d. Phys. 45, 517, 1914.

thodenstrahlen dieses Stromes, sodann unter dem Einfluß der aus dem Spannungsfeld durch die Löcher in der Kathode kommenden Strahlen, also der Kathodenstrahlen im Falle der Gleichschaltung, der Kanalstrahlen im Falle der Gegenschaltung. Diese zweite Erwärmung ist bei Gleichschaltung größer als bei Gegenschaltung. Es kann darum in diesem Falle der Kanalstrahlenstrom, welcher die Lichtemission im Spannungsfeld anregt, stärker als in jenem Falle gewählt werden.

Zweitens liefert die Gegenschaltung eine größere Feldstärke und somit eine größere Zerlegung als die Gleichschaltung bei gleicher elektromotorischer Kraft und gleichem Widerstand im Stromkreis des Spannungsfeldes. Es fließt nämlich durch dieses, wie ich an früherer Stelle darlegte, immer ein elektrischer Strom; je stärker dieser ist, desto mehr Spannungsabfall legt sich auf den Vorschaltwiderstand unter Verringerung der auf dem Spannungsfeld liegenden Spannnngsdifferenz. Nun ist im Falle der Gleichschaltung die Stromstärke durch das Spannungsfeld sehr viel größer als bei Gegenschaltung. Erzeugt man darum den Kanalstrahlenstrom mit dem Induktorium, so erhält man auch bei gleicher stationärer Einstellung des Elektrometers, welches die Spannungsdifferenz auf dem Spannungsfeld mißt, bei Gleichschaltung eine um 10—20 % kleinere Zerlegung als bei Gegenschaltung. Zudem sind in jenem Falle infolge der größeren Spannungsschwankungen die Linienkomponenten breiter und unschärfer.

In den meisten Aufnahmen diente ein Induktorium zur Erzeugung des Primärstromes. Um zu prüfen, ob die erhaltene Feinzerlegung der Wasserstofflinien nicht vielleicht durch Schwankungen in der Stärke des Kanalstrahlenstromes vorgetäuscht werde, machte ich auch zwei Aufnahmen, in denen zur Erzeugung des Kanalstrahlenstromes eine zwanzigplattige Influenzmaschine diente. Wegen der geringeren Stromstärke und somit geringeren Lichtstärke erhielt ich zwar nur die intensiven Komponenten der Feinzerlegung, aber in gleicher Zahl und in gleichem Abstand wie mit dem Induktorium.

Zur Herstellung des Spannungsfeldes standen mir eine Schuckert-Dynamo von 5000, eine Bornhäuser-Batterie von 6000 Volt und eine Klingelfuß-Batterie von 4000 Volt zur Verfügung. Ich erhielt die Feinzerlegung mit 10000 Volt Batteriespannung ebenso wie mit 15000 Volt Spannung, wenn die Dynamo hinzugenommen wurde. So war erwiesen, daß die Feinzerlegung auch nicht durch ein Schwanken der Dynamospannung vorgetäuscht sein konnte.

§ 3. Zahl und Intensitätsverhältnis der elektrischen Komponenten.

Nachdem einmal mehr Komponenten in der Feinzerlegung als in der Grobzerlegung aufgefunden waren, mußte ein Ziel der vorliegenden Untersuchung sein, wenn möglich sämtliche Komponenten einer zerlegten Linie zu ermitteln. Ich muß leider gestehen, daß es mir nicht gelang, diese Aufgabe vollständig zu lösen. Der Grund liegt darin, daß die Intensitäten der elektrischen Komponenten einer Linie außerordentlich große Unterschiede zeigen; es ist darum mit der Möglichkeit zu rechnen, daß außer den beobachteten wenig intensiven Komponenten noch weitere Komponenten vorkommen, welche noch lichtschwächer sind und darum in meinen Spektrogrammen unterbelichtet blieben. Mit Sicherheit möchte ich diesen Fall bei der Linie H_α vermuten. Bei dieser Linie waren nämlich einerseits selbst die neun intensivsten Komponenten kaum normal belichtet; andererseits läßt die Analogie zu den übrigen Linien der Serie vermuten, daß auch bei H_α die Zahl der Komponenten von der Ordnung 30 ist. Was die Linien H_β, H_γ und H_δ betrifft, so ist ihre Komponentenzahl wohl annähernd richtig, immerhin können auch bei ihnen noch weitere sehr wenig intensive Komponenten vorkommen und, auch hiervon abgesehen, muß ich einige der für sie im Nachstehenden angegebenen Komponenten als fraglich bezeichnen, da sie entweder nur zweifelhaft schwach herauskamen, oder da sie in den Gitterspektrogrammen am Orte möglicher Geister liegen.

Während im Zeeman-Effekt die magnetischen Komponenten einer Linie alle eine Intensität von der gleichen Ordnung haben, zeigt sich im elektrischen Effekt einer Linie die bemerkenswerte Erscheinung, daß ihre elektrischen Komponenten in weiten Grenzen von einander verschieden sind. Es ist möglich, daß in dieser Erscheinung eine wichtige Eigenart der Anordnung oder Dynamik der Serienelektronen eines Atoms zum Ausdruck kommt. Aus diesem Grund schien es mir wünschenswert, über das Intensitätsverhältnis der elektrischen Komponenten einer Serienlinie genauere Angaben zu machen, als etwa durch die übliche rohe Abschätzung des Verhältnisses ihrer Schwärzungen.

Für diesen Zweck lag folgendes von mir und Herrn Lunelund mehrfach erprobte Verfahren nahe[1]). Es seien S_1 und S_2 normale Schwärzungen zweier Komponenten einer Linie in dem-

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 35, 461, 1911; Ber. d. Münch. Akad. 1914, 205.

selben Spektrogramm; dann ist das Intensitätsverhältnis dieser Komponenten

$$\frac{I_1}{I_1} = e^{\frac{S_1 - S_2}{m}},$$

wo der Intensitätsexponent m eine für die verwendete Plattensorte zu ermittelnde Konstante ist. Da die Intensitäten der elektrischen Komponenten der Wasserstofflinien sehr verschieden sind, erscheinen sie im allgemeinen nicht alle in demselben Spektrogramm normal geschwärzt. Darum mußte ich die Intensitätsverhältnisse an zwei Spektrogrammen ermitteln, an einem, in welchem die schwachen und mittelstarken Komponenten normal geschwärzt waren, und an einem anderen Spektrogramm, in welchem die mittelstarken und starken Komponenten normale Schwärzung aufwiesen. Das Vorkommen der mittelstarken Komponenten in den zwei Messungsreihen ermöglichte dann die Umrechnung der Intensitätsverhältnisse auf eine einzige Skala.

In den nachstehenden Tabellen und Zeichnungen ist innerhalb der Reihe der p- oder der s-Komponenten die relative Intensität 1 der schwächsten Komponente gegeben. Die angegebenen relativen Intensitäten gelten nur innerhalb einer Reihe von p- oder von s-Komponenten, nicht von einer p- zu einer s-Reihe oder von einer Linie zu einer andern. Zudem ist wegen der Schwierigkeiten der ganzen Untersuchung ihre Genauigkeit nicht hoch anzuschlagen.

Es ist noch ein Wort über das Intensitätsverhältnis lang- und kurzwelliger Komponenten gleicher Nummer zu sagen. Dieses kehrt sich ja um, wenn die Feldrichtung in Bezug auf die Kanalstrahlenrichtung umgekehrt wird. Diese Erscheinung gilt auch für den Fall der Feinzerlegung[1]), wie ich für alle untersuchten Linien H_α, H_β, H_γ, H_δ neuerdings feststellte. Da es sich hier um das Intensitätsverhältnis von Komponenten verschiedener Nummer handelt, habe ich bei seiner Berechnung das Mittel aus den Schwärzungen der lang- und kurzwelligen Komponenten gleicher Nummer genommen und diesen die gleiche relative Intensität gegeben.

Was den Abstand einer kurz- und einer langwelligen Komponente von der unzerlegten Linie betrifft, so habe ich bereits an einer anderen Stelle[2]) die Schwierigkeiten dargelegt, über eine

---

1) H. Lunelund, a. a. O.

2) J. Stark, Die elektrische Spektralanalyse chemischer Atome, S. Hirzel, Leipzig 1914, S. 60.

etwaige Dissymmetrie zuverlässige Angaben zu machen. Diese Dissymmetrie ist, wenn sie überhaupt vorhanden ist, nur gering und bedarf einer besonderen Untersuchung. Ich habe darum in der vorliegenden Arbeit von einer Verfolgung dieses Punktes abgesehen und habe auch für den Abstand einer kurz- und einer langwelligen Komponente gleicher Nummer den Mittelwert aus ihren gemessenen Abständen in die Tabellen eingetragen.

Die weiter unten mitgeteilten Zahlen für die Linien H_α, H_β, H_γ, H_δ sind von Spektrogrammen derselben Aufnahme abgenommen, in denen die Feldstärke 104000 Volt $\times$ cm^{-1} betrug.

Endlich ist noch ein Wort zu sagen zu dieser Angabe der Feldstärke in den folgenden Tabellen. Nach den bis jetzt vorliegenden Messungen darf es als sicher gelten, daß der Komponentenabstand in der Grobzerlegung proportional der Feldstärke ist. Dagegen kann der absolute Wert des Verhältnisses

$$\frac{\text{Komponenten-Abstand}}{\text{Feldstärke}}$$

noch nicht als genau bezeichnet werden, wie ich an anderer Stelle (Die elektrische Spektralanalyse S. 38) dargelegt habe. Gemäß dem hier gemachten Vorschlag habe ich darum die Feldstärke aus der Zerlegung berechnet unter Annahme des Wertes

$$3{,}0 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Å}}{\text{Volt} \times \text{cm}^{-1}}$$

für die intensivsten p-Komponenten von H_β.

Tabelle I.

Elektrische Komponenten von H_α in einem Felde von 104000 Volt $\times$ cm^{-1} bei 1 : 8,15 mm : Å Dispersion.

Komponentenart	Komponentennummer	Abstand von Mitte in Å	Intensität
p-Komponenten	3	11,5	1,2
	2	8,8	1,1
	+ 1	+ 6,2	1
	— 1	— 6,2	1
	2	8,8	1,1
	3	11,5	1,2
s-Komponenten	+ 1	+ 2,6	1
	0	0	2,6
	— 1	— 2,6	1

Tabelle II.

Elektrische Komponenten von H_β in einem Felde von 104000 Volt × cm^{-1} bei 1 : 16,8 mm : Å Dispersion.

Komponenten-art	Komponenten-nummer	Abstand von Mitte in Å	Intensität	Bemerkungen
p-Komponenten	6	19,4	1	fraglich
	5	16,4	11,5	
	4	13,2	9,1	
	3	10,0	4,8	
	2	6,7	1	
	+1	+3,3	1,2	
	0	0	1,4	
	−1	−3,3	1,2	
	2	6,7	1	
	3	10,0	4,8	
	4	13,2	9,1	
	5	16,4	11,5	
	6	19,4	1	fraglich
s-Komponenten	6	19,3	1	
	5	16,4	1,1	
	4	13,2	1,3	fraglich
	3	9,7	9,7	
	2	6,6	12,6	
	+1	+3,4	3,3	
	0	0	1,4	
	−1	−3,4	3,3	
	2	6,6	12,6	
	3	9,7	9,7	
	4	13,2	1,3	fraglich
	5	16,4	1,1	
	6	19,3	1	

Tabelle III.

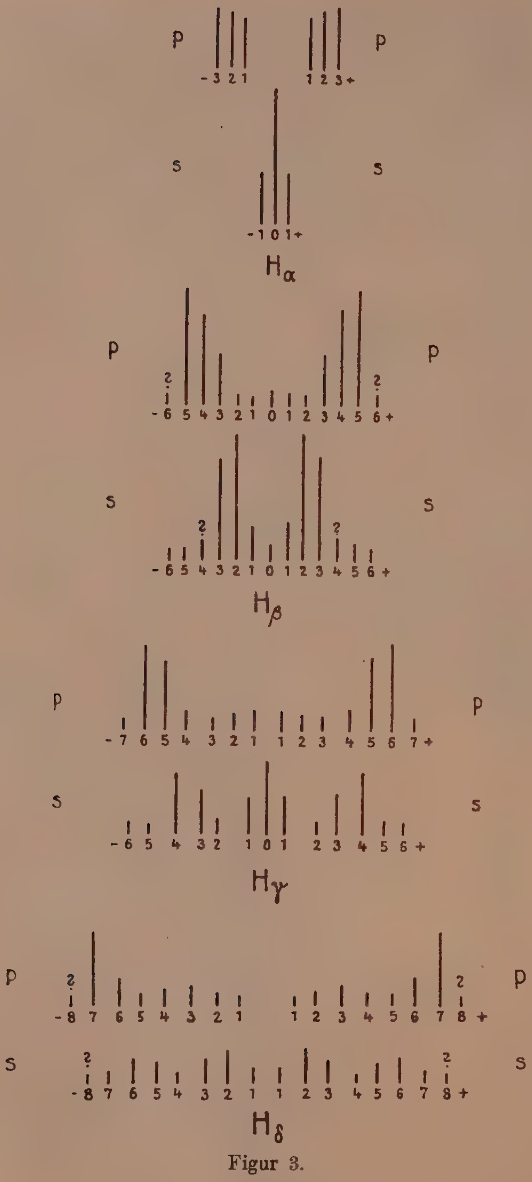
Elektrische Komponenten von H_γ in einem Felde von 104000 Volt $\times$ cm^{-1} bei 1 : 18,3 mm : Å Dispersion.

Komponentenart	Komponentennummer	Abstand von Mitte in Å	Intensität	Bemerkungen
p-Komponenten	7	29,4	1	fraglich
	6	23,9	10,8	
	5	19,9	7,2	
	4	15,9	2,0	
	3	10,6	1	
	2	6,6	1,5	
	+ 1	+ 2,7	1,6	
	— 1	— 2,7	1,6	
	2	6,6	1,5	
	3	10,6	1	
	4	15,9	2,0	
	5	19,9	7,2	
	6	23,9	10,8	
	7	29,4	1	fraglich
s-Komponenten	6	26,3	1,1	
	5	22,8	1	
	4	17,3	6,1	
	3	13,3	4,3	
	2	9,7	1,2	
	+ 1	+ 3,9	3,6	
	0	0	7,2	
	— 1	— 3,9	3,6	
	2	9,7	1,2	
	3	13,3	4,3	
	4	17,3	6,1	
	5	22,8	1	
	6	26,3	1,1	

Tabelle IV.

Elektrische Komponenten von H_β in einem Felde von 104000 Volt $\times$ cm^{-1} bei 1 : 20,0 mm : Å Dispersion.

Komponenten-art	Komponenten-nummer	Abstand von Mitte in Å	Intensität	Bemerkungen
p-Komponenten	8	37,5	1	fraglich
	7	33,4	7,2	
	6	28,6	2,8	
	5	24,2	1,1	
	4	19,6	1,2	
	3	14,4	1,5	
	2	9,6	1,2	
	+1	+5,2	1	
	−1	−5,2	1	
	2	9,6	1,2	
	3	14,4	1,5	
	4	19,6	1,2	
	5	24,2	1,1	
	6	28,6	2,8	
	7	33,4	7,2	
	8	37,5	1	fraglich
s-Komponenten	8	34,8	1,1	fraglich
	7	30,4	1,3	
	6	25,8	2,4	
	5	21,2	2,0	
	4	17,2	1	
	3	11,9	2,1	
	2	7,4	3,2	
	+1	+2,4	1,3	
	−1	−2,4	1,3	
	2	7,4	3,2	
	3	11,9	2,1	
	4	17,2	1	
	5	21,2	2,0	
	6	25,8	2,4	
	7	30,4	1,3	
	8	34,8	1,1	fraglich


p
-3 2 1
1 2 3+
s
-1 0 1+
H_α
p
-6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6+
s
-6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6+
H_β
p
-7 6 5 4 3 2 1 1 2 3 4 5 6 7+
s
-6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6+
H_γ
p
-8 7 6 5 4 3 2 1 1 2 3 4 5 6 7 8+
s
-8 7 6 5 4 3 2 1 1 2 3 4 5 6 7 8+
H_δ

Figur 3.

§ 4. Abhängigkeit des Komponentenabstandes von der Feldstärke.

Die Höchstpunkte in den Schwärzungen der Komponenten in der Grobzerlegung entsprechen den intensivsten Komponenten in der Feinzerlegung. Da erwiesen ist, daß die Abstände jener Höchstpunkte von der unzerlegten Linie proportional der elektrischen Feldstärke sind, so gilt dies auch für die Abstände der intensivsten Komponenten in der Feinzerlegung. Dagegen erhebt sich die Frage, ob das Gesetz der Proportionalität auch für die übrigen Komponenten der Feinzerlegung gilt.

In meinem Buche über die elektrische Spektralanalyse habe ich (S. 59) bereits vorläufige Messungen mitgeteilt, aus denen eine bejahende Antwort auf die vorstehende Frage folgt. Gleichwohl schien mir die aufgeworfene Frage für eine erneute Prüfung wichtig genug. In den nachstehenden Tabellen sind für die Linien H_β, H_γ und H_δ die Verhältnisse der Abstände von Komponenten gleicher Nummer für zwei verschiedene Feldstärken mitgeteilt.

Tabelle V.

Linie H_β	Komponenten-nummer	$\frac{\text{Abstand für 104000}}{\text{Abstand für 76000}}$ Volt $\times$ cm^{-1}
p-Komponenten	5—5	1,37
	4—4	1,39
	3—3	1,37
	2—2	1,37
	1—1	1,38
s-Komponenten	6—6	1,36
	5—5	1,32
	3—3	1,31
	2—2	1,37
	1—1	1,33

Tabelle VI.

Linie H_γ	Komponenten-nummer	$\frac{\text{Abstand für 104000}}{\text{Abstand für 75000}}$ Volt $\times$ cm^{-1}
p-Komponenten	6—6	1,35
	5—5	1,40
	4—4	1,31
	3—3	1,40
	2—2	1,40
	1—1	1,40
s-Komponenten	6—6	1,39
	5—5	1,40
	4—4	1,40
	3—3	1,40
	2—2	1,40
	1—1	1,38

Tabelle VII.

Linie H_γ	Komponenten-nummer	$\frac{\text{Abstand für 104000}}{\text{Abstand für 64000}}$ Volt $\times$ cm^{-1}
p-Komponenten	6—6	1,60
	5—5	1,65
	4—4	1,66
	3—3	1,60
	2—2	1,60
	1—1	1,70
s-Komponenten	4—4	1,61
	3—3	1,61
	1—1	1,64

Tabelle VIII.

Linie H_γ	Komponenten-nummer	$\frac{\text{Abstand für } 104000}{\text{Abstand für } 64000}$ Volt × cm⁻¹
p-Komponenten	7—7	1,62
	6—6	1,63
	5—5	1,61
	3—3	1,63
	2—2	1,60
s-Komponenten	6—6	1,60
	5—5	1,60
	3—3	1,60
	2—2	1,65
	1—1	1,65

Wie aus den vorstehenden Tabellen hervorgeht, ist innerhalb der Beobachtungsfehler das Verhältnis der Abstände der Komponenten gleicher Nummer von der unzerlegten Linie für verschiedene Feldstärken unabhängig von der Nummer, also für alle Nummern dasselbe. Das System der elektrischen *p*- und *s*-Komponenten einer Linie bleibt sich somit bei Änderung der zerlegenden Feldstärke ähnlich; und da der Abstand der intensivsten Komponenten proportional der Feldstärke ist, so gilt dies demnach auch für alle anderen Komponenten.

§ 5. **Folgerung.**

Von grundlegender Bedeutung sind folgende Tatsachen. Die Serienlinien des Wasserstoffs werden in eine große Anzahl von *p*- und *s*-Komponenten symmetrisch durch ein elektrisches Feld zerlegt. Der relative Abstand und das Intensitätsverhältnis der Komponenten ist von Linie zu Linie verschieden. Nach der Untersuchung von J. Koch[1]) zeigen auch die Linien der diffusen Nebenserien des Heliums in der Feinzerlegung eine Anzahl von elektrischen Komponenten, indes sind deren Abstände und Intensitäten dissymmetrisch zur unzerlegten Linie.

1) Vorläufiger Bericht in meinem Buche: Die elektrische Spektralanalyse chemischer Atome, S. 73.

Aus dem Zusammenhalten dieser Tatsachen läßt sich folgern, daß die Anordnung und das Intensitätsverhältnis im elektrischen Komponentensystem einer Serienlinie des Wasserstoffs bedingt ist durch die Struktur des Atoms, insonderheit durch die räumliche Anordnung negativer Elektronen, da ja die Zentren der Serienlinien gemäß dem Zeeman-Effekt negative Elektronen sind.

Jene Tatsachen und diese Folgerung schließen die Annahme aus, daß im Wasserstoffatom nur ein einziges Elektron vorkommt, das bei seiner Beschleunigung relativ zu einem positiven Kern die Serienlinien zur Emission bringt.

Vielmehr ist zu folgern, daß selbst an der Emission einer einzigen Serienlinie im einzelnen Wasserstoffatom mehrere Elektronen beteiligt sind. Im nichtdeformierten Atom, so ist zu schließen, besitzen alle diese Elektronen dieselben Freiheitsgrade; auch ein magnetisches Feld deformiert nicht merklich das Atom, sondern legt die drei Freiheitsgrade aller gleichartigen Elektronen einer Linie qualitativ und quantitativ übereinstimmend auseinander; ein elektrisches Feld dagegen deformiert das Atom derartig, daß wenigstens für eine ganze Anzahl der Elektronen einer Serienlinie die Freiheitsgrade hinsichtlich der Frequenz und der Intensität von einander verschieden werden.

Aachen, Physik. Institut d. Techn. Hochschule, 25. Okt. 1914.

Über gewisse Vereinfachungen bei der linearen Transformation der elliptischen Funktionen.

Von

Robert Fricke in Braunschweig.

Vorgelegt von Herrn Klein in der Sitzung vom 27. Juni 1914.

Es ist bekannt, daß die bei der Transformation der elliptischen Funktionen sonst so zugkräftige Stufentheorie der eindeutigen elliptischen Modulfunktionen bei einem verhältnismäßig elementaren Problem, nämlich dem der linearen Transformation der Thetafunktionen versagt. Die Bestimmung der hierbei auftretenden achten Einheitswurzel ist durch die auf Kongruenzbetrachtungen beruhenden gruppentheoretischen Erwägungen der Modulfunktionen nicht möglich. Daß die Bestimmung dieser Einheitswurzel durch Gaußsche Summen und damit durch die Theorie der quadratischen Reste geleistet werden kann, war Jacobi bekannt und wurde von Hermite[1]) veröffentlicht. Die hier hervorgetretene Beziehung zwischen den Gaußschen Summen und quadratischen Resten einerseits und der Transformation der Thetafunktionen andererseits hat zu einer größeren Reihe von Untersuchungen Anlaß gegeben[2]).

1) „Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques“ Comptes Rendus (Paris), Bd. 46 (1858) p. 171.

2) Die für die Theorie der Gaußschen Summen grundlegende Untersuchung Cauchy's „Methode simple et nouvelle pour la détermination complète des sommes etc.“, Liouville Journ., Bd. 5 (1840) p. 154 knüpft an eine früher von Cauchy im Anschluß an eine Untersuchung von Poisson aufgestellte Gleichung (im Bulletin de la Société Philomatique von 1817), welche nichts anderes ist, als die Transformationsformel des Nullwertes der ϑ_3-Funktion für die unten mit T bezeichnete Substitution. An Cauchy schließt sich Kronecker an mit der Abhandlung „Über den vierten Gaußschen Beweis des Reziprozitätsgesetzes für die quadratischen Reste“, Berlin. Monatsber. vom 29. Juli 1880, an Kronecker weiter Landsberg „Zur Theorie der Gaußschen Summen und der linearen Transfor-

Neben diesen analytischen Methoden hat Dedekind[1]) eine auf substitutionentheoretischer Basis erwachsene Überlegung eingeleitet. Weber[2]) ist ihm insofern gefolgt, als er den Ausdruck der 24sten Wurzel, der sich bei Transformation der Funktion $\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[24]{\varDelta}$ durch die vorbezeichneten analytischen Methoden ergeben hatte, angibt und die Richtigkeit hinterher durch Operieren mit den erzeugenden Substitutionen der Modulgruppe bestätigt. Dies ist ein Verzicht auf deduktive Behandlung des Problems. Tannery und Molk[3]) haben diesen Weg aufgenommen und den Versuch gemacht, der Darstellung mehr einen deduktiven Charakter zu geben; eine Untersuchung von Mertens[4]) steht auf der gleichen Basis und leistet dasselbe.

Auch diese letzten Entwicklungen arbeiten sich schwierig durch den Gegenstand hindurch und erwecken den Eindruck, daß die Untersuchung, wenn ihr Ergebnis nicht von vornherein bekannt gewesen wäre, nur mit Mühe hätte durchgeführt werden können. Bei zweckmäßigem Gebrauch der zur Verfügung stehenden Hilfsmittel läßt sich indes die Entwicklung in eine sehr einfache und durchsichtige Gestalt kleiden, die die folgenden Zeilen kurz darstellen mögen.

Bei der linearen Transformation der elliptischen Funktionen erscheint zunächst wesentlich, alle diejenigen Entwicklungen, welche mit Hilfe der Theorie der eindeutigen Modulfunktionen geleistet werden können, auch wirklich auf diesem Wege durchzuführen[5]). Hierbei erweist sich die von Klein[6]) eingeführte Funktion:

---

mation der Thetafunktionen", Journ. f. Math. Bd. 111 (1893) p. 234. Molien übertrug auf Anregung Kleins diese Entwicklungen auf die Bestimmung der 24sten Wurzel der Einheit, welche bei der linearen Transformation von $\sqrt[24]{\varDelta}$ auftritt; s. die Note „Über gewisse in der Theorie der elliptischen Funktionen auftretende Einheitswurzeln", Leipz. Berichte vom 12. Januar 1885.

1) „Erläuterungen zu Riemanns Fragment über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunktionen", Riemanns Werke (1. Auflage, 1876) p. 438.

2) In dem Werke „Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen" (Braunschweig, 1891) p. 98 ff.

3) In dem Werke „Éléments de la théorie des fonctions elliptiques", Bd. 2 (Paris, 1896), p. 89 ff.

4) „Zur linearen Transformation der ϑ-Reihen", Amer. Math. Soc. Transactions Bd. 2 (1901) p. 331.

5) Es erscheint demnach z. B. als ein Umweg, wenn man die Aufstellung der Hermiteschen Verwandlungstafeln für $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ auf die lineare Transformation der Thetafunktionen oder auf das Verhalten von $\sqrt[24]{\varDelta}$ gründet.

6) „Über die elliptischen Normalkurven der n^{ten} Ordnung und die zugehörigen Modulfunktionen der n^{ten} Stufe", Leipz. Abhandlungen, Bd. 13 (1885), p. 339.

$$\sigma_{\lambda\mu}(u/\omega_1, \omega_2) = e^{\frac{\lambda\eta_1+\mu\eta_2}{n}\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{2n}\right)}\sigma\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}/\omega_1, \omega_2\right)$$

mit den beiden Formeln, welche ihr Verhalten bei Vermehrung von u um Perioden und bei linearen Substitutionen der Perioden festlegen, als ein Hilfsmittel von universeller Bedeutung. Nicht nur das Verhalten der Wurzeln $\sqrt[3]{\Delta}, \sqrt[4]{\Delta}, \sqrt[12]{\Delta}$ der Diskriminante Δ kann man von hieraus äußerst leicht charakterisieren, sondern z. B. auch die bekannten Verwandlungstafeln Hermite's für $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ und die entsprechenden Formeln für $\sqrt[12]{kk'}$ nach kurzer Zwischenrechnung hinschreiben. Auch die Quotienten der vier Thetafunktionen, sowie ihre Quadrate und überhaupt ihre Produkte zu zweien beherrscht man in Anbetracht der linearen Substitution von jener Funktion aus vollständig.

Es mag hierbei die Bemerkung Platz finden, daß man bei der linearen Transformation der elliptischen Funktionen zweiter Stufe, z. B. der Funktionen $sn\, w$, $cn\, w$, $dn\, w$ eigentlich nicht sechs Fälle (wie gewöhnlich geschieht), sondern deren zwölf unterscheiden sollte. Man muß nämlich hier überall (bei den Funktionen $sn\, w$, $cn\, w$, $dn\, w$ wegen der ungeraden Funktion $sn\, w$) mit den homogenen Periodensubstitutionen arbeiten. Die den $sn\, w$, $cn\, w$, $dn\, w$ zu Grunde liegende Gruppe ist dann aber gar nicht diejenige Gruppe, welche man nach Klein als „Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe" bezeichnet, sondern vielmehr diejenige Kongruenzgruppe vierter Stufe vom Index 12, welche durch die für die Koeffizienten α, β, γ, δ der homogenen Substitutionen vorgeschriebenen Kongruenzen:

$$(1) \qquad \alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad 2\beta \equiv 2\gamma \equiv 0 \pmod{4}$$

definiert ist. Daraus erklärt sich denn auch, daß die bekannten Transformationsformeln der $sn\, w$, $cn\, w$, $dn\, w$ keine G_6, sondern erst erst eine Gruppe G_{12} der zwölften Ordnung bilden. Selbst bei den ϑ-Nullwerten, die doch vom Periodenquotienten ω allein abhängen, ist allerdings aus einem mehr äußerlichen Grunde das Arbeiten mit den homogenen Substitutionen nötig, weil sich nämlich bei ihrer Transformation die Irrationalität $\sqrt{\gamma\omega+\delta}$ einfindet und unentbehrlich erscheint.

Diejenigen beiden weiterhin S' und T' genannten Substitutionen, welche bei bloßer Angabe ihrer Koeffizienten durch:

$$S' = \begin{pmatrix}1, 2\\0, 1\end{pmatrix}, \quad T' = \begin{pmatrix}1, 0\\-2, 1\end{pmatrix}$$

gegeben sind, erzeugen zwar als nicht-homogene Substitutionen die Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe. Indem wir sie aner weiterhin stets als homogene Periodensubstitutionen auffassen, erzeugen sie als solche erst die eben genannte Gruppe vierter Stufe, von der man dann durch Zusatz der durch das Symbol -1 zu bezeichnenden Substitution $\begin{pmatrix}-1, & 0\\ 0, & -1\end{pmatrix}$ zur homogenen Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe gelangt. Die Erzeugenden der Gesamtgruppe der homogenen Periodensubstitutionen bezeichnen wir wie üblich durch:

$$S = \begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix};$$

hier ist es nicht nötig, noch die Substitution -1 zuzufügen, da $T^2 = -1$ ist.

Bei Transformation der ϑ-Funktionen vermöge einer Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ stellt sich (neben anderen Faktoren) bekanntlich auch $\sqrt{\gamma\omega+\delta}$ als Faktor ein. In üblicher Weise geben wir die Vorschrift, daß, wenn $\gamma \gtrless 0$ ist, $\sqrt{\gamma\omega+\delta}$ einen positiven reellen Bestandteil haben soll; ist aber $\gamma = 0$, so soll jene Wurzel gleich $+1$ oder gleich $+i$ sein, je nachdem $\delta = 1$ oder $\delta = -1$ vorliegt. Die Wirkung der Substitution S auf die Thetafunktionen folgt einfach aus den Reihen; man hat z. B.:

$$\vartheta_1(v, \omega+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \vartheta_1(v, \omega).$$

Für die Substitution T folgt wieder etwa für die ϑ_1-Funktion aus der Theorie der eindeutigen Modulfunktionen nur erst:

$$\vartheta_1\left(\frac{v}{-\omega}, \frac{1}{-\omega}\right) = \pm e^{-\frac{\pi i}{4}} \sqrt{-\omega}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\omega}} \vartheta_1(v, \omega)$$

mit einem noch unbekannten Vorzeichen. Die Bestimmung des Vorzeichens kann durch die oben unter dem Texte erwähnte Cauchy-Poissonsche Gleichung geschehen, die Kronecker (in der oben genannten Abhandlung von 1880) ausführlich auf Grund des Cauchyschen Satzes behandelt. Viel kürzer ist die jetzt gewöhnlich befolgte Bestimmung auf Grund der Betrachtung der ϑ-Reihen für rein imaginäre ω. Auch das ist ein Umweg; denn es handelt sich hier um einen substitutionentheoretischen Gegenstand, der durch eine allein der Sache entsprechende Methode geklärt werden

soll und kann. Bei allen Substitutionen nämlich, welche „Quadrate“ anderer sind (sich durch einmalige Wiederholung von Substitutionen herstellen lassen), kommt kein zweifelhaftes Vorzeichen mehr vor; auch bei allen Substitutionen, die sich aus solchen Quadraten und S herstellen lassen. Nun ist aber $(ST)^2 S = T^{-1} = -T$, und damit erledigt sich auch die zweite Erzeugende T sofort. Als Beispiel merken wir an:

$$(1) \qquad \vartheta_3\left(\frac{v}{-\omega}, \frac{1}{-\omega}\right) = e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{-\omega}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\omega}}\, \vartheta_3(v, \omega).$$

Man kann nun (durch Kombination von S und T) sehr leicht das Verhalten der ϑ bei sechs speziellen mod. 2 inkongruenten Substitutionen feststellen und hat alsdann weiterhin (um das allgemeine Problem zu lösen) nur noch nötig, ihr Verhalten bei einer beliebigen Substitution mit $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{2}$ festzustellen. Auch ist es genug, eine der ϑ-Funktionen zu betrachten, und hier bringt die ϑ_3-Funktion wesentliche Vorteile. Ferner kann man, um den zwar keineswegs schwierigen, aber lästigen Exponentialfaktor los zu werden, mit dem „Nullwerte“:

$$\vartheta_3(0, \omega) = \vartheta_3(\omega)$$

arbeiten, was aber (wie schon bemerkt) natürlich keineswegs vom Gebrauche der homogenen Substitutionen befreit.

Die Wirkung der erzeugenden Substitutionen S' und T' der Gruppe vierter Stufe ist:

$$(2) \quad \vartheta_3(\omega \pm 2) = \vartheta_3(\omega), \quad \vartheta_3\left(\frac{\omega}{\mp 2\omega + 1}\right) = \sqrt{\mp 2\omega + 1}\, \vartheta_3(\omega).$$

Für eine beliebige Substitution mit $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{2}$ hat man aber zunächst nur:

$$\vartheta_3\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) = \pm i^{\frac{\delta - 1}{2}} \sqrt{\gamma\omega + \delta}\, \vartheta_3(\omega),$$

und hier handelt es sich dann eben um die allgemeine Bestimmung des Vorzeichens. Durch Heranziehung der ersten Substitution (2) sieht man, daß das Vorzeichen allein von γ und δ abhängt; es werde in dieser Abhängigkeit durch (γ, δ) bezeichnet:

$$(3) \qquad \vartheta_3\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) = (\gamma, \delta)\, i^{\frac{\delta - 1}{2}} \sqrt{\gamma\omega + \delta}\, \vartheta_3(\omega).$$

Bei Kombination der Substitutionen erfordert nur das Verhalten

der Wurzeln eine kurze Überlegung, die keine Schwierigkeit bietet; man hat zu erwägen, daß ω positiven imaginären Bestandteil hat, und daß infolgedessen $\sqrt{\gamma\omega+\delta}$ dem ersten oder vierten Quadranten der komplexen Ebene angehört, je nachdem $\gamma > 0$ oder < 0 ist oder je nachdem $\operatorname{sgn}\gamma$ (d. i. „signum" von γ) gleich $+1$ oder -1 ist.

Die Regeln des Symbols (γ, δ) stellt man in folgender Art auf. Durch Kombination des Ansatzes (3) mit der Substitution -1 ergibt sich

$$(4) \qquad (-\gamma, -\delta) = (-1)^{\frac{\delta+1}{2}} \operatorname{sgn}(\gamma) \cdot (\gamma, \delta),$$

weiter durch Kombination mit der Spiegelung an der imaginären ω-Achse:

$$(5) \qquad (-\gamma, \delta) = (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} (\gamma, \delta), \quad (\gamma, -\delta) = \operatorname{sgn}(\gamma)\, (\gamma, \delta).$$

Rekursionsformeln für die Berechnung des Symbols (γ, δ) findet man durch Kombination des Ansatzes (3) mit den Regeln (2). Die erste Regel liefert unmittelbar:

$$(6) \qquad (\gamma, \delta) = (-1)^{\frac{\gamma}{2}} (\gamma, \delta \pm 2\gamma).$$

Die zweite Regel (2) erfordert eine kurze Überlegung, welche z. B. für T'^{-1} die Bestimmung des in:

$$\sqrt{\gamma \frac{\omega}{2\omega+1} + \delta}\, \sqrt{2\omega+1} = \pm \sqrt{(\gamma+2\delta)\,\omega+\delta}$$

rechts gültigen Zeichens betrifft. Es zeigt sich, daß einige hierbei zu unterscheidende Fälle in ein einziges Resultat zusammengezogen werden können, wenn man sich aus sgn noch das weitere Vorzeichensymbol:

$$(7) \qquad [\gamma, \delta] = \tfrac{1}{2} \left(1 + \operatorname{sgn}(\gamma) + \operatorname{sgn}(\delta) + \operatorname{sgn}(\gamma \cdot \delta)\right)$$

aufbaut; die Bedeutung desselben ist einfach die, daß $[\gamma, \delta]$ für zwei von 0 verschiedene Zahlen γ, δ gleich -1 ist, falls beide Zahlen negativ sind, dagegen in allen anderen Fällen den Wert $+1$ hat. Dann gilt einfach:

$$(\gamma, \delta) = \frac{[\gamma \pm 2\delta, \delta]}{[\gamma, \delta]} (\gamma \pm 2\delta, \delta).$$

Diese Regel legt nahe, an Stelle von (γ, δ) mit dem Symbol:

$$(8) \qquad \left[\frac{\gamma}{\delta}\right] = [\gamma, \delta] \cdot (\gamma, \delta)$$

zu arbeiten. Die Rekursionsformeln sind dann:

$$(9) \quad \left[\frac{\gamma \pm 2\delta}{\delta}\right] = \left[\frac{\gamma}{\delta}\right], \quad [\gamma, \delta]\left[\frac{\gamma}{\delta}\right] = (-1)^{\frac{\gamma}{2}} [\gamma, \delta \pm 2\gamma]\left[\frac{\gamma}{\delta \pm 2\gamma}\right],$$

die zweite Gleichung (5) liefert:

$$(10) \qquad \left[\frac{\gamma}{-\delta}\right] = \left[\frac{\gamma}{\delta}\right],$$

die andere Gleichung (5) und die Gleichung (4) nehmen die Gestalt an:

$$(11) \quad \left[\frac{-\gamma}{\delta}\right] = (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \operatorname{sgn}(\delta)\left[\frac{\gamma}{\delta}\right], \quad \left[\frac{-\gamma}{-\delta}\right] = (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \operatorname{sgn}(\delta)\left[\frac{\gamma}{\delta}\right].$$

Mit Benutzung der Anfangswerte $\left[\frac{\pm 2}{1}\right] = 1$ ist das Symbol $\left[\frac{\gamma}{\delta}\right]$ aus den vorstehenden Rekursionsformeln in allen Fällen berechenbar und ist demnach durch diese Formeln und die Anfangswerte eindeutig definiert.

Wäre nun auch nicht die Beziehung zur Theorie der quadratischen Reste längst bekannt, so müßte doch die handgreifliche Analogie des Symbols $\left[\frac{\gamma}{\delta}\right]$ zum Legendre-Jacobischen Zeichen $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$ (mit der Erweiterung, daß $\left(\frac{\gamma}{1}\right) = 1$ ist) unmittelbar einleuchten. Sieht man zunächst von der zweiten Gleichung (9) ab, so sind alle vorstehenden Angaben (8) ff. zutreffend, wenn man $\left[\frac{\gamma}{\delta}\right]$ als Legendre-Jacobisches Zeichen liest. Trifft auch noch die zweite Gleichung (9) zu, so sind beide Zeichen geradezu identisch, da die angegebenen Relationen mit den Anfangswerten definierend sind. Die zweite Gleichung (9) ist aber nichts weiter als das Reziprozitätsgesetz, wie man so einsieht: Sind P und Q zwei teilerfremde, positive oder negative, ungerade Zahlen, so ist:

$$(12) \quad \left(\frac{P}{Q}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2} \cdot \frac{Q-1}{2}} [P, Q]\left(\frac{Q}{P}\right), \quad \left(\frac{2}{P}\right) = (-1)^{\frac{P^2-1}{8}},$$

wo die erste Gleichung den Reziprozitätssatz darstellt. Ist nun 2_λ die höchste in der geraden Zahl γ aufgehenden Potenz von 2, so setze man $\gamma = 2^\lambda . \gamma'$ und hat:

$$\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) = \left(\frac{2^{\lambda}\cdot\gamma'}{\delta}\right) = \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\lambda}\cdot\left(\frac{\gamma'}{\delta}\right)$$

also mit Benutzung von (12):

$$[\gamma, \delta]\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) = (-1)^{\lambda\frac{\delta^2-1}{8}}\cdot(-1)^{\frac{\gamma'-1}{2}\cdot\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma'}\right).$$

Setzt man hier $\delta \pm 2\gamma$ an Stelle von δ, so folgt, da γ gerade ist und 2γ ein Multiplum von γ' ist:

$$[\gamma, \delta \pm 2\gamma]\left(\frac{\gamma}{\delta \pm 2\gamma}\right) = (-1)^{\lambda\frac{\gamma}{2}}\cdot(-1)^{\lambda\frac{\delta^2-1}{8}}\cdot(-1)^{\frac{\gamma'-1}{2}\cdot\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma'}\right).$$

Da der erste Faktor rechts auch $(-1)^{\frac{\gamma}{2}}$ geschrieben werden kann, so lehrt der Vergleich mit der voraufgehenden Gleichung:

$$[\gamma, \delta]\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) = (-1)^{\frac{\gamma}{2}}[\gamma, \delta \pm 2\gamma]\left(\frac{\gamma}{\delta \pm 2\gamma}\right),$$

womit die zweite Gleichung (9) gewonnen ist. Auch umgekehrt folgt aus der letzten Gleichung die übliche Gestalt des Reziprozitätsgesetzes, so daß die zweite Relation (9) als ein Ausdruck des Reziprozitätssatzes gelten kann. Die allgemeine Transformationsformel der ϑ_3-Funktion für $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod 2$ ist hiernach:

$$(13) \qquad \vartheta_3\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = [\gamma, \delta]\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) i^{\frac{\delta-1}{2}} \sqrt{\gamma\omega+\delta}\, \vartheta_3(\omega).$$

Daß man von hieraus einen besonders einfachen Zugang zur allgemeinen Wertbestimmung der Gaußschen Summen hat[1]), ist einleuchtend. Auch die hier durchzuführende Entwicklung habe ich in ihrer wahren Einfachheit nirgends gefunden. Man leitet aus der für $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod 2$ gültigen Gleichung (13) durch Gebrauch der Substitution T leicht die folgende für $\alpha \equiv \delta \equiv 0 \pmod 2$ gültige Relation her:

$$(14) \qquad \vartheta_3\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right) e^{-\frac{\pi i \gamma}{4}} \sqrt{\gamma\omega+\delta}\, \vartheta_3(\omega).$$

1) Erst sehr spät sind die doch recht schwierigen Methoden Dirichlets (s. z. B. die 1894 erschienene Darstellung Bachmann's im 7. Abschnitt seines Buches „Die analytische Zahlentheorie“) durch elementare Überlegungen ersetzt; vergl. dazu Mertens, „Über die Gaußschen Summen“, Berl. Ber. vom 27. Februar 1896.

Beide Gleichungen mögen in den folgenden Ausdruck zusammengezogen werden:

$$\vartheta_3\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = c\sqrt{\gamma\omega+\delta}\;\vartheta_3(\omega).$$

Den Übergang zu den Gaußschen Summen vollzieht man dann durch Eintragung der ϑ_3-Reihen, indem man speziell setzt:

$$\omega = -\frac{\delta}{\gamma}+i\eta,\quad \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} = \frac{\alpha}{\gamma}+\frac{i}{\gamma^2\eta},$$

unter η eine reelle positive Variabele verstanden:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{n^2\alpha\pi i}{\gamma}-\frac{n^2\pi}{\gamma^2\eta}} = c\sqrt{\gamma i\eta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\delta\pi i}{\gamma}-n^2\pi\eta}.$$

Setzt man links $n = l+\gamma m$ und summiert für m von $-\infty$ bis $+\infty$ für l aber von 1 bis γ, so folgt:

$$\sum_{l=1}^{\gamma}\left(e^{l^2\frac{\alpha\pi i}{\gamma}}\cdot e^{-\frac{l^2\pi}{\gamma^2\eta}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-m^2\frac{\pi}{\eta}-2m\frac{l\pi}{\gamma\eta}}\right)$$

$$= c\sqrt{\gamma i\eta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\delta\pi i}{\gamma}-n^2\pi\eta}.$$

Hier ist nun die innere links stehende Summe einfach die Funktion $\vartheta_3\left(\frac{li}{\gamma\eta},\frac{i}{\eta}\right)$ und kann demnach auf Grund von (1) in eine Reihe umgesetzt werden, bei der η wieder im Zähler der Exponenten steht[1]):

$$e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{-i\eta}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(e^{-m^2\pi\eta}\sum_{l=1}^{\gamma} e^{l^2\frac{\alpha\pi i}{\gamma}+2l\pi i\frac{m}{\gamma}}\right)$$

$$= c\sqrt{\gamma i\eta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\delta\pi i}{\gamma}-n^2\pi\eta}.$$

Gilt weiterhin $\gamma>0$, so ist $\sqrt{\gamma i\eta} = i\sqrt{\gamma}\sqrt{-i\eta}$, wenn $\sqrt{\gamma}$ positiv genommen wird, und man hat:

1) Molien beruft sich bei der Behandlung von $\sqrt[24]{\Delta}$ unter einen weit komplizierteren Apparat an dieser Stelle auf den Cauchy-Poissonschen Satz, was natürlich im Prinzip auf die Benutzung der Formel (1) des Textes hinausläuft, die auch dort unmittelbare Anwendung hätte finden können. Hermite arbeitet nicht mit den ϑ-Nullwerten, um (für die fragliche Reihenumsetzung) sein bekanntes Prinzip benutzen zu können. Noch ferner liegen die schwierigen Grenzbetrachtungen für lim $\eta=0$ zur Einführung der Gaußschen Summen.

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(e^{-m^2\pi\eta}\sum_{l=1}^{\gamma} e^{l^2\frac{\alpha\pi i}{\gamma}+2l\pi i\frac{m}{\gamma}}\right) = c e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\gamma}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\pi\eta-\frac{n^2\delta\pi i}{\gamma}}.$$

Da hier rechts und links Reihen nach ansteigenden Potenzen der reellen Variabelen $e^{-\pi\eta}$ stehen, die für alle unterhalb der Einheit liegenden Werte der Variabelen konvergieren, so sind die Koeffizienten gleich hoher Potenzen rechts und links gleich, und man findet durch Gleichsetzung der Absolutglieder:

$$\sum_{l=1}^{\gamma} e^{l^2\frac{\alpha\pi i}{\gamma}} = c e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\gamma}.$$

Links kann man α durch δ ersetzen, da $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ gilt und in den beiden zu unterscheidenden Fällen eine der Zahlen β, δ gerade ist. Es ergibt sich:

$$\sum_{l=1}^{\gamma} e^{l^2\frac{\delta\pi i}{\gamma}} = e^{\frac{\pi i\delta}{4}}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)\sqrt{\gamma} \quad \text{für } \gamma\equiv 0,\ \delta\equiv 1 \pmod{2},$$

$$\sum_{l=1}^{\gamma} e^{l^2\frac{\delta\pi i}{\gamma}} = i^{\frac{1-\gamma}{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)\sqrt{\gamma} \quad \text{für } \gamma\equiv 1,\ \delta\equiv 0 \pmod{2}.$$

Dies sind aber gerade die beiden schwierigen Fälle der Gaußschen Summen, auf die sich alle übrigen, soweit sie nicht trivial sind, leicht zurückführen lassen.

Braunschweig, den 25. Juni 1914.
